

굽힘 및 비틀림모멘트를 고려한 크랭크축의 응력해석

Stress Analysis of Crank Shaft by Considering Bending and Twisting Moment

이 정 윤* · 정 석 주**

Jung-Youn Lee · Suk-Choo Chung

ABSTRACT

This paper an application method of crankshaft of four cylinder internal combustion engine for studying stress analysis of the shaft.

For simple analysis, uniform sections of journal, pin and arm parts were assumed.

Transfer Metrix Method was used, considering branched part and coordinate transformation part.

Bending, twisting moment and stresses of crank shaft were investigated.

기 호 설 명

- Y_i : Lateral deflection of the i-th point
- ϕ_i : Slope of the i-th point
- θ_i : Axial torsional angle of the i-th point
- M_i : Moment of the i-th point
- V_i : Shear force of the i-th point
- T_i : Torgue of the i-th point
- $\{Z\}_i$: State vector of i-th element
- $[B]_i$: Transfer matrix of beam element
- $[T]_i$: Transfer matrix of coordinate transformation
- A : Sectional area(cm²)
- L : Length of a span(cm)
- a : Cross angle
- τ : Shearing stress

1. 서 론

자동차의 고속화, 고출력화, 경량화, 대형화함에 따른 크랭크축의 설계가 자동차 구동부에 직접 영향을 주게 되므로써 크랭크축의 설계에 관한 이론적 및 실험적 해석은 자동차의 안전에 매우 중요하게 되었다. 이에 대한 연구로는 크랭크축을 집중질량으로 하여 설계하는 방법이 많이 연구^{1,2)}되었으며, 유한요소 모델을 이용한 Reduced impedance method³⁾ 등이 있고, 최근 연구로는 크랭크축 전체 매트릭스를 작성하여 계산하는 방법⁴⁾이 발표되었다.

본 논문에서는 설계방법을 간단히 하기 위해 저널(journal)부, 핀(pin)부, 암(arm)부를 일정한 단

* 제철엔지니어링(주)

** 서울산업대학교 기계설계학과

면으로 하였고, 분지(branch)된 부분 및 각도변환 부분도 고려하였다. 또한 평면구조 4 실린더의 엔진용 크랭크축의 굽힘 및 비틀림모멘트를 구하여 응력을 해석하는 방법을 제시하였다.

2. 이론해석

2.1 크랭크축의 해석

보에 관한 전달메트릭스는 Fig. 1에 나타난 변수와 좌표의 정의를 기준하면, 점 $i, i+1$ 사이는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\{Z\}_i = [B]_i \{Z\}_{i+1} \quad (1)$$

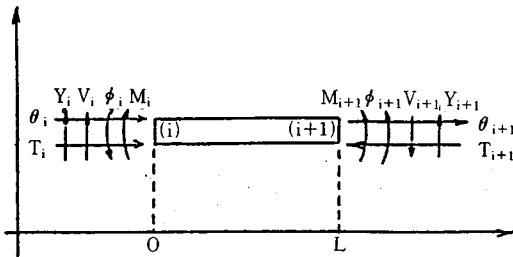


Fig. 1 Definition of coordinate and variables for a beam

$$B_i = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & R \\ 0 & C_0 - \zeta C_2 & 1[C_1 - (\zeta + \eta)C_3] & ac_2 & a[-\zeta c_1 + (b^4 + \zeta^2)c_3]/b^4 & 0 \\ 0 & b^4 c_3 / 1 & c_0 - \eta c_2 & a(c_1 - \eta c_2) / 1 & ac_2 & 0 \\ 0 & b^4 c_2 / a & 1[-\eta c_1 + (b^2 4 + \eta^2)c_3] / a & c_0 - \eta c_2 & 1[c_1 - (\zeta + \eta)c_3] & 0 \\ 0 & b^4(c_1 - \zeta c_3) / a & b^4 c_2 / a & b^4 c_3 / 1 & c_0 - \zeta c_2 & 0 \\ Q & 0 & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$a = \frac{l^2}{EI_y}$$

$$b^4 = \frac{\rho w^2 l^4}{EI_y}$$

$$\zeta = \frac{\rho w^2 l^2}{GA_s}$$

$$\eta = -\frac{l^2}{EI_y} (h \rho i^2 w^2)$$

$$c_0 = \Lambda (\lambda_2^2 \cosh \lambda_1 + \lambda_1^2 \cos \lambda_2)$$

$$C_1 = \Lambda \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right)$$

여기서

$[B]_i$: i 번째 element의 전달 메트릭스

한편, Z_i 는 i 번째 요소의 상태를 나타내는 상태벡터이며, 다음과 같이 정의한다.

$$Z_i = \begin{Bmatrix} \theta \\ Y \\ \phi \\ M \\ V \\ T \end{Bmatrix}_i \quad (2)$$

여기서

θ_i : i 점의 축방향 비틀림 각

Y_i : i 점의 횡방향 변위

ϕ_i : i 점의 기울기

M_i : i 점의 굽힘 모멘트

V_i : i 점의 전단력

T_i : i 점의 축방향 Torque

여기서 B_i 는 다음과 같은 메트릭스로 유도된다.⁵⁾

$$\beta = \sqrt{(\gamma A \omega^2 / g GA_s)} = \sqrt{(M_b \omega^2 / GA_s l)}$$

단, $M_b = \gamma A l / g$

$$c_2 = \Lambda (\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2)$$

$$c_3 = \Lambda \left(\frac{1}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right)$$

$$\lambda_{1,2} = [b^4 + (\zeta - \eta)^2 / 4]^{0.5} \pm (\zeta + \eta) / 2]^{0.5}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

$$P = \cos \beta l$$

$$Q = -GA_s \sin \beta l$$

$$R = \sin \beta l / GA_s \beta$$

여기서 A_s 는 단면적, G 는 전단탄성계수, ω 는

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

고유진동수, h 는 단면높이, ρ 는 단위길이당 질량, i 는 단면 2차 반경이므로 유도된다. 한편 좌표 변환요소는 교차하는 두 요소의 각도를 α 라하고 Fig. 2의 변수와 좌표의 정의를 사용하면 좌표 변환요소의 매트릭스 T_i 는 다음과 같다.

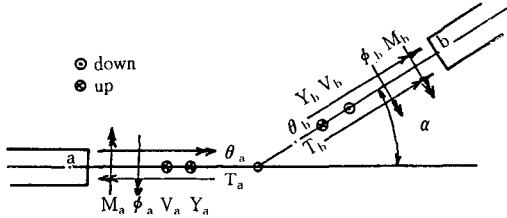


Fig. 2 Definition of coordinate and variables for coordinate transformation

2.2 분지 부분에 대한 해석

분지 부분에 대한 해석은 Fig. 3에 나타난 변수와 좌표의 정의를 기준하면

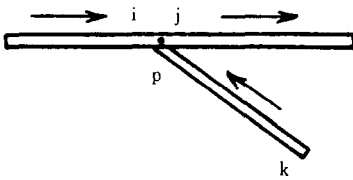


Fig. 3 Modelling of branched beam

$$\begin{aligned} \theta_j &= \theta_i = \theta_p \\ y_j &= y_i = y_p \\ \phi_j &= \phi_i = \phi_p \\ M_j + M_i &= M_p \\ V_j + V_i &= V_p \\ T_j + T_i &= T_p \end{aligned} \quad (5)$$

$$\{Z\}_k = [B]_{pk} \{Z\}_p \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ Y \\ \phi \\ M \\ V \\ T \end{Bmatrix}_k = [B]_{pk}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ Y \\ \phi \\ M \\ V \\ T \end{Bmatrix}_p = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}_{pk} \begin{Bmatrix} \theta \\ Y \\ \phi \\ M \\ V \\ T \end{Bmatrix}_p \quad (6')$$

한편 k 점이 free상태이므로

$$\begin{Bmatrix} M \\ V \\ T \end{Bmatrix}_k = 0 \quad (7)$$

(7)식을 (8)식에 대입하면

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ Y \\ \phi \\ M \\ V \\ T \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} I & O \\ G & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ Y \\ \phi \\ M \\ V \\ T \end{Bmatrix}_i \quad (8)$$

여기서

$$[G] = -[B_4]^{-1}_{pk} [B_3]$$

이고 I 는 unit 행렬임.

이와 같이 상태벡터를 Z_i , 보와 좌표변환요소의 매트릭스를 B_i , T_i 라 정의하면, 각 요소의 상태벡터는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$Z_1 = [H] Z_n \quad (9)$$

여기서

$$[H] = B_1 B_2 B_3 T_1 B_4 \cdots B_7 T_2 B_8 \cdots B_n$$

한편 양단의 상태벡터 Z_1 , Z_n 는 크랭크축의 경계 조건으로부터 다음 식과 같다.

$$Z_i = \begin{pmatrix} \theta \\ Y \\ \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_i \quad Z_n = \begin{pmatrix} \theta \\ Y \\ \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_n \quad (10)$$

3. 크랭크축의 모델링 및 응력해석

크랭크축에 있는 저널(journal)부 및 핀(pin)부의 굽힘 및 비틀림모멘트를 구하여 응력해석을 하였으며 Fig. 4은 모델로 택한 크랭크축을 나타낸다.

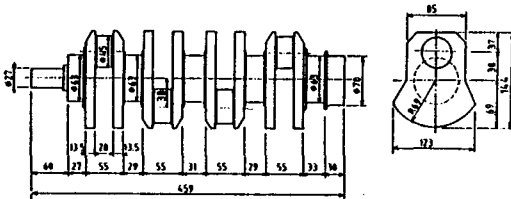


Fig. 4 The feature of crank shaft

Fig. 4에 나타난 저널부, 핀부는 도면 치수의 환봉으로 모델링을 하였으며 이때 길이는 실제 치수로 하였다. 아암(arm)부는 실제 형상과 같이 직사각형 단면으로 하였으며 두께는 기존 발표된 논문⁴⁾에서 제안한 (a), (b)의 다음 방법으로 산정하였다.

(a) 저널 부와 핀 부의 중첩이 아닌 경우

$$t_A = t(\text{아암의 두께})$$

(b) 저널 부와 핀 부의 중첩이 있는 경우

$$t_A = h(\text{아암의 목부분 두께})$$

본 연구에서는 Fig. 5와 같이 중첩의 경우로 $t_A = h$ 즉 22mm로 하였다.

Fig. 6은 크랭크축의 모델을 나타낸다. 19개의 본체 요소와 16개의 분지요소로 분할하고 16개의 좌표변환요소와 합하여 총 51개의 요소로 분할한다.

크랭크축을 5개의 저널부와 4개의 핀부로 구분하여 굽힘 및 비틀림 모멘트를 구하였다. 각 단면의 응력은 다음식으로 구하였다.

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad (11)$$

$$\tau = \frac{T}{Z_p} \quad (12)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \quad (13)$$

여기서

σ : 굽힘응력

τ : 전단응력

Z : 단면계수

Z_p : 극단면계수

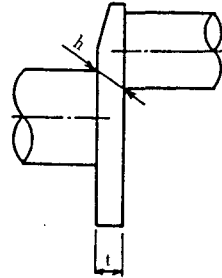


Fig. 5 Model of crank shaft arm

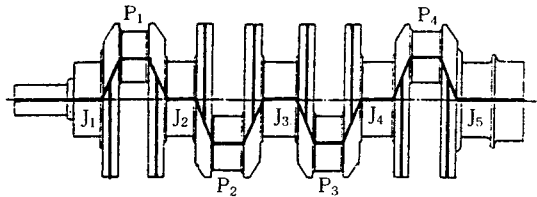


Fig. 6 Model of crank shaft

4. 결과 및 고찰

Fig. 7은 5개 저널 부분의 굽힘 및 비틀림모멘트를 나타낸 그림으로 양단보다 J_2 중양부분의 모멘트가 큰 것을 알 수 있다. 이는 양끝 부분이 중앙보다 모멘트가 적게 걸리기 때문이다. 또한 그림에서 비틀림보다 굽힘 모멘트가 대체적으로 증가하였음을 알 수 있다.

Fig. 8은 4개 핀 부분의 굽힘 및 비틀림모멘트를 나타낸 그림으로 전반적으로 비틀림모멘트가 굽힘 모멘트보다 큰 것을 알 수 있다. 이는 핀 부분이 저널부분 보다 비틀림을 많이 받기 때문이다.

Fig. 9은 저널 부분의 굽힘, 비틀림 및 합성응력을 나타낸 그림으로 합성응력은 식(13)을 이용하여 구하였다. 비틀림 응력보다 굽힘응력이 크게 나타났음을 알 수 있으며, 합성응력은 대부분이 굽힘응

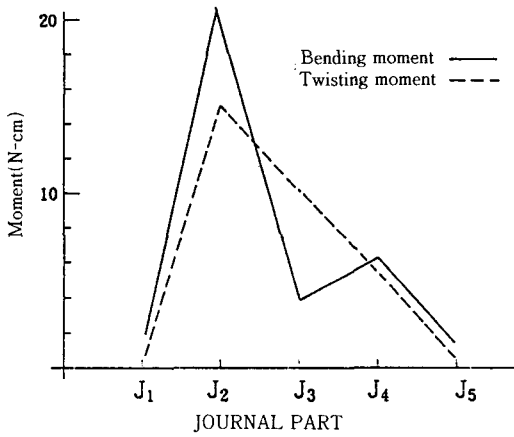


Fig. 7 Bending and twisting moment in journal part

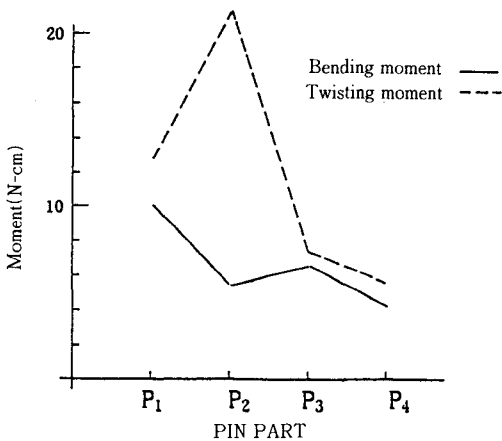


Fig. 8 Bending and twisting moment in pin part

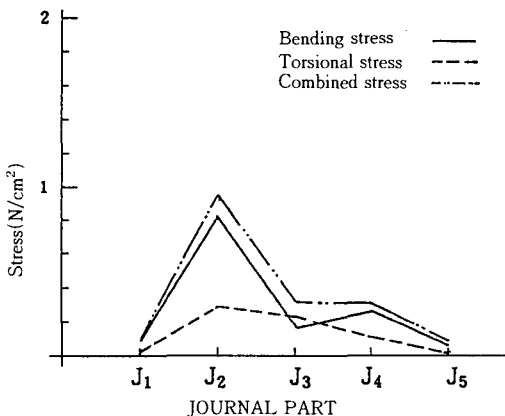


Fig. 9 Bending and torsional stress in journal part

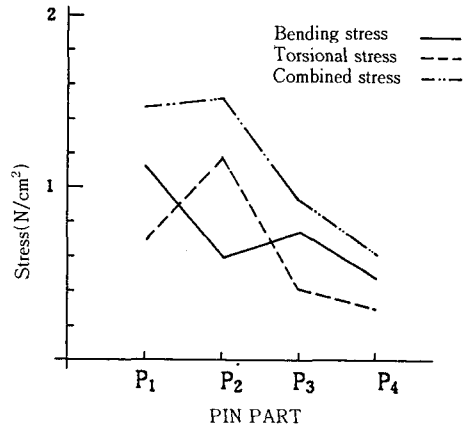


Fig. 10 Bending and torsional stress in pin part

력의 영향임을 알 수 있다.

Fig. 10은 핀 부분의 굽힘, 비틀림 및 합성응력을 나타낸 그림으로 굽힘 응력이 비틀림응력보다 p₁, p₂ 및 p₄에서 크게 나타난 것은 극 단면계수 Z_p가 단면계수 Z보다 2배가 크기 때문이다. 합성응력은 굽힘과 비틀림 응력의 영향을 많이 받고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

굽힘 및 비틀림 모멘트를 이용하여 크랭크축의 응력해석을 한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 크랭크축의 각도변화 및 분지부분을 고려하여 응력해석하는 방법을 제시하였다.
- (2) 저널부분의 경우 비틀림응력보다 굽힘응력의 영향이 큰 것을 알 수 있다.
- (3) 핀 부분의 경우 굽힘모멘트보다 비틀리모멘트가 큰 것을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- 1) Young-Chool han, "A Study on the viscous torsional Stress Damper in a high Speed Diesel Engine" Ph. D. Thesis, Hanyang University, 1981.
- 2) 박윤식, 제양규, 오동엽, "크랭크축의 모우드 해석에 관한 연구" 자동차공학회지 Vol.7, No.4,

- 1985.
- 3) Akio Nagamaatsu and Masaru Nagaïke, "Analysis of Movable Part of Internal Combustion Engine" Bulletin of the JSME, Vol.26, No.215. pp. 827~831, 1983.
- 4) Hideo Okamura and Akio Shinno "Dynamic Stiffness Matrix Method for three-dimensional Analysis of Crank Shaft Vibration" Trans. of JSME, Vol.55, No.516, pp.1965~1973, 1989.
- 5) Eduard C. Pestal and Frederick A. Leckie, "MATRIX METHODS IN ELASTO MECHANICS" MCGRAW-HILL BOOK Co., pp.82~89, 1963.
-