한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>
1993. 6. 제 32권 제 3호 136-142

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A : June 1993, Vol. 32. No. 3, 136-142

인지학습과 학습내용 전개
- 평면도형의 넓이 -

신 준 식(홍연국교)

Ⅰ. 서론

인류가 오늘날과 같은 문명을 이루게 된 것은 사람만이 학습할 수 있기 때문이다. 원시 시대에서 지식의 양은 현재를 기준으로 하면 매우 보잘 것 없는 것이지만 그 당시에는 상당한 양이었을 것이다. 지금 생각하면 아주 보잘 것 없는 지식들이 조금씩 오랫동안 축적되어 지금에 와서는 비약적으로 발전해 나아가고 있다. 오늘의 지식은 갑자기 나타난 것이 아니라 이미 존재한 지식을 바탕으로 학습을 통하여 발전된 것이다.

이를 한 개인에 국한시켜 생각해 보자. 사람은 태어날 때 동물적인 본능만 가지고 태어나지만 하루 이틀 지나면서 지각을 통하여 환경의 자극을 받아 학습을 하게 되어 지식을 쌓아 나아가게 된다.

그러나, 모든 사람이 같은 정도, 같은 속도로 발전하는 것은 아니다. 지식 형성에 대한 여러 요인들이 복합적으로 작용하기 때문에 이와 같은 개인차가 나타나는 것이다. 하나를 가르쳐주면 열을 아는 어린이도 있고, 서당 개 삼년이면 풍월을 읊는 어린이도 있고, 소 귀에 경읽기와 같은 어린이도 있다. 왜 어떤 어린이는 하나를 가르쳐 주면 열을 알고, 어떤 어린이는 소 귀에 경 읽기가 될까? 우리의 목표는 하나를 가르쳐서 열을 알 수 있는 어린이가 되게 하는 것이다. 어떻게 하면 창의성있는 어린이로 육성할 수 있을까?

교육의 인지적 목적은 개인의 지적인 성장이다. 지적 성장은 읽기, 셈하기 및 사실 개념, 원리 등과 같은 기본 기능 획득을 의미한다. 학교 교육의 초점은 바로 이 영역에 있다. 인지 영역에서 중요한 것은 정보처리이다. 정보처리에 초점을 둔 교사는 다음 두 가지 목표를 가진다(Lefrancois,1985).

① 학생으로 하여금 유용한 정보를 획득하도록 돕는다.

② 학생들의 사고 기능의 발달을 돕는다.

학습을 위한 정보처리 전략은 학습 내용의 기계적인 암기보다는 의미있는, 목적있는 학습을 강조한다.

수학은 재미있고 쉽게 배울 수 있어야 한다. 그렇게 하기 위해서는 될 수 있는대로 최소한의 개념을 학습하여 최대한의 효과를 거둘 수 있어야 하고, 학생들이 가지고 있는 지식을 바탕으로 학습이 이루어져야 하고, 학생들이 배운 지식이 통합될 수 있어야 한다.

따라서 본고에서는 인지주의 학습이론을 간단히 살펴보고, 이를 바탕으로 현행 교과서에서 평면도형의 넓이를 구하는 단원의 내용 전개에 대하여 문제점과 그 개선책을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 인지주의 학습이론

1. 행동주의와 인지주의 학습이론

19세기 말에 와서야 사람과 동물들이 어떻게 학습하는가를 과학적인 방법으로연구하기 시작하였다. 학습이론은 크게 두 가지로 나뉘는데 하나는 행동주의이고 다른 하나는 인지주의이다. 행동주의는 관찰할 수 있는 행동의 변화를 강조하는 반면에 인지주의는 관찰할 수 없는 정신적인 과정을 강조한다.

행동주의 학습이론의 기본 원리는 심리학에서 어떤 이론만큼이나 확고하게 정립되었고 다양한 조

건에서 설명되었다. 행동주의 학습이론은 인간 행동의 많은 부분을 설명할 수 있고, 행동의 변화를 설명하는 데에도 유용하나, 관찰 가능한 행동만을 배타적으로 강조하고 있다. 그러나, 관찰할 수 없는 학습2 과정 즉, 개념 형성, 문제해결, 사고 등은 직접적으로 관찰하기 힘들다. 이 영역은 인지 학습의 영역이다(DuBois, et al.1979).

행동주의는 자극과 반응이라는 행동의 관찰과 관련된 이론인 반면에, 인지주의는 지식의 조직, 정보처리, 의사결정 등과 관련된 이론이다. 가르치는 데 있어서 인간 행동의 인지주의적 분석과 행동주의적 분석으로 얻어진 제안은 서로 상반된 것일 필요는 없다. 접근 방법이 다른만큼 어느 것이 옳고, 어느 것이 그르다는 것이 아니다. 과학에서조차 어떤 진실에 대해 정확하고 일치된 견해가 없는 경우도 있다. 예를 들어 빛에 대해 입자설과 양자설이 있지만 실험 방법에 따라 다를 뿐 어느 한 학설이 옳고, 다른 학설은 틀리다는 것이 아니다. 따라서 우리는 일관성, 설명력, 유용성 등의 관점에 관심을 두어야 한다. 다시 말하면 인간 행동을 이해하기 위한 접근 방법이 때에 따라 목적에 따라 각각 유용하다는 것이다.

2. 인지주의 학습이론

인지란 간단한 개념이 아니다. 사전적으로 해석하자면 인지란 '어떤 사실을 인정하여 안다'는 뜻이다. '안다', '이해한다'는 무엇을 뜻하는가?

Neisser는 '인지는 지식의 활동 즉, 지식의 획득, 조직, 사용이다.'라고 하였고, Glass 등은 '우리의 모든 정신력 즉, 지각, 기억, 추론 등이 복잡한 체계로 조직되는데 이런 전체적인 기능을 인지'라고 하였다. 여기에서 공통점은 인지란 아는 과정에서 정신적인 구조나 조직의 역할을 강조한다는 것이다(Lefrancois, 1985). 다시 말하면 정보를 어떻게 저장하고 처리하는가가 인지적인 접근 방법이다. 그래서 인지주의 이론을 정보처리 이론이라고도 한다.

행동주의 학습이론의 기본 가정이 '학습자는 처음에는 모두 동등하다. 그러나 학습자에게 제시되는 조건이 다양하기 때문에 행동에서 차이가 나타난다'는 것인 반면에 인지주의 학습이론의 기본 가정은 '각기 다른 경험으로 말미암아 학습자의 정신 구조가 다르기 때문에 학습자는 동등하지 않다'는 것이다.

Howard(1983)는 인지주의 학습과 행동주의 학습은 다음 3가지 점에서 차이가 있다고 하였다.

① 인지주의 학습은 반응보다는 아는 것을 강조한다.

지식의 획득과 적용을 수반하는 정신적인 과정을 연구하므로 S-R bonds에 강조하지 않고 정신적인 면을 강조한다.

② 인지주의 학습은 정신적인 구조나 조직을 강조한다.

각 개인의 지식은 조직되고, 새로운 자극은 이 지식을 바탕으로 재해석된다.

③ 환경 자극에 대해 수동적이라기 보다는 능동적, 구성적, 계획적이다.

따라서 인지주의는 개념 형성, 문제해결 등과 같은 보다 높은 수준의 학습에 관심이 있다(Gibson, 1980).

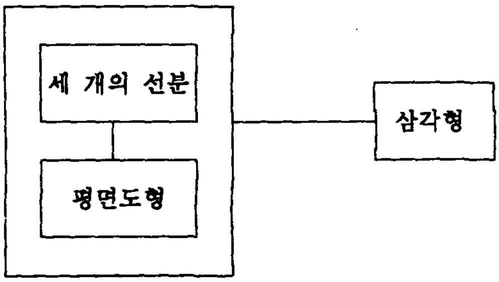
3. 개념적 지식과 절차적 지식

수학에서 여러 가지 이름으로 불려온 지식의 종류는 크게 나누어 개념적 지식과 절차적 지식이다. 이들은 여러 학자들이 의미와 사용에 있어서 다음과 같이 약간 다르게 이름을 붙였다(Hiebert, 1986).

Piaget -- 개념적 이해와 성공적 행동
Tulving -- 의미적 기억과 일시적 기억

Anderson -- 서술적 지식과 절차적 지식
Scheffler -- 'knowing that'과 'knowing how'
이러한 지식은 결국 기능과 이해라는 차이로 폭넓게 인식되어 왔다.
수학교육에서 기능과 이해 어느 것에 중점을 둘 것인가 또는 어떻게 균형있게 가르칠 것인가가 중요하다.

1) 개념적 지식
개념적 지식은 관계가 분명한 지식이다(Hiebert,1986). 관계는 사실과 명제에 스며들어 정보의 모든 단위가 어떤 network에 연결된다. 따라서 개념적 지식의 단위는 홀로 고립되어 존재하지 않는다.
하나의 개념적 지식이 다른 정보와 연결되면 그 개념적 지식은 보다 큰 개념적 지식의 일부가 되는 것이다.
예) 삼각형은 세 개의 선분으로 이루어진 평면도형이다. --- 개념적 지식



이러한 개념적 지식은 각 정보 단위의 관계가 구성됨으로써 발달된다. 이 때 연결되는 과정은 이미 기억 속에 저장된 두 정보 사이에 일어나거나 이미 존재한 지식과 새로 배운 지식 사이에 일어난다. 또, 기존의 지식과 새로운 정보 사이의 관계를 만들어 냄으로써 개념적 지식이 발달된다.
평행사변형의 넓이를 학습할 때, '평행사변형의 넓이는 두 개의 삼각형 넓이의 합이다'라는 관계를 만들어 내었다면 개념적 지식이 발달된 것이다.
이런 현상은 위에서 여러 가지 이름으로 말하였지만 '이해하였다', '유의미한 학습이다', '동화되었다'라는 말로 나타낼 수 있다.
두 정보 사이의 관계를 세우는 두 가지의 수준이 있는데 하나는 기본적 수준(Prima-ry Level)이고, 다른 하나는 반영적(사려깊은) 수준(Reflective Level)이다.
평행사변형의 넓이를 학습할 때, 평행사변형의 넓이는 두 개의 삼각형 넓이의 합이다라는 관계만 안다면 이 수준은 기본적 수준이라고 한다.
더 나아가 평행사변형의 넓이를 두 개의 삼각형 넓이의 합이라는 개념적 지식을 학습하면서 다각형의 넓이는 여러 개의 삼각형 넓이의 합이라는 것을 알면 이 수준은 반영적(사려깊은) 수준이다.
2) 절차적 지식
절차적 지식은 'knowing how to'이다. 전문가는 어느 분야에 대한 절차적 지식을 많이 가지고 있다는 점에서 비전문가와 다르다. 따라서 전문가는 정보를 분류하고 조직하는 규칙을 자세히 안다. 다시 말하면 전문가는 know-how를 많이 가지고 있다. 학교교육의 목표는 기본적인 기능에서 전문가를 양성하는 데 있다(Gagné,1985).
절차적 지식에는 두 가지가 있다(Hiebert,1986)
① 수학의 형식적 언어, 기호체계
이 지식은 수학의 형식이라고도 하는데 수학적 개념을 표현하는 기호 또는 기호를 쓰는 문법적 규

칙 및 증명하는 데 있어서 증명의 형식 등이 포함된다.

즉, 수학적 문장 27÷□=9의 뜻을 알 수 있지만, 27□÷9=의 뜻은 알 수 없다.

② 규칙, 알고리즘, 문제를 해결하기 위한 절차

어떤 문제를 해결하기 위한 단계(절차)를 말한다. 다시 말하면 제시된 상태(문제)에서 목표 상태(답)로 가는 일련의 절차를 말한다.

학생들이 문제를 해결하기 위한 절차를 선택할 때 유연성을 갖기 위해서는 개념적 지식과 절차적 지식이 연결되어 있어야 한다(Carpenter,1986). 그러나 학생들은 방금 획득한 지식을 따로따로 구분하려고 하기 때문에 지식들 사이의 관계 구성을 방해하게 된다(Hiebert,1986). 어느 한 영역에서 학습한 것은 그대로 묶어 두려고 하기 때문에 새로운 지식과 기존의 지식의 유사성에 주의를 기울이지 않는다. 예를 들면 소수를 학습하여 획득한 지식을 분수에 관한 기존의 지식과 연결하려 하지 않는다.

따라서 개념적 지식과 절차적 지식을 잘 연결시킬 수 있는 교수 방법을 고안하는 것은 간단한 일이 아니다.

4. 유의미 학습과 기계학습

개념적 지식과 절차적 지식이 유의미 학습과 기계적 학습이 어떻게 관련되는가를 살펴보자.

유의미 학습이란 학습자가 새로운 정보를 기존의 지식과 연결되었을 때 일어난다(DuBois,et al.1979). 학습해야 할 내용이 인지 구조에 연결되지 않거나, 연결될 수 없을 때 학습의 결과는 기계적 학습이 된다.

유의미 학습은 많은 이익을 가지고 있다.

① 관련된 내용에 대해 더 많은 학습을 쉽게 할 수 있다.

② 학습한 내용을 오래 파지할 수 있다.

③ 학습과 파지하는 데 경제적이다.

개념적 지식과 절차적 지식이 유의미 학습, 기계적 학습과 어떤 관계가 있는지 살펴보자.

앞서 말한대로 유의미 학습은 지식 단위들 사이의 관계가 인식되고 만들어짐으로써 이루어진다. 개념적 지식은 의미있게 학습되어져야 한다. 그러나 절차적 지식은 반드시 그렇지 않을 수도 있다. 예를 들면, 국민학교 학생들에게도 절차적 지식을 통하여 미분을 가르칠 수 있다. 이 경우 개념적 지식과는 연결되어 있지 않다. 의미있게 학습한 절차적 지식은 개념적 지식과 연결되어 있는 절차이다.

기계적 학습은 관계가 없는 지식을 만들어내고 학습한 내용에만 관련되어 있어 전이가 없다. 다시 말하면 기계적 학습을 통하여 획득한 지식은 다른 지식과 연결되지 못하여 일반화가 안되고 다른 상황에 적용하지 못한다.

반면에 절차적 지식은 기계적으로 학습될 수 있다. 많은 절차적 지식들이 일련의 기호를 조작하기 때문이다.

학습의 목표를 기능과 이해의 어느 쪽에 두느냐에 따라 절차적 지식을 강조하느냐, 개념적 지식을 강조하느냐가 달려있다.

무용지식이란 학교에서 배운 지식이 실생활에 활용되지 못하는 지식(Bransford,1986)을 말하는데, 지식은 넓은 범위의 상황에서 적용할 수 있어야 하고 적용되어야 하나 무용지식은 오직 제한된 환경에서만 적용된다(예, 영어 성적은 좋으나 미국 사람과 말을 못하는 경우, 직사각형의 넓이를 구하는 문제를 해결할 수는 있지만 교실의 넓이는 구하지 못하는 경우).

교사는 학생들이 정보를 유용하게 또는 의미있게 만들 수 있는 방법으로 배울 수 있도록 도와주어야 한다. 효과적인 교수 방법은 학생들의 머리를 열어 개념과 기능을 집어 넣는 과정이 아니라, 학생들에게 정보를 어떻게 접근하기 쉽도록 만들어 주는가이다. 그래서 학생들이 다른 정보와 연결시키고,

일상 생활에서도 적용할 수 있어야 한다.

Ⅲ. 현행 교과서의 분석
-평면도형의 넓이 단원-

1. 현행 교과서의 내용

4학년 1학기

- 도형의 넓이 비교(직접 비교, 간접 비교) ◦ 단위 넓이
- 직사각형의 넓이, 넓이=가로×세로
- 정사각형의 넓이, 넓이=한 변×한 변
- 다각형의 넓이

4학년 2학기

- 삼각형의 넓이, 넓이=직사각형 넓이÷2
- 삼각형(예각,직각)의 넓이, 넓이=밑변×높이÷2
- 여러 가지 방법으로 넓이 구하기(예, 사다리꼴의 넓이)
- 다각형의 넓이 구하기

5학년 1학기

- 평행사변형의 넓이, 넓이=직사각형의 넓이 =가로×세로
  =밑변×높이
- 삼각형(둔각)의 넓이, 넓이=밑변×높이÷2
- 사다리꼴의 넓이, 넓이=평행사변형의 넓이÷2=밑변×높이÷2
  =(윗변+아랫변)×높이÷2
- 마름모의 넓이, 넓이=직사각형의 넓이=가로×세로÷2
  =한 대각선×한 대각선÷2
- 다각형의 넓이

2. 문제점

4학년 1학기에 처음으로 넓이를 학습하게 되는데, 가로, 세로의 길이가 각각 1cm인 정사각형의 넓이를 단위넓이로 하여 평면도형의 넓이를 측정하고, 이를 바탕으로하여 직사각형, 정사각형의 넓이를 학습한 다음 사각형으로 이루어진 복합도형의 넓이를 구하도록 문제를 제시하고 있다. 학생들은 직사각형이나 정사각형 등 기본도형의 넓이는 공식에 의해 쉽게 구하고 있으나, 복합도형의 넓이를 구하는 데에 상당한 어려움을 겪고 있다.

복합도형의 넓이를 구하기 전에 학생들은 등적변형에 대해 이해하고 있어야 하고, 이를 위한 활동을 경험해야 한다. 등적변형의 개념이 없으면 복합도형의 넓이를 구하는 것은 무의미한 학습이고, 기계적인 학습이 된다. 이런 상태에서 복합도형의 넓이 구하는 절차를 연습하는 것은 개념적 지식과 연결이 안되는 학습이 된다. 이를 행동주의 학습이론에서 S-R의 bond를 연습과 효과의 법칙에 의해 강화시키면 그 결과는 좋을런지 모르나, 개념적 지식과 연결이 안된 절차적 지식은 기계적 학습이 될 뿐이다.

모든 다각형은 여러 개의 삼각형으로 나눌 수 있으므로 다각형의 넓이는 정사각형 또는 삼각형들의 넓이를 합하여 구할 수 있다. 그러나 5학년 1학기 교과서에서는 여러 도형의 넓이를 직사각형과 삼각형의 넓이의 합으로 구하지 않고, 등적변형에 의한 공식을 유도, 제시하고 있어서 학생들은 이를 제

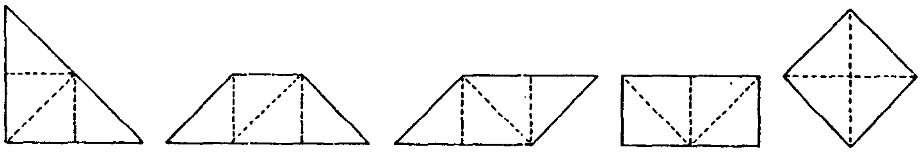
대로 이해하기 힘들어 공식을 암기하게 되며, 직사각형의 넓이나 삼각형의 넓이와는 연결지어 생각하지 않고 있다. 다시 말하면 새로운 지식이 기존의 지식에 덧붙여지지 않아 각 개념이 서로 통합되지 않고 있다. 따라서 문제를 해결하는 절차를 선택하는데 있어서 유연성이 없어서 넓이를 구하는 공식을 잊어버리면 넓이를 구하지 못하게 되고, 복합도형의 넓이를 구하는 데 어려움을 갖게 된다.

또, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모 등 여러 가지 도형의 넓이를 구하는 공식을 제시함으로써 학생들은 이를 이해하기 전에 암기하려들기 때문에 연습을 통하여 강화시키기 때문에 학습해야 할 양이 많아지고, 흥미를 잃게 된다.

3. 개선 방향

* 4-1 ◦ 도형의 넓이 비교(직접,간접 비교)
  ◦ 등적변형에 대한 경험 제공
  ◦ 직사각형(정사각형)의 넓이 넓이=가로×세로
  ◦ 다각형의 넓이
* 4-2 ◦ 삼각형의 넓이(직각, 예각, 둔각삼각형 포함) 넓이=밑변×높이
* 5-1 ◦ 여러 가지 기본도형의 넓이 구하기(사다리꼴,평행사변형,마름모,다각형)
  ◦ 다각형의 넓이 구하기

* 4-1에서 넓이가 같은 여러 가지 도형에 대한 경험을 충분히 제공하여 이를 바탕으로 다각형의 넓이를 구할 수 있도록 한다. 도형의 등적변형을 통하여 넓이의 보존성, 가법성, 연속성 등을 학습하게 된다. 등적변형은 합동인 도형은 넓이가 같다는 성질을 이용하여 분해 또는 합성 등의 조작 활동을 통하여 도형을 변형하게 된다. 이를 위하여 Tanggram은 좋은 학습 자료가 될 수 있으며, 다음은 합동인 직각삼각형 모양의 색종이 4장을 이용하여 도형을 변형시킨 것이다. 이들의 모양은 다르지만 넓이는 모두 같다. 이런 활동을 넓이는 모양에 의존하지 않는 개념이라는 것을 이해하게 된다.



직사각형의 넓이에 대해 조작 활동을 통하여 학습하고 공식을 유도, 제시한다. 정사각형의 넓이 공식은 제시하지 않고 직사각형의 넓이를 구하는 문제와 혼합하여 제시하거나 문장제를 제시함으로써 도형의 성질을 바탕으로 하여 넓이를 구하게 한다.

* 4-2에서 삼각형의 넓이는 직사각형 넓이의 반이라는 것과 등적변형을 이용하여 구한다. 이 때 삼각형의 밑변과 높이에 대한 개념을 충분히 이해할 수 있도록 다양한 학습 활동을 제공한다. 밑변과 높이가 같으면 모양이 다르더라도 넓이는 모두 같다는 등적변형을 이용하여 직각, 예각, 둔각삼각형의 넓이를 구하도록 한다.

* 5-1에서의 학습은 이제까지 학습한 내용을 바탕으로하여 여러 가지 다각형을 직사각형과 삼각형으로 분할 또는 합성하여 구하도록 하고, 공식의 유도나 제시는 하지 않거나 마지막 차시에 간단히 취급하는 것이 좋겠다. 이렇게 함으로써 평행사변형, 사다리꼴, 마름모 등 기본도형의 넓이를 구하는 문제가 단순히 공식을 암기하여 구하는 문제에서 문제해결을 위한 문제로 바꿀 수 있다.

이와 같이 단원을 구성한다면 학생들은 많은 공식을 따로따로 외워야 하는 기계적인 학습에서 벗어나 유의미한 학습이 될 수 있을 것이다.

여기에서 등적변형을 이해하기 위한 활동과 직사각형, 삼각형의 넓이를 구하는 학습은 전이 효과

가 높은 학습이라고 할 수 있다.

Ⅳ. 결론

이제까지 인지주의 학습이론을 간단히 살펴보고, 이에 따른 현행 교과서에서 평면도형의 넓이를 구하는 학습 전개와 문제점을 알아 보았다.

학생들이 수학을 싫어하는 것은 배워도 잘 이해되지 않음에도 불구하고, 학교에서나 집에서 수학 공부는 제일 많이 시키기 때문이다. 배워도 이해되지 않는 것은 학생의 기존 지식과 새로운 지식이 연결되지 않기 때문이고, 그래서 연산 문제는 기계적으로 학습하게 되고, 공식을 외워 그대로 문제에 적용하려 하고, 많은 문제를 풀어 유사한문제를 해결하려 한다.

하나를 가르쳐주면 열을 알 수 있도록 가르치는 것은 학생이 개념적 지식과 절차적 지식이 잘 연결하도록 유의미한 학습이 되어야 한다. 학습은 기존 지식에 새로운 지식이 연결됨으로써 의미있게 저장되고, 넓은 범위에서 적용할 수 있다.

교사는 학생들이 정보를 유용하게 또는 의미있게 만들 수 있는 방법으로 배울 수 있도록 도와주어야 한다.

교사는 자신의 지식 구조와 학생들의 지식 구조는 다르다는 것을 알고, 학생의 지식 구조에 알맞는 교수 전략을 세워야 할 것이고, 교과서에 학습 내용을 전개하는 방법 역시 학생들의 지식 구조에 맞아야 할 것이다.

참고문헌

교육부,(1992). 교사용지도서(4-1, 4-2, 5-1).

Bransford,J.D., Sherwood,R.D., Vye,N.J.,Rieser,J.(1986). Teaching Thinking and Problem Solving. Journal of Experimental Psychology : General,Ⅲ.

Carpenter,T.P.(1986). *Conceptual Knowledge as a Foundation for Procedural Knowledge,* Conceptual and Procedural Knowledge : The Case of Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

DuBois, Alverson, Stsley.(1979). Educational Psychology and Instructional Decision. The Dorsey Press, Homewood, Illinois.

Gagné,E.D.(1985). The cognitive Psychology of School Learning. Little, Brown and Company, Boston.

Gibson,J.T.(1980). Psychology for the Classroom, 2nd ed..Prentice-Hall,Inc.

Hiebert,J.(1986). *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics : An Introductory Analysis,* Conceptual and Procedural Knowledge : The Case of Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Howard,D.V.(1983). Cognitive Psychologys.Macmillan Publishing co.Inc.

Lefrancois,G.R.(1985). Psycology for Teaching,(6th ed.). Wadsworth Publishing Company, Belmont, California.

Slavin,R.E.(1988). Educational Psychology : Theory into Practice 2nd ed.Englewood Cliffs, New Jersey.