

한국과 러시아의 고등학교 수학교과서 비교 연구 미적분을 중심으로

이 숙 경(침산중)

I. 서론.....	1
A. 연구의 필요성 및 목적	1
B. 연구문제	2
C. 연구방법	2
II. 러시아의 수학 교육과정	2
III. 미적분의 학습 내용 비교.....	2
A. 러시아 수학 교과서의 미적분 학습 내용.....	2
B. 미적분 학습 내용 비교.....	5
1. 전반적인 특징 비교	5
2. 학습 내용의 조직 및 계열성.....	8
3. 학습 내용의 범위 및 학습 지도 내용.....	11
IV. 요약 및 결론 그리고 제언	28
A. 요약 및 결론	28
B. 제언	33
참고문헌	35

I. 서론

A. 연구의 필요성 및 목적

오늘날 세계 각국은 상호 이해와 협력을 증진시키기 위한 교류를 활발히 전개하고 있고 이런 추세에 따라 교육 분야의 교류도 확대되고 있다. 그 한 예가 교육의 기본이 되는 교과서의 질적 향상을 위해 자국 교과서와 외국 교과서를 비교 분석하는 작업인데, 말하자면 외국의 교과서에 대한 자료를 수집하고 시사점을 찾는 것이다. 이러한 국제적인 흐름에 발맞추기 위해서는 우리 나라 교과서와 외국 교과서와의 비교 분석이 절실히 요구되고 있음에도 불구하고 그 과제의 수행이 미국을 비롯한 서방 세계에만 국한되어 온 것이 현실이다. 그러나 과목의 특성을 무시한 서방 세계에 대한 획일적인 편중은 균형있는 교과서의 질적 향상을 위해서도 바람직한 것이라고 할 수 없다. 특히 수학 교육에 있어서의 러시아의 우수성과 그 성과가 세계 수학계에 널리 알려져 있음에도 불구하고 그에 대한 우리의 관심은 지금까지 극히 미약했다고 할 수 있는 것이다. 과학 기술이 진보함에 따라 그 기초가 되는 수학 교육이 중시되기에 이르러 세계 각국이 최선의 수학 교육을 추구하고 있는 이 때, 러시아의 수학 교육은 우리의 수학 교육에 중요한 본보기가 될 것임에 틀림없고, 그런 한 러시아 수학 교과서와의 비교 연구는 충분한 의의가 있는 것이다.

2천년대 과학입국의 표어가 구호에 그치지 않기 위해서는 과학 기술의 토대가 되는 기초 학문인 수학의 발전이 수반되어야 할 것이다. 이를 위해서는 필연적으로 선진 수학교육에 대한 연구가 필요하고 그런 점에서 러시아의 수학 교육은 간과할 수 없는 중요성을 가지고 있다.

이상과 같은 취지하에 본 연구는 러시아의 수학 교육을 이해하는 연구의 일환으로 우리 나라 고등학교 수학Ⅱ(하)와 러시아의 10~11학년용 수학 교과서의 미적분 영역의 내용을 비교하였다.

우리 나라 수학 교육에 미적분 교재가 도입된 것은 1946년 미군정청에 의해 중등학교 수학과 교수 요목이 공포되면서 부터인데, 미적분은 그 이후 오늘날까지 고등학교 수학 교육의 주요한 내용이 되어 왔다. 더욱이 1960~1970년대의 학교 수학의 현대화 운동은 대학 수학과 학교 수학 사이의 틈을 제거하는 것을 본질적인 목표로 추구하고있는 바, 미적분 교재의 정당성에 이의가 제기될 수 없었다(우 정호, 1990).

그러나, 1970년대 중반 이후에는 권위주의적인 연역적 전개와 엄밀성 대신 직관적인 관련성과 단순화를 강조하여 취급을 하고, 문제 해결과 수학의 응용을 보다 강조하자는 주장이 점차 강해지고 있다(NCTM, 1989).

본 연구의 목적은 우리 나라와 러시아의 고등학교 수학 교과서가 미적분 영역에서, 학습 내용의 범위 및 지도 내용, 학습 내용의 조직 및 계열성에 관하여 중요한 유사점과 상이점을 나타내고 있는지를 알아봄으로써 우리 나라 교육과정 및 교과서 개발, 수학 학습지도 방법 개선에 기여하는 데 있다.

B. 연구문제

본 연구에서 비교되어진 미적분 영역의 내용 주제는 1) 미분법, 2) 도함수의 활용, 3) 적분법, 4) 정적분의 응용이며 각 주제에 대하여 다음 두 가지 문제를 탐구하였다.

우리 나라와 러시아의 고등학교 수학 교과서의

1. 전반적인 외형상의 차이점
2. 학습 내용의 범위 및 학습 지도 내용의 유사점과 상이점
3. 학습 내용의 조직 및 계열상의 유사점과 상이점

C. 연구방법

본 연구는 다음의 두 가지 절차에 의해 수행되었다.

1. 교과서 및 자료 수집

본 연구는 러시아에서 1986년에 개정된 제 10~11학년 대수와 기초해석 교과서(모스크바 교육성, 1991)와 우리 나라의 고등학교 수학Ⅱ(하)를 비교 대상 교과서로 삼았다. 그 외의 수집 자료로는 두 나라의 수학과 교수요목, 교사용 지도서, 각종 국제 기관 보고서 등이 있다.

2. 자료분석

1. 교과서 제도, 커리큘럼의 내용 파악
2. 교과서 편집 방침, 내용 등의 특색 파악
3. 수집 교과서의 내용 비교
4. 교과서의 내용 구성 방식을 고찰하여, 특색있는 내용을 예시적으로 설명

Ⅱ. 러시아의 수학 교육과정(생략)

Ⅲ. 미적분의 학습 내용 비교 결과

이 장에서는 러시아의 1986년에 개정된 대수와 기초해석 교과서(Башмаков, 1991)와 한국의 고등학교 수학Ⅱ(하)의 미적분의 학습 내용을 비교 하였다.

A. 러시아 수학교과서의 미적분 내용

1. 러시아 수학교과서의 미적분의 학습 내용

(1) 개요

러시아 수학 교과서인 대수와 기초해석 과정의 목적은 1~9학년에서 다룬 다양한 대수적 주제를 이해하고, 기하, 물리, 응용 수학에서 다루는 문제의 해와 함수의 연구를 위한 도구로서의 해석학적 기초를 접하는 것이다. 일부 학생들은 9학년말로서 중등 교육을 끝내기 때문에, 9학년 과정에 공부한 대수 지식과 기능을 보존할 수 있도록 일반화와 체계화에 중점을 두며, 반복과 복습을 중시하고 있다(UNESCO, 1986).

이 과정의 학습에서 학생들은 멱함수, 지수, 로그, 삼각함수의 이해를 기초로 함수와 친숙해지게 된다. 즉, 기초함수들과 그 성질을 이해하고 체계화하며, 지수, 로그, 삼각함수의 표현과 변환을 다루며, 문제 해결에 이러한 함수들을 이용하게 된다.

도함수, 적분, 기초 미분 방정식을 학습하는 주된 목적은 학생들에게 이러한 강력한 수학적 도구에 관한 기초 지식을 부여하는 것이다. 따라서, 정적분 지도에 있어서는 그 기하학적 의미와 도형의 면적, 체적 계산을 강조하고 있다. 기초 해석 과정을 학교 수학 과정에 포함 시킴으로써 11학년 학생들이 도함수와 적분의 개념을 이용하여 입체의 표면적과 체적을 계산하는 공식을 유도할 수 있도록 하고 있다.

1) 대수와 기초해석에 대한 요구조건

이 과정의 수업 목적은 중요한 수학적 대상인 함수의 조직적인 탐구이며 대수와 해석의 수단을 이용하여 함수의 조사에 사용된 일반적인 수학적 방법을 밝히고 그리고 기하와 물리의 수업에 필수적인 도구의 준비를 하는 것이다(UNESCO, 1987).

2) 대수와 기초해석의 다른 교과와의 연계성

미적분에 관한 원리들은 일반적으로 채택된 보편성을 입증하고, 수학을 도구로 하여 응용 문제를 풀이하는 기본 단계를 보여 주는 데 적합한 현실적인 수학의 예들을 가져올 수 있게 하며 학생들이 이 과정을 공부하는 동안 획득한 지식, 기술, 습관은 기하, 물리, 정보 과학에 특히 적극적으로 사용된다는 것이 그들의 주장이다. 또한, 기본적인 함수들에 대한 공식과 조사 도구들은 전기역학과 광학의 수업에 필수적이고 미분학의 원리들은 방사능의 쇠퇴 현상과 조화진동의 학습에 응용되며 함수의 그래프 작도는 물리학의 학습에서 상당한 역할을 한다고 생각하고 있다. 그리고, 대수와 기초해석 과정에서 학습하는 많은 개념들은 정보 과학 코스의 학습을 위한 관념적인 출발점이 되고, 근사 계산과 특히 근사 공식에 관한 정보는 이 교과 학습에 중요하며, 관련 교과로 부터의 정보가 꾸준히 대수와 기초해석 수업에 이용되어야 하고, 기계학, 광학, 전기역학, 화학으로 부터의 다양한 개념이 도입이 되어져야 하며, 실질적인 문제들이 배치되어야 한다고

권고하고 있다(UNESCO, 1987).

(2) 러시아 교과서의 미적분의 학습 내용

<표-2> 러시아 교과서 미분의 지도 내용

내용 분류	지도 내용
도함수의 기본 개념	<ul style="list-style-type: none"> ○ 순간속도, 평균속도(67) ○ 도함수의 역학적 의미(65) ○ 도함수의 기하학적 의미(67) □ 접선의 정의(67) □ 도함수의 정의(70) ○ 연속성의 원리(72) ○ 직선화(104)
도함수의 계산	<ul style="list-style-type: none"> ○ 일차함수($y=c$, $y=ax+b$)의 도함수(73) △ $y=ax^2$의 도함수(74) △ $y=x^3$의 도함수(74) △ $y=1/x$의 도함수(74) △ $y=\sqrt{x}$의 도함수(74) □ 합, 상수배, 곱, 몫의 미분법(75) ○ 거듭제곱의 도함수(78) □ $y=f(kx+b)$의 도함수(79) ○ 합성함수의 도함수(107) ○ 음함수의 도함수(107) ○ 삼각함수의 도함수(147) ○ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$의 근사식(149) ○ 지수함수의 도함수(190) ○ 로그함수의 도함수 ○ 근사식 $e^{h} \approx 1+h$, $\ln(1+h) \approx h$(197)
도함수를 이용한 함수의 탐구	<ul style="list-style-type: none"> ○ 단조구간(81) ○ 극점(81) □ 어떤 구간에서 $f=\text{const} \Leftrightarrow f'=0$(82) □ 함수의 단조성(81) □ 함수의 극값의 필요 충분 조건(83) ○ 특이점(85) ○ 함수의 임계점 구하는 알고리즘(87) ○ 극값 구하기(87) ○ 최대값, 최소값(87) ○ 그래프의 작도(88) ◇ 변곡점
도함수의 응용	<ul style="list-style-type: none"> ○ 속도와 가속도(92) ○ 곡선운동의 속도(93) □ 미분의 정의(95) ○ 일, 전하, 질량, 열(96) ○ 물리에서의 미분(96) ○ 최대값과 최소값 문제(98) ○ 근사값 공식(102) ○ 테일러 공식(106)

(주) ○...설명 □...정의 및 정리 △...예제 ◇...그림

<표-3> 러시아 교과서 적분의 지도 내용

내용 분류	지도 내용
적분의 기본 개념	<input type="radio"/> 적분의 문제(231) <input type="radio"/> 적분의 기하학적 의미(232) <input type="radio"/> 적분함수(233) <input type="radio"/> 체적 구하기(235) <input type="checkbox"/> 면적 증가속도에 관한 정리(236) <input type="radio"/> 적분 기호(237) <input type="radio"/> 적분의 정의(238) <input type="radio"/> 부정적분의 정의(239)
적분의 계산	<input type="radio"/> 부정적분의 성질(239) <input type="checkbox"/> $\int f(kx+b)dx = 1/k \cdot F(kx+b)$ (240) <input type="checkbox"/> 푸르트-라이프니츠의 정리(241) <input type="checkbox"/> 정적분의 성질(242) <input type="checkbox"/> 정적분의 선형성(242) <input type="checkbox"/> 정적분의 가산성(243) <input type="checkbox"/> 정적분의 부등식(243)
적분의 응용	<input type="radio"/> 두 곡선 사이의 넓이(244) <input type="radio"/> 입(248) <input type="radio"/> 위치변경(249) <input type="radio"/> 원질량(250) <input type="radio"/> 전하(250) <input type="radio"/> 미분방정식(253) <input type="radio"/> 미분방정식의 풀이(255) <input type="radio"/> 조화진동의 방정식(258) <input type="radio"/> 지수승의 방정식(257)

(주) ○...설명 □...정의 및 정리 △...예제 ◇...그림

B. 미적분 학습 내용 비교

1. 전반적인 특징 비교

1) 전학년 주당 수학 시수 비교

한국과 러시아의 수학에 대한 주당 시간과 전체 시간에 대한 백분율을 조사해 보면 <표-4> 와 같다.

<표-4> 한국과 러시아의 주당 수학 시수 비교

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
① 수 학 시 수	4 (120)	4 (136)	4 (136)	4 (136)	5 (170)	5 (170)	4 (136)	3-4 (102- 136)	4-5 (136- 170)	4 (136)	5 (170)	4 (136)	50-52 1684- 1752
② 총 시 수	24	25	28	30	32	32	34-36	34-36	34-36	36	36	36	381- 387
① ÷ ②	초등 총시수의 17%					중학교 총시수의 10%-12%		고등학교 총시수의 12%			전체의 13%		

러 시 아	③ 수 학 시 수	4 (136)	6 (216)	6 (216)	6 (216)	6 (216)	6 (216)	6 (216)	6 (216)	6 (216)	4/5 (153)	4 (136)	60.5 2053
	④ 중 등 시 수	20	22	24	24	30	30	30	30	31	31	31	303
	③ ÷ ④	초등(1-4)시수의 26% (784/3060)			불완전 중등교육(5-9)의 21% (1080/5134)				일반중등 교육의14% (289/2108)		전체의 20%		

주) 1. ()안의 수는 연간 총 시수를 나타냄
 2. 한국의 국민학교 1학년의 시수는 3월의 시수를 제외한 수치임

위의 <표-4>에 의하면 한국의 고등학교에서는 수학 과목이 전체 시수의 12% (자연과정), 중학교에서는 전체 시수의 10% ~ 12%, 초등교육에서는 전체 시수의 17%를 차지하고 있다. 12년동안 수학 과목에 배당되는 총 시간수는 전 수업 시간 (12년)의 약13%를 차지하고 있다.

러시아의 일반 중등 교육(10~11학년)에서는 전체 시수에 대한 수학 시수의 비율이 14%, 불완전 중등 교육(5~9학년)에서는 20%, 초등 교육(1~4학년)에서는 24%를 각각 차지하고 있다. 러시아의 의무 교육 11년 동안의 총 수학 시수는 전 시수의 20%를 차지하고 있어 한국의 12년간의 총 수학 시수보다는 비율이 약간 높은 편이다.

2) 미적분에 대한 시간 배당과 페이지 배당 비교

한국과 러시아의 수학Ⅱ(하)와 대수와 기초해석의 두 교과서 각각에 대하여 전체 시간과 미적분에 배당된 시간, 전체 페이지와 미적분에 배당된 페이지의 백분율을 구해보면 <표-5>와 같다.

<표-5> 미적분에 대한 시간 배당과 페이지 배당 비교

학 년	러 시 아			한 국	
	10학년	11학년	계	12학년	계
①전체 수학 시간	4/5 (153)	4 (136)	8.5 (289)	4 ~ 5 (136-170)	4 ~ 5 (136-170)
②전체 pages	127	222	349	288	288
③대수와 기초 해석의 시간	2/3 (85)	2 (68)	4.5 (153)		
④미적분의 pages	63 (미분)	39 (적분)	102	미분 73 적분 61	134
⑤미적분의 시간 배당	40시간	17시간	57시간	미분 42 적분 36	78시간
⑤÷①	26%	11%	37%	57%	57%

②÷④	18%	11%	29%	미분 25% 적분 21%	46%
행의 수	48행			25행	

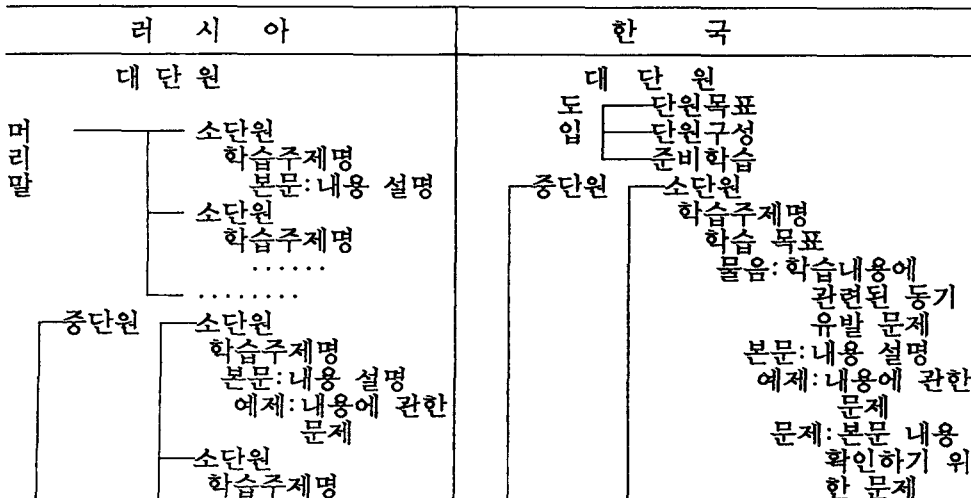
- 주) 1). () 안의 수는 연간 총 시간수를 나타냄
 2). 수학 II(상, 하)는 일반 수학을 이수한 자연 과정의 학생에게 주어지는 것으로 18단위를 기준으로 배당된다.
 3). 러시아에서는 복습과 문제 풀이를 위한 시간을 10학년과 11학년 말에 각각 13시간, 15시간씩 배당하고 있다. 따라서 미적분의 실제 지도 시간은 많은 경우 28시간이 더 늘어나는 셈이다. 그리고 함수단원에 포함된 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 미분을 고려하면, 페이지 수나 시간 배당면에서 표에서의 비율보다 높아진다.

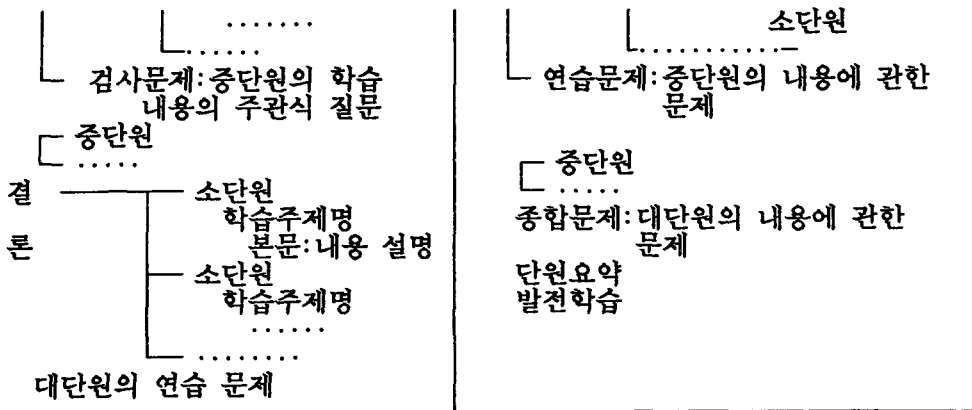
위의 <표-5>에 의하면 수학 시간에 대한 미적분 배당 시간의 비율이 한국과 러시아 교과서가 각각 37%와 57%이고 페이지 비율은 29%와 47%이다. 러시아 교과서에서 미분의 경우는 1시간에 배당되는 페이지가 1.6페이지(63pages, 40시간), 적분의 경우는 2.2페이지(39pages, 17시간)이고, 한국의 교과서에서 미분의 경우 1.7페이지(73pages, 42시간), 적분의 경우도 1.7 페이지(61pages, 36시간)가 배당된다(단, 러시아 교과서의 한 페이지당 행의 수는 48행, 한국 교과서는 25행이고, 각 단원의 연습문제는 한국에서 취급하고 있는 연습 문제 양의 두배 이상을 차지한다). 한 페이지당 행의 수를 고려하면 대수와 기초해석 교과서의 시간당 페이지 배당 비율이 수학II(하)의 두 배 이상을 차지한다고 할 수 있다.

3) 미적분 단원의 배열 순서의 특징 비교

- ① 한국 : 고등학교 3학년에서 미분법 단원과 적분법 단원을 지도하고 있다.
- ② 러시아 : 10학년에서 미분법, 11학년에서 적분법을 지도하고 있다. 미분법과 적분법 단원 사이에 있는 삼각함수, 지수와 로그함수 단원에서 삼각함수, 지수와 로그함수의 미분을 지도하고 있다.

4) 단원 체제의 비교



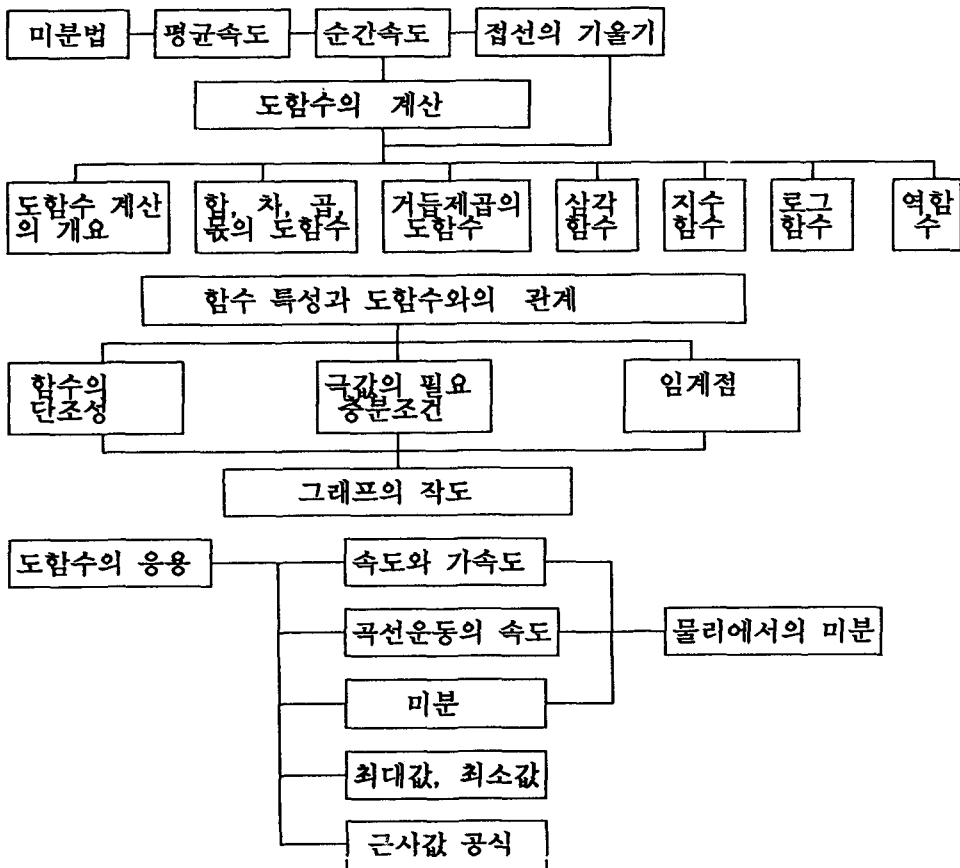


2. 학습 내용의 조직 및 계열성

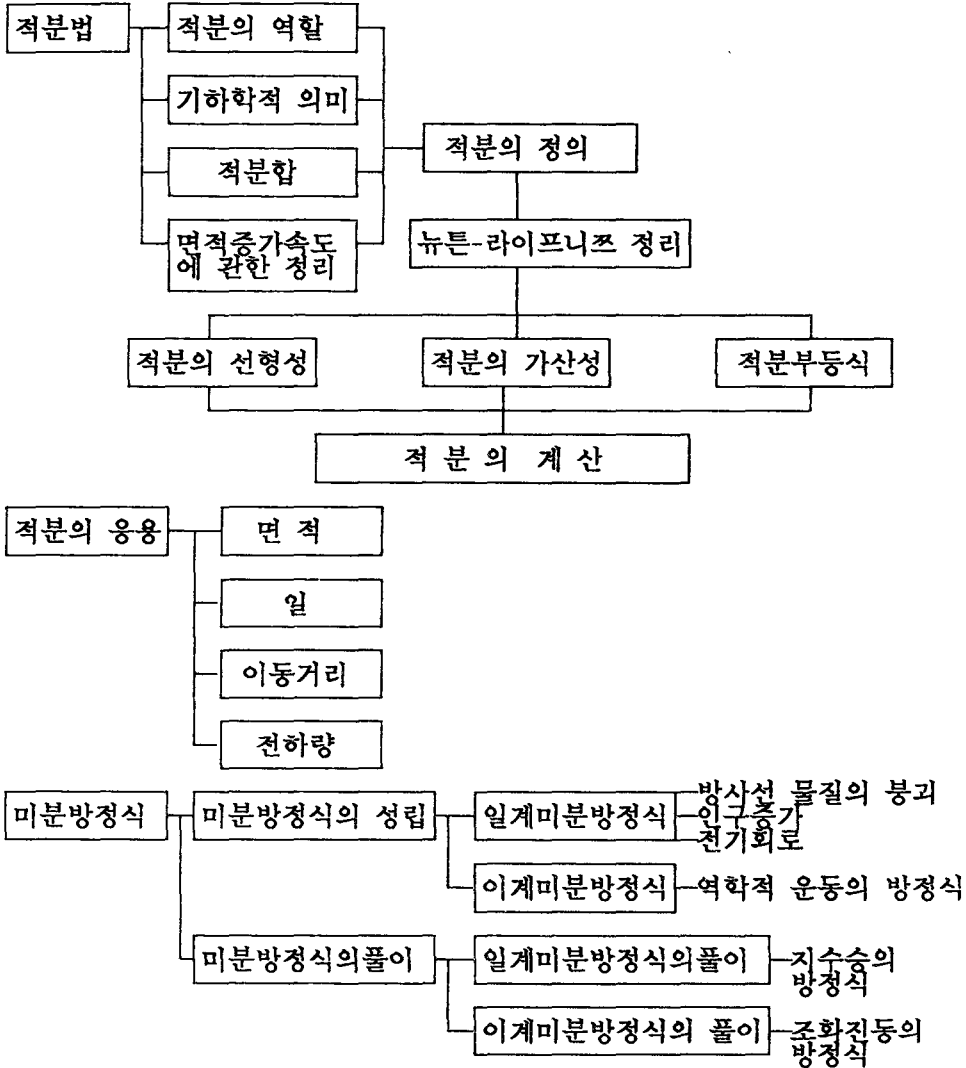
1) 단원 위계도

러시아의 미적분 단원의 위계도를 제시하면 <표-6>~<표-7>과 같다.

<표-6> 러시아의 미분법 단원 위계



<표-7> 러시아 적분법 단원의 위계



2) 목차 비교

미적분 단원에 대한 목차 비교는 다음 <표-8>, <표-9>와 같다.

<표-8> 미분법의 목차 비교

한 국	러 시 아
1. 미분법	2장 도함수와 그 활용
1) 미분계수	도입부분
평균변화율과 미분계수	1. 도함수의 역학적인 의미
평균변화율의 정의	2. 도함수의 기하학적 의미
미분계수(순간변화율)의 정의	3. 도함수의 정의
미분가능과 연속	4. 극한 변환
미분계수와 접선	본문부분

- | | |
|---|---|
| <p>미분계수와 접선의 기울기</p> <p>2) 도함수</p> <p>도함수의 정의</p> <p>3) 도함수의 계산</p> <p>4) 합성함수의 미분법</p> <p>5) 음함수의 미분법</p> <p>2. 여러가지 함수의 도함수</p> <p>1) 삼각함수의 도함수</p> <p>2) 지수함수의 도함수</p> <p>3) 로그함수의 도함수</p> <p>4) 이계도함수</p> <p>3. 도함수의 활용</p> <p>1) 접선의 방정식</p> <p>2) 평균값의 정리</p> <p>평균값의 정리</p> <p>3) 함수의 증가와 감소</p> <p>4) 함수의 극대와 극소</p> <p>5) 곡선의 오목, 볼록과 변곡점</p> <p>6) 함수의 그래프</p> <p>7) 함수의 최대와 최소</p> <p>8) 방정식과 부등식에의 응용</p> <p>9) 속도와 가속도</p> | <p>1. 도함수의 계산</p> <p>1) 도함수 계산의 개요</p> <p>2) 미분법</p> <p>3) 거듭제곱의 도함수</p> <p>4) 독립변수의 일차변환</p> <p>2. 도함수를 이용한 함수의 탐구</p> <p>1) 함수의 특성과 도함수의 관계</p> <p>2) 특이점</p> <p>3) 문제 풀이</p> <p>4) 함수 그래프의 작도</p> <p>3. 도함수의 응용</p> <p>1) 속도와 가속도</p> <p>2) 곡선 운동의 속도</p> <p>3) 미분</p> <p>4) 물리에서의 미분</p> <p>5) 최대값과 최소값 문제</p> <p>6) 근사값 공식</p> <p>결론부분</p> <p>1. 직선화</p> <p>2. 합성함수의 도함수</p> <p>3. 함수의 연속성</p> |
|---|---|

<표-9> 적분법의 목차 비교

한 국	러 시 아
<p>Ⅲ. 적분법</p> <p>1. 부정적분</p> <p>1) 부정적분</p> <p>2) 부정적분의 기본 공식</p> <p>3) 치환적분법</p> <p>4) 부분적분법</p> <p>연습 문제</p> <p>2. 정적분</p> <p>1) 구분구적법</p> <p>2) 정적분의 기본 정리</p> <p>3) 정적분의 계산</p> <p>4) 정적분의 치환적분법, 부분적분법</p> <p>5) 정적분과 극한값, 부등식</p> <p>연습 문제</p> <p>3. 정적분의 응용</p> <p>1) 넓이</p> <p>2) 부피</p> <p>3) 속도와 거리</p> <p>연습 문제</p> <p>종합 문제</p>	<p>2장 적분과 그 응용</p> <p>도입부분</p> <p>1. 적분의 역할</p> <p>2. 적분의 기하학적 의미</p> <p>3. 적분합</p> <p>4. 면적의 증가 속도</p> <p>5. 적분기호</p> <p>6. 결론, 검사문제</p> <p>본론부분</p> <p>1. 적분의 계산</p> <p>1) 적분</p> <p>2) 뉴턴-라이프니츠의 정리</p> <p>3) 적분의 성질</p> <p>검사문제</p> <p>2. 적분의 응용</p> <p>1) 면적</p> <p>2) 면적의 계산</p> <p>3) 일</p> <p>4) 위치변경</p> <p>5) 질량</p> <p>6) 전하량</p> <p>7) 응용문제 풀이</p> <p>검사문제</p> <p>결론부분</p> <p>1) 미분방정식의 성립</p> <p>2) 미분방정식의 풀이</p> <p>3) 지수승의 방정식</p> <p>4) 조화진동의 방정식</p>

3. 학습 내용의 범위 및 학습 지도 내용 비교

학습 내용의 취급 여부, 유사점, 상이점을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

(1) 미분 지도 내용 비교

1) 도입 부분

한국에서는 적은 경우 1페이지에서부터 많은 경우 3페이지까지 준비학습, 단원의 배경, 단원목표를 제시한 반면에, 러시아에서는 도함수의 개념을 도입함에 있어서 도입 부분이 7페이지를 차지하고 있으며 학생들에게 도함수에 대한 동기유발과 흥미를 제공하기 위해 물리학과 기타 실생활과 밀접한 예를 사용하여 도입하고 있다.

미분학의 원리들의 설명을 단순화 시키고 기본적인 결과들에 관한 이해를 더 쉽게 하기 위해 접선의 그래프적이고 기하학적인 표현과 미분의 물리적 의미에 강조를 두어야한다는 것이 그들의 주장이다.

도함수의 정의를 설명하기 위해 도함수의 역학적 의미와 기하학적 의미를 서술하고 있는데 구체적이고 시각적인 실례를 들면 다음과 같다(Башмаков, 1991).

(도함수의 기하학적 의미)

라이프니쯔는 접선을 긋는 문제를 풀면서 이 법칙에 접근했다. 접선을 긋는 방법을 명료하게 묘사하기위해서 다음과 같은 방법을 소개한다.

- ① 딱딱한 소재로 제작된 곡선(예를 들어, 쇠줄)에 주어진 점에서 자가 이 곡선에 접하도록 자를 놓는 것을 상상하여야 한다.
- ② 만약 종이에서 곡선 모양을 자른다면, 가위는 곡선의 경계에 접선 방향을 한다.
- ③ 곡선을 대단히 많은 수의 요소들로 이루어진 절선으로 간주할 것이다. 바로 이러한 관점에서 미분학이 창조되었다.
- ④ 로피탈은 접선의 정의를 「만약, 곡선을 이루는 절선의 작은 요소중의 하나를 연장 시키면, 이와같이 연장된 변은 곡선에 대한 접선이라고 부른다.
- ⑤ 현미경으로 곡선의 작은 부분을 살펴보자. 그림에 점 M 근처에서 똑같은 포물선의 부분들이 서로 다른 축척으로 제시되어 있다. 첫번째 그래프에서 포물선이 굽어진 것을 명백히 볼 수 있고, 두번째 예에서 이 굽은 것을 거의 알아볼 수가 없고, 세번째 예에서 포물선은 점 M에서 이 포물선의 접선인 직선의 선분과 거의 구분하지 못한다.

위에서 제시한 사례에서처럼, 러시아에서는 도함수를 정의하기 위해 먼저 시각적이고 직관적이며 현실적인 접근 방법을 다양하게 제시하여 학생들에게 동기를 유발 시킨후 극한을 도입하여 함수의 접선의 기울기를 역학에서 속도를 정의할 때와 같이 정의하였다.

2) 도함수의 기본 개념

도함수의 학습 내용 전개에 기초로서 러시아 교과서에서는 뉴턴과 라이프니츠에 의해 만들어진 기하학적이고 역학적인 개념들을 사용하고 있다.

미분의 기본 개념에 관한 학습내용

학 습 주 제	러 시 아	한 국
평균변화율(평균속도)	0	0
순간변화율(순간속도)	0	0
미분가능과 연속	0	0
접선의 정의	0	0
도함수의 정의	0	0
미분계수와 접선의 기울기	0	0
계	6	6

3) 도함수의 계산

러시아에서 독특하게 내용을 배열하고 있는 것 중의 하나가 바로 도함수의 계산 부분이다. 한국에서는 고등학교 1학년 일반수학에서 삼각함수, 지수함수, 로그함수를 먼저 학습한 후에 이들 함수의 미분법을 2년 후인 고등학교 3학년에서 다루고 있는 반면, 러시아에서는 11학년의 미분 단원에 이어서 삼각함수, 지수함수, 로그함수 단원이 있고 각 단원의 끝에서 이들 함수의 미분법을 동시에 학습하도록 배열하고 있다.

도함수 계산의 학습 내용

학 습 주 제	러 시 아	한 국
$y=c$ 의 도함수	0	0
$y=x^n$ 의 도함수	0	0
실수배, 합, 차, 곱, 몫의 도함수	0	0
합성함수의 미분법	0	0
음함수의 미분법	0	0
삼각함수의 도함수	0	0
지수함수의 도함수	0	0
로그함수의 도함수	0	0
역함수의 도함수	0	x
이계도함수	x	0
$\sin x, \cos x, \tan x$ 의 근사식	0	x
$e^h, \ln(1+h)$ 의 근사식	0	x
계	12	9

한국 교과서에서는 극값을 판정하거나 변곡점을 구할 때 이계도함수를 이용하지만 러시아 교과서에서는 이계도함수의 용어의 정의만 간단히 다루고 있다. 두 나라에서 공통적으로 다루어지고 있는 내용들 중 증명법을 달리하고 있는 증명을 살펴보면 다음과 같다.

① $y=x^n$ 의 도함수

(러시아)

유리수인 임의의 거듭제곱의 도함수는 곱의 미분 공식을 이용하여 얻어진다. 예를 들어, $y=x^4$ 의 도함수를 구하기 위해 x^4 을 $x^3 \cdot x$ 로 놓자. 함수 $y=x^3$ 과 $y=x$ 의 도함수를 알고, 곱의 도함수를 계산하자. $(x^4)'=(x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)'=4x^3$. $(x^n)'=nx^{n-1}$. 여기서 n 은 0을 제외한 모든 정수이다. 유도한 공식은 분수 지수에 대해서도 성립한다. 이미 우리가 알고 있는 $y'=(\sqrt{x})'$ 는 공식에 따라

$$y' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} \text{을 얻는다(p. 78~p. 79).}$$

(한국)

지수가 양의 정수일때는 도함수의 정의에 의한 증명 방법을 사용하였고 음의

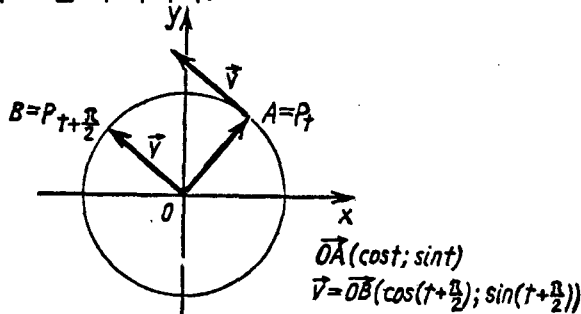
정수일때는 몫의 미분법으로, 유리수 지수인 경우는 합성함수의 미분법으로 증명하고 있다.

$y=c$, 합, 차의 도함수의 증명법은 양국이 공통적이었다.

② 삼각함수의 도함수

한국 교과서에서는 도함수의 정의와 선행학습한 삼각함수의 성질을 써서 논리적이고 형식적인 증명을 제시하고 있다. 러시아에서는 미분 단원에 삼각함수의 도함수를 다루지않고 삼각함수 단원에서 다루고 있어 우리나라 교과서와 배열 방식에서 차이를 보이고 있으며 다음과 같이 증명하고 있다.

점 A가 일정한 속도로 중심이 원점이고 반지름이 1인 원주를 움직인다고 하자. 시간 t에서 점 A의 좌표는 $(\cos t, \sin t)$ 이다. 시간 t에서 순간 속도 벡터는 점 A에서 원주의 접선 방향이고, 벡터 V와 벡터 OA는 수직이다.



\vec{V} 의 좌표를 계산하자. 점 O로 부터 \vec{V} 를 표시하면 좌표가 \vec{V} 와 같은 벡터 OB를 얻는다. 점 A가 원주를 따라 일정한 속도로 운동을 하므로 \vec{V} 의 길이는 1이고 결국 점 B는 원주위에 있다. \vec{OB} 는 \vec{OA} 에 수직이고, 만약 $A=P_t$ 이면 $B=P_{t+\pi/2}$ 이다. $\vec{V}=\vec{OB}$ 의 좌표는 다음과 같다. $\cos(\pi/2+t)=-\sin t$, $\sin(\pi/2+t)=\cos t$. 한편으로 \vec{V} 의 좌표는 점A의 도함수이다. 즉, $(\cos t)'=-\sin t$, $(\sin t)'=\cos t$ (p.147).

③ 지수함수의 도함수

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$$

와 도함수의 정의를 이용하여 지수함수의 도함수를 구하는 한국 교과서와는 달리 러시아 교과서는 기하학적으로 서술하고 있다. (Башнаков, 1991).

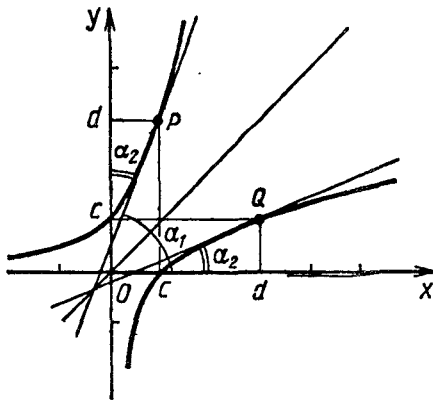
④ 로그함수의 도함수

한국 교과서에서는 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e$ 와 도함수의 정의를 이용하여 로그함수의

도함수를 구하였으며, 로그 미분법을 이용하여 「임의의 실수 n 에 대하여 $y=x^n$ 의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$ 」이 성립함도 증명하였다.

한국 교과서에서는 $(a^x)' = (\ln a)a^x$ 임을 지수함수의 도함수에서 증명하였으나 러시아 교과서에서는 로그함수의 도함수에서 다음과 같이 전개하고 있다(Башмаков, 1991).

직선 $y=x$ 에 대칭인 두 함수 $y=e^x$ 와 $y=\ln x$ 를 살펴보자. $y=e^x$ 의 그래프에서 점 $P(c, d)$ 를 선택한다(즉, $d=e^c$). 이것은 $y=\ln x$ 의 그래프의 점 $Q(d, c)$ 와 대칭이다(즉, $c=\ln d$). 이 점에서 각 그래프에 대한 접선도 또한 대칭이다.



$y=e^x$ 의 그래프에 대한 접선의 기울기 $K_1=e^c$ 이다. α_1 과 α_2 를 접선과 x 축이 이루는 각이라고 한다. 그림에서 $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ 라는 것을 알 수 있다. $K_1 = \tan \alpha_1 = e^c$ 이므로 $K_2 = \tan \alpha_2 = \tan(\pi/2 - \alpha_1) = \cot \alpha_1 = 1/K_1 = 1/e^c = 1/d$ 이다. 이와 같이, $x=d$ 에서 함수 $y=\ln x$ 의 도함수는 $1/d$ 이다. 즉, $(\ln x)' = 1/x$.

$\ln_a x = \ln x / \ln a$ 이므로, $(\ln_a x)' = 1/(x \cdot \ln a)$ 이다.

지수 함수의 도함수 공식에 따라 $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = K \cdot a^x$.

이때

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

이다.

$e^{\ln a} = a$, $a^x = e^{kx}$ 이므로 이때 $K = \ln a$ 이다.

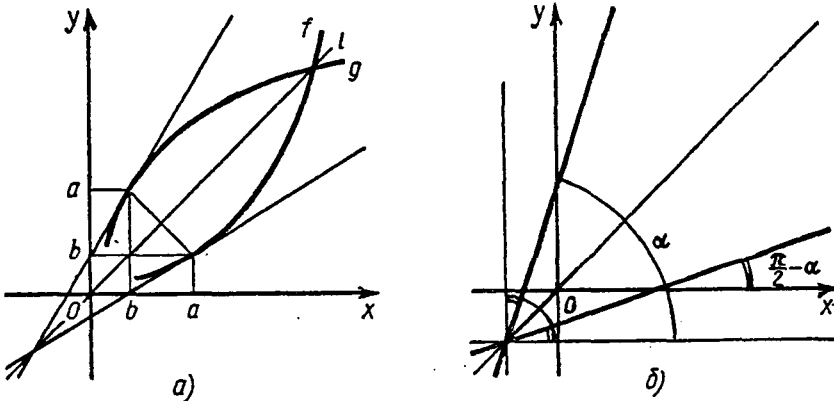
그러므로 $(a^x)' = K \cdot e^{kx} = K \cdot a^x$, 즉, $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$ (p.196~p.197).

⑤ 역함수의 도함수

역함수의 도함수와 근사식에 관한 내용은 러시아 교과서에만 있다.

한국에서는 고등학교 1학년의 일반 수학에서 역함수의 정의와 성질 그리고 그 그래프를 지도하고 있으나 3학년의 미적분 단원에서 역함수의 미분법은 다루지 않고 있다. 러시아에서는 역함수의 도함수를 학습하기 바로 전에 역함수의 존재 조건과 서로가 서로의 역함수가 되는 함수들의 성질, 역함수의 단조성등을 학습한 후에, 이어서 역함수의 도함수가 지도되고 있다. 러시아 교과서에서만 취급하고 있는 역함수의 도함수의 내용 전개를 살펴보면 다음과 같다(Башмаков, 1991).

함수 f 와 g 를 서로 역함수라 하자. 함수 f 의 도함수를 안다면 어떻게 함수 g 의 도함수를 구할 수 있는가?. 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 $\angle XOY$ 의 이등분선 l 에 대하여 서로 대칭이다.



임의의 점 $x=a$ 를 선택하면 $f(a)=b$, $g(b)=a$. 점 $(a, f(a))=(a, b)$ 와 $(b, g(b))=(b, a)$ 는 제시된 직선 l 에 대하여 대칭이다. 곡선들이 대칭이므로, 이 곡선에 대한 접선들은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 대칭으로 부터, 이 직선들 중 하나와 x 축과의 각은 다른 직선의 y 축과의 각과 같다는 것이 명백하다. 첫번째 직선이 x 축과 각 α 를 이루면 이 직선의 기울기 $K_1=\tan\alpha$ 이고 이때 두번째 직선의 기울기는 $K_2=\tan(\pi/2-\alpha)=\cot\alpha=1/K_1$ ($K_1 \neq 0$, 즉, 곡선에 대한 접선은 좌표축과 평행하지는 않다). 이와같이 직선에 대하여 대칭인 직선들의 기울기는 서로 역수이다. 즉, $K_2=1/K_1$ 또는 $K_1 \cdot K_2=1$.

서로 역함수인 도함수 값은 대응하는 점에서 서로 역수이다: $g'(b)=1/f'(a)=1/f'(g(b))$ (p. 214~p. 215).

도함수의 계산의 학습 내용 중 두 교과서의 유사점 및 상이점은 다음과 같다.

① 한국과 러시아 교과서 모두 이계도함수의 용어의 정의가 있으나 한국은 이계도함수 뿐만 아니라 n 계 도함수까지 정의를 하였다. 한국교과서에서는 이계도함수의 소단원이 있는 교과서도 있으나 러시아 교과서에서는 이계도함수를 포함

수의 응용 부분의 서술 과정에서만 간단하게 다루고 있다.

② $y=x^n$ 의 도함수를 증명하는 데 있어서 한국 교과서는 지수가 양의 정수, 음의 정수, 유리수, 실수로 확장될 때마다 도함수의 정의와 미분법의 공식을 써서 논리적으로 증명하고 있다. 반면에 러시아 교과서는 귀납적이고 직관적인 방법으로 증명하고 있다.

③ 몫의 도함수를 한국의 교과서는 도함수의 정의에 따라 증명하고 있고 러시아 교과서는 정리에서 선행학습한 곱의 미분법을 이용하여 증명하였다.

④ 한국 교과서에서는 도함수의 정의와 선행 학습한 삼각함수의 성질을 써서 논리적이고 형식적인 증명을 제시하고 있다. 러시아에서는 미분 단원에 삼각함수의 도함수가 있지않고 삼각함수 단원에 있어 우리나라 교과서와 배열 방식에서 큰 차이를 보이고 있다. 내용 전개면에 있어서도 한국 교과서는 삼각함수에 관한 공식과 도함수의 정의를 이용하고 있고, 러시아 교과서에서는 순간속도 벡터를 이용하여 기하학적으로 증명을 하고 있어서 특이하다.

⑤ 한국교과서는 지수함수의 도함수를 증명하는 데 있어서

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$$

와 도함수의 정의를 이용하였고, 러시아 교과서는 지수함수의 평균 증가 속도를 이용하여 기하학적으로 접근하였다. e 의 값도 한국 교과서에서는 극한부분에서 먼저 학습한 후 지수함수 단원에서 이를 이용하고 있으나 러시아 교과서에서는 지수함수의 도함수를 증명하는 과정에서 다루어지며 e 의 정의도 기하학적 방법으로 설명하고 있다.

⑥ 로그함수의 미분법에서 한국 교과서에서는 e 의 정의를 이용하여 로그함수의 도함수를 구하였으나 러시아 교과서에서는 직선 $y=x$ 에 대칭인 두 함수 $y=e^x$ 와 $y=\ln x$ 의 한 점에서의 두 직선의 기울기를 이용하여 기하학적으로 증명을 하고 있다.

⑦ 역함수의 도함수와 근사식에 관한 내용은 러시아 교과서에만 있었고 0근처에서 $\sin t \approx t$, $x=0$ 일때, $\tan t \approx t$, $x=0$ 에서 $\cos x \approx 1$, $e^h \approx 1+h$, 그리고 $\ln(1+h) \approx h$ 임을 다루고 있다.

러시아 교과서에서만 취급하고 있는 역함수의 도함수는 서로 역함수인 f 와 g 의 대응하는 점에서 접선을 그어 기하학적으로 증명하고 있다.

4) 도함수를 이용한 함수의 탐구

러시아 교과서에서는 도함수를 운동의 속도로서 설명하여 함수의 특성과 도함수의 특성사이의 관계를 설명하고 있다. 함수 탐구 규칙의 증명 방법은 뉴턴과 라이프니츠에 의해 창조된 생각들인, 기하학적이고 역학적인 생각들이 공리의 역할을 하고 있다. 한국 교과서에는 러시아 교과서보다 정의와 정리가 많고, 러시

이 교과서에서는 최소한의 정의와 역학적 모형을 이용하여 함수 특성을 다루고 있다.

함수의 탐구에 관한 학습 내용

학 습 주 제	러 시 아	한 국
접선의 방정식	0	0
롤의 정리	x	0
평균치정리	x	0
어떤 구간에서 $f = c \leftrightarrow f' = 0$	0	0
함수의 증가와 감소	0	0
함수의 극값의 필요조건	0	0
함수의 극값의 충분조건	0	0
극값구하기	0	0
이계도함수를 이용한 극값구하기	x	0
최대값, 최소값구하기	0	0
그래프의 개형	0	0
계	8	11

러시아 교과서에서는 함수와 함수 특성에 대한 역학적 설명을 위해 다음 표를 사용하고 있다.

	표 시	개 념 또는 특 성	역 학 적 인 해 석
1	x	독 립 변 수	시 간
2	y	종 속 변 수	물체의 위치, 그것의 좌표
3	$y=f(x)$	변수들사이의 관계, 함수	점 P의 운동 규칙, 시간에 대한 점 P의 좌표의 관계
4	$y=c$	상 수 함수	점 P가 좌표가 일정한 점에 위치해 있다
5	$y'=f'(x)$	도 함수	순간속도
6	$f \nearrow$	함수가 증가한다	점 P가 y축을 따라 양의 방향으로 이동한다
7	$f \searrow$	함수가 감소한다	점 P가 y축을 따라 음의 방향으로 이동한다
8	$x=x_0$ 에서 $\max y$ ($\min y$)	$x = x_0$ 에서 함수가 극대값(극소값)을 갖는다	(시간 x_0 근처에서의 위치와 비교하여) 점 P가 가장 위의 (아래의) 위치를 나타낸다
9	$y'=0$	도함수가 0이다	점 P가 정지해 있다(그것의 속도가 0이다)
10	$y'>0$	도함수가 양수이다	점 P의 속도가 양수이다(점 P가 양의 방향으로 움직인다)
11	$y'<0$	도함수가 음수이다	점 P의 속도가 음수이다(점 P가 음의 방향으로 움직인다)

러시아 교과서에서는 정리 「어떤 구간에서 $f=c \Leftrightarrow f'=0$ 」를 증명할때, (\Rightarrow)의 증명은 도함수의 정의를 사용하여 한국 교과서와 같이 증명하고 있고 (\Leftarrow)의 증명은 평균치 정리를 이용하는 한국과는 달리 위의 표를 이용하여 역학적으로 다음과 같이 간단하게 증명하고 있다.

정리. (함수의 불변성)

만약 어떤 구간에서 도함수가 항등적으로 0이면, 이 함수는 이 구간에서 상수함수이다.

증명. 주어진 함수 $y=f(x)$ 를 y축을 따라 점 P의 운동 법칙으로 이해할 것이다(표의 3번). 만약 도함수가 0이면 점 P는 정지한다(9번). 만약, 모든 시간에서 도함수가 0이면 점 P는 항상 같은 자리에 있게 되고 이때 함수 y는 상수이다(4번).

도함수를 이용한 함수의 탐구 부분에 대한 두 교과서의 지도 내용의 유사점, 상이점 등은 다음과 같다.

① 러시아 교과서에서는 도함수를 역학적으로 운동의 속도로서 설명하여 함수의 특성과 도함수의 특성사이의 관계를 설명하고 있고 한국 교과서는 도함수의 정의나 평균값의 정리등을 사용하고 있다.

② 극값을 구하는 문제에서는 한국의 교과서는 일계도함수, 이계도함수를 각각 이용하여 극값을 판정하는 내용이 있으나 러시아 교과서에서는 일계도함수만으로 극값을 구하고 있다.

③ 러시아에서는 함수의 증감, 도함수가 0이면 상수함수임을 평균값의 정리를 이용하여 증명한 한국과는 달리 역학적 모형을 사용하여 간단히 증명하고 있다.

5) 도함수의 활용

러시아에서는 교육과정의 조직에서 기계학, 광학, 전기역학, 화학으로 부터의 다양한 개념이 도입되어야 하고 실제적인 문제들이 배치되어야 한다고 권고하고 있기 때문에 미적분의 지도 내용에는 일, 전하, 질량, 열, 물리에서의 미분과 같은 물리와 다른 교과와의 연계성이 있는 내용이 많다. 이외에 러시아 교과서에만 있는 내용으로 근사값 공식과 테일러 공식이 있다. 한국에서는 러시아에서처럼 물리의 내용은 취급하지않는 반면 3차 방정식을 풀고 부등식을 증명하는 문제를 다루고 있다.

도함수의 활용의 내용

학 습 주 제	러 시 아	한 국
방정식, 부등식에의 응용	x	o
속도와 가속도	o	o
일, 전하, 질량, 열	o	x
최대값과 최소값 문제	o	o
근사값 공식	o	x
테일러 공식	o	x
계	5	3

러시아 교과서에서는 한국 교과서와는 달리 물리에서 잘 알려진 것들을 이용하여 수학적 관점에서 역학적인 개념을 설명하는 다음 표를 제시하고 있다.

역학적인 측면에서의 개념	표식과 식	수학적인 측면에서의 개념
시간	t	독립변수
점의 위치, 좌표	x	종속변수
운동 법칙	$x=f(t)$	함수
시간의 증분	$\Delta t=t_2-t_1$	독립변수의 증분
이동	$\Delta x=x(t_2)-x(t_1)$	함수의 증분
평균 속도	$v=\Delta x/\Delta t$	함수의 증분과 인수의 증분의 비
순간 속도	$v(t)=x'(t)$	도함수
등속운동의 기술 법칙	$\Delta x/\Delta t=v=\text{일정}$ $x-x_0=v(t-t_0)$	일차함수
등속운동의 속도	$v=x'=k$	직선의 기울기인 t 의 계수
등가속운동의 기술 법칙	$\Delta v/\Delta t=a=\text{일정}$ $x=at^2+v_0t+x_0$	이차함수
등가속운동의 속도	$v=x'=at+v_0$	일차함수
등가속운동의 가속도	$a=v'$	t^2 에 대한 이계도함수의 계수

러시아 교과서에서 특이하게 도함수의 응용 부분으로 취급하고 있는 물리에서의 미분에 대한 내용을 살펴보면 다음과 같다.

1) 일

x 축의 선분을 따라 이동할때 주어진 힘 F 에 의해 수행된 일은 힘 F 가 일정하다면, 일 A 는 힘 F 에 움직인 거리를 곱한 것이다. 만약 힘이 변화되면, 이것은 x 에 대한 함수로 생각할 수 있다. 즉, $F=F(x)$. 구간 $[x, x+dx]$ 에서 일의 증분 ΔA 는 힘이 이 구간에서 변화되기 때문에 곱은 $F(x)dx$ 로서 정확하게 계산될 수 없다. 그러나, 작은 dx 에 대하여, 힘은 적게 변하고 곱은 증분 ΔA 로 놓을 수 있다. 즉, $dA=F(x)dx$

2) 전하

q 를 시간 t 동안 도체의 횡단면을 따라 전류에 흐르는 전하라고 하자. 만약, 전류 I 가 일정하다면 전류는 $I(t)dt$ 인 전하를 운반한다. 만약, 전력이 시간에 따라 어떤 법칙에 따라 변화된다면, 곱 $I(t)dt$

는 작은 구간 $[t, t+dt]$ 에서 전하의 증분이 된다. 즉, 전하의 미분이 된다: $dq=i(t)dt$. 시간에 대한 전하의 도함수가 전력이 된다.

3) 질량

얇은 축이 있다고 하자. 좌표를 도입하면 함수 $m=m(l)$ 을 생각할 수 있다. 이질성은 이것의 밀도가 일정하지 않고, 점 l 의 위치에 따라 어떤 법칙 $\rho=\rho(l)$ 에 종속한다는 것을 나타낸다. 만약, 축의 작은 부분 $[l, l+dL]$ 에서 밀도가 일정하다고 간주할 수 있다면 $dm=\rho(l)dL$ 을 제공해 준다. 이것은 밀도가 길이에 대한 질량의 미분이라는 것을 나타낸다.

4) 열

어떤 물질을 가열하는 과정을 생각해 보고, 이 물질 1 Kg을 0°C 에서 $T^{\circ}\text{C}$ 까지 데우는 데 필요한 열량 $Q(T)$ 를 계산할 것이다. 관계 $Q=Q(T)$ 는 대단히 복잡하고, 실험에 의해서 정의된다. 만약 주어진 물질의 비열이 온도에 의존하지 않는다면, $\int C dT$ 는 열량의 변화를 나타낸다. 작은 구간 $[T, T+dT]$ 에서 비열이 일정하다고 간주한다면, 우리는 열의 미분 $dQ=C(T)dT$ 를 얻는다. 따라서 열용량은 온도에 대한 열의 도함수이다.

5) 시간의 함수로서의 일

일정한 일을 N 으로 일을 할 때, 시간 dt 동안의 일은 Ndt 이다. 이 식은 일의 미분 $dA=N(t)dt$ 임을 나타낸다. 즉, 일률은 시간에 대한 일의 도함수이다.

이들 예에서 세가지 양들 중의 하나는 다른 두 양 사이의 비례 관계에서 계수가 된다. 즉, $dy=K(x)dx$. 그러한 관계에서 $K(x)$ 는 x 에 대한 y 의 도함수로 정의된다.

도함수의 활용 부분에서의 두 교과서의 지도 내용의 유사점과 상이점은 다음과 같다.

① 러시아 교과서에는 전하량, 질량, 열, 물리에서의 미분등 다른 교과와의 연계성이 다른 부분보다 많이 고려되고 있으나, 한국 교과서에서는 속도와 가속도를 미분법에 의하여 구하는 방법에 중점을 두고 있다.

② 한국 교과서에서는 도함수를 방정식과 부등식을 푸는 데 응용하는 기회를 제공하기 위해 「방정식과 부등식에의 응용」이라는 하나의 소단원을 배정하고 있으나, 러시아 교과서에서는 취급하지 않았다.

③ 러시아의 교과서에는 도함수를 이용하여 함수의 값을 근사적으로 계산할 수 있는 「근사값 공식」

$$y \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

을 설명한 다음 이를 이용한 계산 문제를 제시하고 있으나 한국의 교과서는 하나의 교과서(웅진, p. 98~99)에서만 간단히 일차근사식을 언급하고 있다. 그리고 러시아 교과서에서는 결론 부분에서 테일러 공식과 그것을 이용하여 근사값을 구하는 문제도 다루고 있다.

(2) 적분 지도 내용

적분은 한국과 러시아 두 나라 모두가 각각 중등 교육의 마지막 학년인 자연과정 3학년과 11학년에 지도되고 있다.

1) 도입부분

적분 단원의 도입 부분 역시 미분 단원에서와 같이 러시아 교과서에서는 적분의 역할, 적분의 기하학적 의미, 적분합, 면적 증가속도, 적분기호 등의 내용으로 8페이지를 담당하고 있다.

러시아 교과서의 도입부분은 1)적분의 임무 2) 적분의 기하학적 의미 3) 적분합 4)면적의 증가속도 5) 적분 기호 6) 결론 7) 검사문제로 되어있고 내용 전개에 있어서도 적분의 학습에 필요한 기본적인 개념을 서술식으로 자세하게 설명해 나가고 있다.

러시아 교과서에서는 또한 학생들에게 적분에 대한 흥미를 갖도록 하기 위해서 미분에서와 마찬가지로 물리학과 관련된 예를 많이 도입하고 있다.

2)적분의 기본 개념

적분의 기본 개념에 대한 학습 내용

학 습 주 제	러 시 아	한 국
부정적분의 정의	0	0
정적분의 정의	0	0
적분의 기하학적 의미	0	0
적분 기호	0	0
적분과 미분과의 관계	0	0
정적분과 부정적분과의 관계	0	0
구분구적법(적분합)	0	0
부정적분의 성질	0	0
정적분의 기본 정리	0	0
정적분의 성질	0	0
계	10	10

3) 적분의 계산

교과서의 내용 구성과 전개에 있어서 러시아 교과서와 한국 교과서의 차이가 가장 두드러지게 나타나고 있는 부분이다. 러시아 교과서는 일단 적분의 기본 개념을 충실히 다룬 다음 미분의 역연산에 의해 구한 간단한 적분표를 제시하였다.

한국 교과서는 각 학습 주제마다 미분 공식에 의해 적분 공식을 설명한 후에 예제와 문제를 많이 배당하여 적분 계산 능력을 숙달 시키기 위한 내용으로 짜여져 있다.

러시아 교과서에는 본문 중에는 문제가 많지 않고 계산 능력의 숙달 보다는 설명하고 있는 원리의 의미를 파악하는 데 도움이 되는 간단한 예제들만 다루고 있다.

적분 계산의 학습 내용

학 습 주 제	러 시 아	한 국
x^n 의 부정적분	0	0
$1/x$ 의 부정적분	0	0
삼각함수의 부정적분	0	0
지수함수의 부정적분	0	0
치환적분법	x	0
우함수, 기함수의 정적분	x	0
부분적분법	x	0
정적분과 극한값	x	0
정적분의 가산성	0	0
정적분의 부등식	0	0
계	6	10

삼각함수에 관한 적분은 두 교과서가 공통적으로 다루기는 하지만 한국의 교과서는 삼각함수에 관한 공식과 치환적분법을 이용하여 복잡한 형태의 삼각함수의 부정적분도 다루고 있다. 또한,

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)$$

의 증명 문제는 러시아 교과서에서는 정리로 취급하여 다음과 같이 간단히 증명하였다.

$$\text{증명. } F \text{가 } f \text{의 적분일때, } \int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b).$$

$$\text{증명. } F(kx+b) \text{의 미분을 계산하면, } F(kx+b)' = kF(kx+b)' = kf(kx+b).$$

적분의 계산 부분에서 러시아 교과서와 한국 교과서의 학습지도 내용 및 범위 등을 비교하면 다음과 같다.

① 교과서의 내용 구성과 전개에 있어서 러시아 교과서와 한국 교과서의 차이가 많이 나타나고 있는 부분이다. 러시아 교과서는 일단 적분 계산의 원리를 다룬 다음 미분의 역연산에 의해 일관되게 적분을 계산하고있으며, 교과서의 본문 중에는 문제가 많지 않고 계산 능력의 숙달 보다는 설명하고 있는 원리의 의미를 파악하는 데 도움이 되는 간단한 예제들만 다루고 있다.

② 삼각함수에 관한 적분도 한국 교과서와 러시아 교과서가 공통적으로 다루기는 하지만 한국의 교과서는 삼각함수에 관한 공식과 치환적분법을 이용하여 복잡한 형태의 삼각함수의 부정적분을 다루는 반면, 러시아 교과서에서는 아주 기본적인 삼각함수의 부정적분인 $\sin x, \cos x, (\sin \omega x + \alpha), (\cos \omega x + \alpha)$ 의 적분이 있다.

4) 적분의 응용

이 부분에서는 러시아 교과서의 학습 내용이 한국 교과서보다 많을 뿐만 아니라 물리의 내용이 많고 끝부분에는 간단한 미분방정식까지 다루고 있으며, 적분의 개념을 확실히 하여 일상 생활에 적용할 수 있는 문제를 많이 배당하고 있다.

적분 응용의 학습 내용

학 습 주 제	러 시 아	한 국
곡선과 x,y 축으로 싸인 도형의 넓이	0	0
두 곡선 사이의 넓이	0	0
일반 입체의 부피	0	0
회전체의 부피	x	0
운동거리	0	0
일	0	x
질량	0	x
전하	0	x
미분방정식	0	x
미분방정식의 풀이	0	x
조화진동의 방정식	0	x
지수승의 방정식	0	x
계	11	5

러시아 교과서에서 어떤 값이 적분의 계산으로 산출 될 수 있는 자연 현상을

미분방정식으로 나타내는 문제들을 많이 다루고 있는데, 실례를 들어보면 다음과 같다.

1) 일

물체를 어떤 힘 $F=F(x)$ 이 작용하는 x 축을 따라 움직이게 하자. 좌표 a 에서 b 로의 위치변경시 행해지는 일을 산출해 보자. 좌표 x 와 $x+dx$ 의 조그만 조각에서 힘은 불변이며, $F(x)$ 로 동일하다고 간주할 수 있다. 그러면 일의 미분은 이렇게 쓸 수 있다 : $dA=F(x)dx$. 여기서 $[a, b]$ 에서의 모든 일은 적분식으로 쓸 수 있다 :

$$A = \int_{x_2}^{x_1} F(x)dx.$$

2) 운동거리

점이 x 축을 따라 움직인다고 하자. 이 점의 속도를 안다고 가정 하자. 축에서 점의 위치는 $x=x(t)$ 로 간주할 것이다. 시간 $[t_1, t_2]$ 의 간격 동안에 점의 운동거리는 어떻게 찾을 수 있는가?. 만약, 점의 속도가 불변이고, v 가 동일하다면, 운동거리 $s=v(t_2-t_1)$ 가 될 것이다. 시간 $[t, t+dt]$ 에서 속도가 불변이고 동일하다고

간주한다면 $ds=v(t)dt$ 가 된다. 여기서 $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ 를 구할 수 있다

3) 질량

임의의 물체의 질량은 복잡한 적분을 필요로 하는 값이다. 만약, 축의 조각이 동일하다면, 질량은 길이 l 에 비례한다. 즉, $m=\rho dl$. ρ 는 선의 밀도라고 불리는 비례계수이다. 밀도 ρ 가 어떻게 변하는지 안다면, $\rho=\rho(x)$ 로 간주할 수 있다. $[x, x+dx]$ 에서 밀도를 변화지 않는다고 하면, $dm=\rho(x)dx$ 를 구한다.

여기서

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$$

이다.

4) 전하

전선의 절단면을 통해 시간 $[a, b]$ 간격 동안 이동하는 전하량 q 를 어떻게 계산할까?. 만약, 전류 I 의 힘이 시간에 따라 변하지 않는다면 전하량 q 의 변화는 누적 $I(b-a)$ 와 동등할 것이다. 변화의 규칙, $I=I(t)$ 가 주어지게 하자. 시간 $[t, t+dt]$ 의 조그만 간격 동안에, 불변의 동일한 $I(t)$ 로서 전류의 세기를 구할 수 있다. 그런데,

$dq=I(t)dt$ 이고 따라서

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

이다.

또, 러시아에서만 지도되는 내용으로 미분 방정식과 미분 방정식의 풀이, 조화진동의 방정식, 지수승의 방정식이 있으나 실생활과 다른교과에서 미분 방정식이 성립되는 경우에 대한 예제와 그에 대한 미분 방정식의 풀이만 다음과 같이 간단히 다루고 있다.

1) 기계적 운동의 방정식

뉴턴의 제 2법칙 $ma=F$ 에서 가속도 a 를 2차미분한 것으로 쓴다면, 미분 방정식으로 간주할 수 있다. $a=d^2x/dt^2=x''$. 방정식 $mx''=F$ 를 기계적 운동의 방정식이라 한다. 이 방정식에서 $x=x(t)$ 는 미지의 함수, m 과 F 는 알려진 수치들이다. 물리적 조건에 의하여 힘 F 는 다양하게 주어지고, 우리는 다양한 미분 방정식을 얻을 수 있다.

2) 방사선 물질의 붕괴

질량이 $m=m(t)$ 인 방사선 물질이 있다. 질량의 변화 속도가 주어진 순간에 대한 물질의 질량에 비례한다는 조건이 주어진다. 즉,

$$dm/dt=-km.$$

Ⅳ. 요약 및 결론 그리고 제언

본 연구에서는 러시아의 수학 교육을 이해하는 연구의 일환으로 우리 나라 고등학교 수학Ⅱ(하)와 러시아의 10~11학년용 수학 교과서인 대수와 기초해석 교과서의 미적분 영역의 내용을 비교하였다.

본 연구의 목적은 우리 나라와 러시아의 고등학교 수학 교과서가 미적분 영역에서, 학습 내용의 범위 및 지도 내용, 학습 내용의 조직 및 계열성에 관하여 중요한 유사점과 상이점을 나타내고 있는 지를 알아봄으로써, 우리 나라 교육 과정 및 교과서 개발, 수학 학습 지도 방법 개선에 기여하는 데 있었다.

이러한 목적하에 본 연구에서 비교된 미적분 영역의 내용 주제는 1) 미분법, 2) 도함수의 활용, 3) 적분법, 4) 정적분의 응용이며 각 주제에 대하여 다음 두 가지 문제를 탐구하였다.

우리 나라와 러시아의 고등학교 수학 교과서에서

1. 학습 내용의 범위 및 학습 지도 내용의 유사점과 상이점은 무엇인가?
2. 학습 내용의 조직 및 계열상의 유사점과 상이점은 무엇인가?

각 학습 주제별로 한국과 러시아 어느 한 쪽에서만 독특하게 취급하고 있는 내용이나 증명, 공통적으로 다루면서도 증명 방법이 다른것, 학생들에게 동기 유발이나 흥미를 일으키기 위한 목적으로 다루고 있는 내용, 그리고 물리나 다른 교과에 관련되어 지도되는 내용들을 구체적으로 자세하게 살펴보았다.

A. 요약 및 결론

전반적인 특징

1. 한국과 러시아는 각각 수학과 교과목표, 수학 교육과정의 조직에서 문제 해결에 강조를 두어야 한다고 주장하고 있었다.

한국에서는, 제 5차 고등학교 교육 과정의 수학과 교과 목표에서, 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게하고, 수학적 지식의 기능을 활용하여 합리적으로 문제를 해결하는 태도를 가지게 한다라고 명시하고 있었으며, 러시아에 있어서도 수학 교육 과정의 조직에 있어서 문제 해결에 강조를 두어야 한다고 권고하고 있었다.

2. 한국과 러시아는 학년에 따른 수학시간의 증가량에 차이가 있었다.

중등학교(5~11학년)의 수학 배당 시간을 살펴보면 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 4.5 - 4로 학년이 높아져 일반 중등학교(10~11학년)에 이르면 수학 배당 시간은 4.5 - 4로 줄어들었다. 한국의 경우는 중학교 부터 살펴보면 4 - 4 - 5 - 4 - 5 - 4로서 학년이 높아질수록 수학 시간 배당이 많아졌다. 한국과 러시아 두 나라 모

두 수학에 많은 시간을 배당하고 있었으나, 러시아의 수학 배당 시간은 중등학교 저학년에서 주당시수의 2/3이상을 차지할 정도로 배당 시간이 많았다.

3. 한국 교과서 수학Ⅱ(하)와 러시아 교과서 대수와 기초해석의 시간당 페이지 비율이 차이가 있었다.

러시아의 대수와 기초해석 교과서는 1시간에 배당되는 페이지가 2.2 페이지였고, 한국의 수학 Ⅱ(하)는 약 1.7 - 2.1페이지였다. 러시아 교과서에서 미분의 경우는 1시간에 배당되는 페이지가 1.6페이지, 적분의 경우는 2.2페이지였고, 한국의 교과서에서는 미분의 경우 1.7페이지, 적분의 경우도 1.7 페이지가 배당되었다(단, 러시아 교과서의 한 페이지당 행의 수는 48행, 한국의 경우는 25행이다). 행의 수를 고려하면 대수와 기초해석 교과서의 시간당 페이지 배당 비율이 수학 Ⅱ(하)의 두 배 이상을 차지하는 것이다. 원리나 기본 개념을 서술식으로 제시하는 러시아 교과서는 한국의 교과서와 시간당 페이지 비율에서 차이를 보이고 있었다.

4. 한국 교과서와 러시아 교과서의 수, 사용 기간에 있어서 차이가 있었다.

한국의 고등학교 8종의 수학 교과서는 수학의 제 영역을 묶은 한권의 교과서로 1년 동안 사용하도록 되어 있으나, 러시아의 일반 중등학교(10~11학년)의 단일 발행된 수학 교과서는 대수와 기초해석, 기하의 두 권으로 되어 있고 각각 2년 동안 사용하게 되어 있었다.

5. 미적분은 한국과 러시아의 수학 교육에서 중요한 위치를 차지하고 있다고 할 수 있다.

한국에서는 미적분에 고등학교 3학년의 연간 수학 시수의 46%-57%, 고등학교 수학Ⅱ(하)의 전체 페이지의 47%를 배당하고 있었다.

러시아는 10학년, 11학년 학생들에게 각각 주당 4.5, 4시간씩 총 289시간의 수학 시수 중에서, 대수와 기초해석에 주당 2.5, 2시간씩 153시간을 배당하고 있었으며 미적분은 대수와 기초해석의 총 배당 시수, 페이지에 대하여 각각 37%와 29%를 차지하고 있었다(학년말에 배당되는 복습시간과 미적분 단원에 포함되어 있지 않은 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 미분을 고려하면 비율은 더 높아진다).

6. 두 나라는 문제 배당 형식에 차이가 있었다. 즉, 한국 교과서는 문제가 각 주제에 따라 분산되어 있었고 러시아 교과서는 연습 문제에 집중되어 있었다.

한국 교과서는 개념이나 원리, 법칙의 이해를 위한 사항 다음에는, 기능 숙달과 응용을 위한 문제가 바로 이어져 있었으나, 러시아 교과서는 개념이나 원리의 학습 후에는 간단한 예제만 다루고 있었으며 기능 숙달을 위한 문제는 본문 내에는 거의 없었고 연습 문제에서 학생 스스로 확인하게 되어 있었다. 따라서, 한국의 교과서는 배운 내용을 수업 시간에 확인, 정리할 수 있도록 되어있다고 할 수 있다.

그리고, 러시아의 교과서에서는 중단원마다 그 중단원에서 학습한 내용의 개

념이나 원리를 묻는 주관식의 서술식 문제를 제시하고 있는 것이 한국과는 특별히 다른 점이었다.

7. 러시아의 수학교과서인 대수와 기초해석 교과서의 단원 체제와 내용 전개 방법이 한국의 교과서와 차이가 있었다.

1) 단원 체제면의 차이점

러시아의 교과서는 대단원의 학습 내용이 다음과 같이 크게 세 부분으로 되어 있었다.

① 머리말-그 단원의 동기유발과 흥미를 갖도록 하는 도입 부분의 역할을 하고 그 단원의 주요 지도 내용에 대한 기본 개념을 확실하게 갖도록 하기 위한 부분이다. 한국교과서의 도입 부분의 2배 이상의 지면을 배당하고 있었다.

② 본문-구체적인 학습 내용이 서술식으로 주어진다.

③ 결론부분-본문의 내용을 확장, 정리, 강화해 주려는 목적이 있다.

이 세 부분의 각 끝마다 검사 문제가 있어서 각 부분에서 배운 내용에서 중심이 되는 중요한 원리를 서술식의 주관식 문제로 확인하고 있고 대단원이 끝나면 그 장에 대한 종합적인 문제가 있다.

한국의 교과서는 대단원, 중단원, 소단원으로 구성이 되며, 소단원에서 학습해야 할 주제와 목표를 제시하고 있고 중단원의 끝마다 연습문제가, 대단원의 끝에는 종합문제가 있다. 한국의 교과서 중에도, 그 단원의 내용을 정리, 확장하기 위한 단원의 요약, 발전 학습, 심화 학습등을 다루는 교과서도 있으나 러시아 교과서에서와 같이 본문에 있는 것이 아니라, 종합 문제의 다음에 있어 그 단원의 수업 내용으로 보기는 어려울 것 같았다.

2) 내용 전개 방법의 차이점

한국 교과서는 학습 내용을 전개하는 데 있어서, 소단원에서 학습 내용과 관련된 문제 형식의 간단한 물음이 주어지고, 본문의 내용 설명 후에는 계산 속달과 학습 내용을 정착시키기 위한 예제와 다양한 문제를 다루도록 하고 있다.

러시아 교과서는 머리말, 본문, 결론의 각 부분에 중단원이 있고 중단원마다 소단원이 있는데, 이들 소단원에서는 한 주제의 개념이나 원리를 서술식으로 전개하고 있고 그 후, 원리를 확인하기 위한 간단한 예제가 주어진다.

한국에서는 다소 추상적이며 엄밀한 수학적 전개 방식을 취하고 있었고 러시아에서는 불완전한 수학의 형태를 취하고 있으나 매우 논리적이고 실제적인 전개 방식을 택하고 있었다.

학습 내용의 조직 및 계열성

1. 러시아에서는 학생들에게 미적분에 대한 동기 유발과 흥미를 제공하기 위해 물리학과 기타 실생활과 밀접한 예를 적극적으로 도입하여 미적분의 지도에서

‘실제 수학적인’ 접근을 시도하고 있었다.

그들은 또한, 교육 절차(process)의 조직에서 학생들의 수학공부에 대한 흥미 개발은 교사의 중요한 역할이라고 주장하였다.

2. 한국과 러시아 교과서가, 도함수의 계산 부분의 학습 내용 계열면에서 차이를 보이고 있었다.

한국에서는 고등학교 1학년 과정의 일반수학에서 삼각함수, 지수함수, 로그함수를 먼저 학습한 후에 이들 함수의 미분을 고등학교 3학년의 미분법 단원에서 다루고 있는 반면, 러시아에서는 11학년의 미분 단원에 이어서 삼각함수, 지수함수, 로그함수 단원이 있고 그 단원의 끝에서 이들 함수의 미분법을 동시에 학습하도록 배열하고 있다. 러시아에서는 삼각함수등의 미분법이 함수 학습에 한 부분을 차지하게 되어 미분법의 학습 내용을 반복하는 효과를 가져올 수 있도록 하고 있다. 그러나, 적분이 미분의 역연산임을 고려할때, 삼각함수, 지수함수, 로그함수를 미분단원 앞에서 바로 지도하기만 한다면 미분과 적분이 이어져 있는 한국의 교과서가 더 바람직한 내용 계열을 가졌다고 할 수 있을 것이다.

3. 도함수의 연구의 출발이 물체의 속도를 연구하는 데 있었기 때문에 함수의 특성과 도함수와의 관계를 설명함에 있어서, 러시아의 교과서에서는 역학적인 모형을 주로 사용하였다.

한국의 교과서에서는 함수의 특성과 도함수와의 관계를 설명함에 있어서 도함수의 정의와 정리를 사용하여 연역적 방법으로 다루고 있었다. 러시아 교과서에서 도함수의 초기 개념을 도입하는 데 귀납법이 적용되기는 하지만, 두 나라가 공통적으로 연역법에 크게 의존하고 있다고 할 수 있을 것이다.

4. 학교 수학에서 미적분을 지도하는 여러가지 방법 중, 두 나라가 공통적으로 극한 방법을 이용하고 있다.

5. 한국의 교과서는 전통적인 수학 교과서와 같이 본문의 내용이 정의, 정리, 증명으로 형식적인 전개 양식을 따르고 있었고 러시아에서는 최소한의 정의로, 논리 전개에 모순이 없는 한, 엄밀한 증명은 강조하지 않으려 하고 있었다.

학습 내용의 범위 및 학습 지도 내용

미분법

1. 러시아 교과서에서는 접선을 설명하는 데 있어서 상당히 구체적이고 시각적인 방법을 사용하고 있었으나 한국 교과서에서는 미분계수의 기하학적 의미를 설명하는 과정에서 간단히 접선을 도입하고 있었다.

2. 한국에서는 $y=x^n$ 의 도함수 공식을 지수가 양의 정수일때는 도함수의 정의로, 음의 정수일때는 몫의 미분법으로, 유리수 지수인 경우는 합성함수의 미분법

으로, 지수가 실수인 경우는 로그함수의 미분법으로 각각 증명하였다. 그러나 러시아에서는 직관적이고 귀납적인 방법으로 간단히 다루었다.

3. 삼각함수의 도함수 계산에서, 한국 교과서는 도함수의 정의와 선행 학습한 삼각함수의 성질을 써서 논리적이고 형식적인 증명을 제시하였으나 러시아에서는 순간 속도 벡터를 이용하여 기하학적으로 증명하고 있다.

4. 러시아 교과서에서는 역함수의 도함수, 그리고 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^h , $\ln(1+h)$ 의 근사식을 구하고 있다.

5. 한국 교과서에서는 롤의 정리를 일반화하여 평균값의 정리까지 다루고 있으며 평균값의 정리를 이용하여, 어떤 구간에서 도함수가 0인 함수는 상수 함수이며, 미분계수가 항상 양인 함수는 단조증가 함수임을 증명하고 있다. 러시아에서는 평균치 정리를 사용하지 않고 역학적인 모형을 사용하여, 극값을 갖기 위한 필요 충분조건도 증명하고 있다.

6. 한국 교과서에서는 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e$ 와 도함수 정의를 이용하여

로그함수의 도함수를 구하였으나, 러시아에서는 직선 $y = x$ 에 대칭인 두 함수 $y = e^x$ 와 $y = \ln x$ 를 이용하여 기하학적으로 증명하였다.

7. 한국에서는 이계도함수의 분명한 용어의 정의에 의해 곡선의 오목, 볼록을 정의한 후, 변곡점을 구하고 그것을 이용하여 그래프의 개형을 훨씬 쉽게 파악할 수 있도록 유도하고 있다. 러시아 교과서에서는 오목, 볼록이라는 용어가 없으며, 변곡점이라는 용어가 그래프의 개형을 설명하는 부분에 나오기는 하지만 이계도함수를 이용하여 구체적으로 구하는 방법은 다루지 않았다.

8. 도함수의 활용에서, 러시아 교과서는 일, 전하량, 질량, 열, 물리에서의 미분등 다른 교과와의 연계성이 다른 부분보다 많이 고려 되고 있다.

적분법

1. 한국 교과서에서는 'F'(x)=f(x)일때, $\int f(x)dx=F(x)+C$ 로 적분 상수 C를 강조하여 지도하고 있으나, 러시아 교과서에서는 F'(x)=f(x)일때, $F(x)=\int f(x)dx$ 로 쓰고 있다.

2. 적분의 계산은 교과서의 내용 구성과 전개에 있어서 러시아 교과서와 한국 교과서가 차이가 있는 부분이다. 러시아 교과서는 일단 적분의 기본 개념을 서술한 다음 미분의 역연산에 의해 구한 간단한 적분표를 제시하였다.

한국 교과서는 각 학습 주제 마다 미분 공식에 의해 얻은 적분 공식을 설명한 후 예제와 문제를 많이 제시하고 있다.

3. 한국 교과서는 적분의 계산 부분에서 러시아 교과서보다 많은 내용을 다루고 있었다.

4. 적분의 계산 부분에서는 한국 교과서의 학습 내용이 많았으나 적분의 응용 부분에서는 러시아 교과서의 내용이 한국 교과서의 내용보다 두 배 이상이 더 많았다. 러시아 교과서에서는 특히 물리와 다른 교과와의 연계성이 강조되고 있었고, 적분의 개념을 확실히 하여 일상 생활에 적용할 수 있는 응용 문제를 많이 배당하고 있었다.

5. 한국의 교과서에서는 적분을 이용하여 넓이와 체적을 구하는 문제를 적분의 응용에서 다루고 있으나 러시아 교과서에서는 적분의 도입 부분에서 기하학적 의미를 설명하면서 다루고 있다. 한국 교과서에 있는 회전체의 부피는 러시아 교과서에서는 다루지 않았다.

6. 한국 교과서에서는 정적분의 정의, 면적, 부피 구하는 공식을 \int 기호를 사용하여 정의한 후, 그것을 이용하여 무한 급수의 합을 정적분을 이용하여 극한값을 구하는 문제까지 다루고 있었으나 러시아 교과서에서는 \int 기호를 사용하지 않고 적분합이라는 용어를 사용하고 있었다.

7. 러시아 교과서에서는 적분의 응용에서, 운동 거리, 일, 질량, 전하량, 압력, 열량과 기하학적인 양들인, 길이, 면적, 체적을 적분을 이용하여 계산하는 방법을 다루고 있었다.

많은 물리적 법칙 즉, 운동 거리, 일, 질량, 전하량, 압력, 열량을 구하는 식에서 미분 방정식을 도입하고 미분 방정식의 여러가지 예제와 풀이를 다루고 있으며, 간단한 이계 미분 방정식과 그것의 풀이까지 본문의 내용에서 취급하고 있었다. 러시아 교과서에서 미적분 학습에 있어서 물리와 관련지어 지도하는 것은 현실적인 접근과 수학의 응용성을 고려한 것으로 여겨졌다.

B. 제언

1. 우리 나라 교과서의 미적분은 학생들이 그 핵심을 이해하지 못한 상태에서 기계적으로 미분하고 적분하기 쉽다고 생각된다. 따라서, 러시아 교과서에서처럼 학교 수학에서의 미적분 내용이 논리적인 엄밀성과 병행하여, 직관적으로, 더욱이 물리적인 내용과의 관련성을 통해서 보다 의미있게 지도될 수 있도록 교과서를 개발했으면 한다.

2. '어떤 구간에서 도함수가 0인 함수는 상수함수'인 것은 러시아 교과서에서처럼 역학적인 모형을 사용하여 직관적으로, ' $y = x^n$ 의 도함수 계산 공식'은 간단히 귀납적인 방법으로 증명하여 학생들에게 엄밀한 증명에서 오는 부담을 줄여 주었으면 한다.

3. 우리 나라 미적분 교재에서 지나치게 형식적인 증명과 복잡하고 많은 계산 문제를 줄인다면 우리 나라의 수학적 전개방식을 유지해 가면서 동시에 러시아 교과서에서처럼 미적분 교재를 그 기원이나 연구 목적, 개념 이해, 그리고 수학

의 응용을 강조하는 내용으로 구성할 수 있을 것으로 생각된다.

4. 러시아 교과서에서는 도입 부분을 하나의 중단원으로 배당하고 있는데, 학생들이 그 단원에 대한 동기 유발과 의미 파악을 할 수 있도록 배려한 것으로 여겨진다. 우리 나라 교과서의 대단원의 앞 부분, 각 소단원의 '물음'에서 형식적으로 다루어지는 도입 부분을 확대하여 학습 내용을 이해하는 데 기본이 되는 개념을 충분히 다루어 교과서 개발을 했으면 한다.

5. 1992년 10월에 고시된 제 6차 교육과정에서 미적분에 추가될 예정인 역함수의 도함수 증명하는 데 있어서, 러시아 교과서에서처럼 그래프적이고 기하학적인 방법으로 다루어진다면 의미있는 학습 내용이 될 수 있을 것이다.

역함수의 도함수 외에도 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 도함수를 구하는 공식을 그래프적이고 기하학적인 방법으로 언급한다면 의미있을 것으로 여겨진다.

6. 러시아 교과서에서처럼 미분학의 원리들의 설명을 단순화 시키고 기본적인 결과들에 관한 이해를 더 쉽게 하기 위해 접선의 그래프적이고 기하학적인 표현에 강조를 두어서 지도되었으면 한다.

7. 미국, 일본, 동유럽등의 여러나라처럼 앞으로 우리 나라에서도 러시아의 수학교육, 즉, 러시아의 수학 교육 과정, 수학 교수법, 교육 심리, 평가, 교사 교육, 특수 교육 등의 러시아 수학 교육 전반에 걸쳐 많은 연구가 진행되었으면 한다.

참 고 문 헌

- 고 동욱 외.(1991). 고등학교 수학Ⅱ (하). 서울:금성 교과서(주).
- _____.(1991). 고등학교 수학Ⅱ (하) 교사용 지도서. 서울:금성 교과서(주).
- 김 동규.(1984). 소련의 학교교육. 서울:주류.
- 金 柱鳳.(1980). 인문계 고등학교 수학과 교육과정의 변천에 대한 연구. 數學教育 第 18卷 第 1號. 韓國數學教育學會.
- 김 진락.(1992). 제 6차 초·중·고 수학과 교육과정. 수학교육. 한국수학교육학회.
- 문교부.(1988). 제 5차 고등학교 교육과정. 서울:대한 교과서 주식 회사.
- 박 영배.(1990). 수학교육의 세계적 동향과 교육과정. 제 5회 수학교육학 세미나. 강원대학교 수학교육학 세미나 그룹.
- 박 춘일.(1986). 미분법의 지도방법에 관한 연구. 경희대학교 교육대학원 석사 논문.
- 박 한식.(1982). 수학 교육사. 서울:교학사.
- 신 세호, 김 영철.(1987). 주요국의 교육 개혁 동향. 서울:민족 문화 문고간행회.
- 심 상보.(1988). 미분 개념의 효율적 지도 방법에 관한 연구. 홍익대학교 교육대학원 석사 논문.
- 우 정호.(1990). 미적분 교재의 재음미. 서울대학교 사대 논총 제 41집.
- 이 규환.(1991). 선진국의 교육제도. 서울:배영사.
- 이 용곤.(1991). 한국과 소련의 중등학교 수학교과서 비교 분석 연구. 한국교원대학교 석사 논문.
- 이 정근.(1985). 각국의 교육 개혁 동향. 한국교육개발원.
- 이 종락, 류 희찬외1.(1991). 고등학교 수학과 교육과정 개선 방향에 관한 연구. 제 8회 수학교육학 세미나. 인천 교육대학 세미나 그룹.
- 장 경희.(1991). 고등학교 수학과 교과 내용의 분석 연구. 경희대학교 교육대학원 석사 논문.
- 장 언효.(1979). 교육과정 국제 비교 연구. 서울 KEDI.
- 한태식.(1991). 미국, 영국, 일본, 소련의 수학교육 과정. 제3회 수학교육 세미나.
- 강원대 수학교육 세미나 그룹.(1983). 수학교육과정 개발의 이론적 기초 탐구.
- 敎科書 研究 センター--.(1985). 敎科書からみた 敎育課程の 國際比較4: 算數. 數學科編. 東京:きょうせい.
- М. И. БАШМАКОВ.(1991). АЛГЕВРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА. МОСКВА ПРОСВЕИЕНИЕ.
- Р. Д. Лукин, Т. К. Лукина, М. С. Якутна.(1989). УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ПО

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА. МОСКВА ПРОСВЕЩЕНИЕ.

Dora Shturman. (1988). *The Soviet Secondary School*. London: Routledge.

J. J. Tomiak. (1983). *Soviet Education in the 1980's*. New York: St. Martin's Press.

Mervyn Matthews. (1982). *Education in the Soviet Union*. London: George Allen.

P. Nagy. (1991). *Journal for Research in Mathematics Education*. High School Calculus.

Thomas A. Romberg. (1984). *Contemporary Education Psychology* 9. Soviet School Mathematics Curriculum Reforms.

UNESCO. (1986). *Science and Mathematics Education in the General Secondary School in the Soviet Union*.

UNESCO. (1987). *Soviet Education*. Jan. 1987/Vol. XXIX, NO. 8.

Vladimir D. Shadrikov. (1991). 소련에서 공교육의 개혁. 한국과 USSR의 고등교육에 관한 협력세미나.