

# 最小제곱법에 의한 TRAVERSE網의 理論的 調整法 A Study on the Theoretical Adjustment of Traverse Networks by the Method of Least Squares

李啓鶴\* · 成水鍊\*\* · 朴福奉\*\*\*

Lee, Kye-Hak · Sung, Soo-Lyeon · Park, Bok-Bong

## 要 旨

本 研究에서는 traverse測量에 있어서 여러 개의 環으로 이루어진 網을 測角과 測距의 重量을 同時에 考慮하여 精密하게 調整할 수 있는 理論的 調整法을 提示하였다. 또한, 本 理論的 調整法으로 調整한 角과 距離를 다른 調整法들과 比較 檢討한 結果 本 理論的 調整法의 妥當性이 立證되었다.

## ABSTRACT

This paper dealt with the theoretical adjustment of the closed nets with the various links by weight of the observed angles and distances. In addition to the results of checking between this theoretical adjustment method, the compass rule and transit rule, the theoretical adjustment method is more accurate than other adjustments.

## 1. 序 論

從來, Traverse測量의 閉合誤差는 普通 compass 및 transit rule로 調整해 왔다. 또한 traverse測量에서 發生하는 閉合誤差를 測角과 測距의 重量을 相對的으로 決定하여 그들의 重量을 考慮한 調整法이 既存의 調整法보다 精密하게 調整할 수 있다는 理論的 調整法도 既히 發表한 바 있다.<sup>1,3)</sup>

本 研究에서는 最近에 導入한 Electronic Total Station (Set 3)으로 觀測한 data를 가지고 最小제곱法을 利用하여 測角과 測距의 重量을 同時에 考慮한 여러 環狀의 traverse網을 精密히 調整할 수 있는 理論的 調整法을 提示하였다.

따라서 本 理論的 調整法으로 調整한 結果값을 다른 compass, transit rule로 調整한 角과 距離들과 比較 檢討함으로써 本 理論的 調整法의 信賴性을 檢討하였다.

## 2. 基本 理論

### 2.1 角의 閉合誤差 調整

Traverse網을 形成하고 있는 各 traverse環마다 內(外)角의 總合에 대한 角의 閉合誤差를  $d_i$ , 各 角에 實施하는 全體調整量을  $z$ , 角의 重量을  $q$ 라 하면, 各 環에 대한 條件式  $[z]_i + d_i = 0$ 을 滿足하게  $[qz^2]$ 을 最小로 하는  $z$ 를 求한다.<sup>4,5)</sup>

例를 들면, 그림 1과 같은 경우는 I~IV의 各 環에 대해서 角의 閉合誤差  $d_I \sim d_{IV}$ , I~IV 環에 關한 未定係數를 各各  $K_I \sim K_{IV}$ 라 하여 다음 式을 最小로 하는  $z$ 를 求하면 된다.

$$S = [qz^2] - 2K_I\{[z]_I + d_I\} - 2K_{II}\{[z]_{II} + d_{II}\} - 2K_{III}\{[z]_{III} + d_{III}\} - K_{IV}\{[z]_{IV} + d_{IV}\} \quad (1)$$

### 2.2 緯·經距의 閉合誤差 調整

前項에서 調整된 角을 利用하여 計算한 方位角을  $\theta$ , 測定距離를  $l$ 이라 하면, 各 traverse環에 대한 緯·經距의 閉合誤差  $d_i$ (緯距誤差),  $d'_i$ (經距誤差)는 各各  $[\cos\theta]_i = d_i$ ,  $[\sin\theta]_i = d'_i$ 로 求한다.<sup>6,9)</sup>

\*湖南大學校 工科大學 土木工學科 教授  
\*\*全南大學校 大學院 土木工學科 博士課程  
\*\*\*湖南大學校 大學院 土木工學科 碩士課程

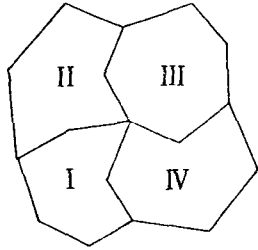


그림 1. Traverse 網圖

지금  $l$  및  $\theta$ 의 調整量을  $x, y$ 라 하면 最確值은  $(l+x), (\theta+y)$ 가 되므로 高次의 微分項을 省略하면 各環에 대하여

$$\begin{aligned} [\text{xcos}\theta]_i - [\text{lysin}\theta]_i + d_i &= 0 \\ [\text{xsin}\theta]_i - [\text{lycos}\theta]_i + d_i &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

의 條件式이 얻어지고, 測定角誤差  $y$ 에 의한 測點의 偏位量은  $(l+x)y \approx ly$ 이므로  $ly$ 의 重量을  $r$ 이라 하면,  $(ly)^2$ 에 反比例 한다. 또한, 全測定角誤差를  $\delta$ , 精度(閉合比)를  $A$ , 測定距離를  $l$ 라 하면 角測定值의 重量  $q$ 는 다음 식 (3)으로 表示된다.<sup>10,11)</sup>

$$q = \frac{A^2}{1 \times \left(\frac{\delta}{206265}\right)^2} \quad (3)$$

그런데, 距離 그리고 角測定值의 重量  $p$  및  $q$ 에 利用되는 要素는 測定距離  $l$ , 精度  $A$ 이므로  $r$ 을  $q, l$  및  $A$ 로 정리하면 式 (4)와 같다.<sup>12,13)</sup>

$$r/q \left\{ \frac{p}{(Al)} \right\}^2 = \frac{q}{(Al)^2} \quad (4)$$

여기서, 距離測定值의 重量  $p, (ly)$ 의 重量을  $r$ 이라 하면 最小제곱法에 의해 위의 式 (2)의 條件 下에  $[p x^2] + [r (ly)^2]$ 을 最小로 하는  $x, y$ 를 求하면 된다.

I~IV의 各環에 대한 緯距·經距의 閉合誤差 ( $d_1, d_2, (d_3, d_4), (d_5, d_6), (d_7, d_8)$ )을 求하기 위해 各環에 關한 未定係數를 各各 ( $K_1, K_2, (K_3, K_4), (K_5, K_6), (K_7, K_8)$ )라 하면

$$\begin{aligned} S = & [p x^2] + [r (ly)^2] \\ & - 2K_1[\text{xcos}\theta] - [\text{lysin}\theta] + d_1 \\ & - 2K_2[\text{xsin}\theta] + [\text{lycos}\theta] + d_2 \\ & - 2K_3[\text{xcos}\theta] - [\text{lysin}\theta] + d_3 \\ & - 2K_4[\text{xsin}\theta] + [\text{lycos}\theta] + d_4 \\ & - 2K_5[\text{xcos}\theta] - [\text{lysin}\theta] + d_5 \\ & - 2K_6[\text{xsin}\theta] + [\text{lycos}\theta] + d_6 \\ & - 2K_7[\text{xcos}\theta] - [\text{lysin}\theta] + d_7 \\ & - 2K_8[\text{xsin}\theta] + [\text{lycos}\theta] + d_8 \end{aligned} \quad (5)$$

와 같이 된다.

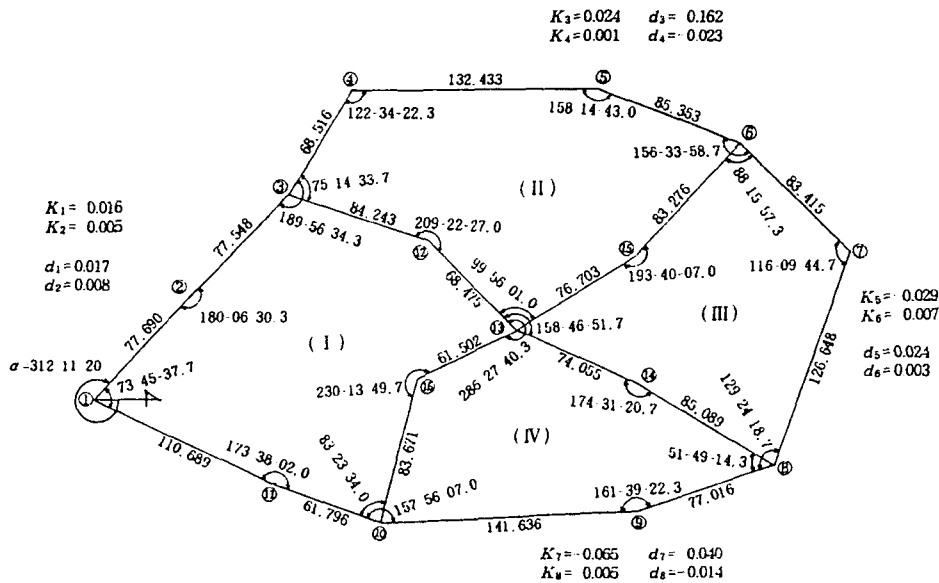


그림 2. 觀測 traverse 網圖

다음 그림 2에서 第1環의 x, y값을 計算하면 式 (6), (7), (8)과 같고,

$$\begin{aligned} \cdot \text{測點 } 10\sim 2 : x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} K_1 + \frac{\sin\theta_i}{p_i} K_2, \\ y_i &= \frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} K_1 + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} K_2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{測點 } 3\sim 12 : \\ x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} (K_1 - K_3) + \frac{\sin\theta_i}{p_i} (K_2 - K_4) \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} (K_1 - K_3) + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} (K_2 - K_4) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{測點 } 13\sim 16 : \\ x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} (K_1 - K_7) + \frac{\sin\theta_i}{p_i} (K_2 - K_8) \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} (K_1 - K_7) + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} (K_2 - K_8) \end{aligned} \quad (8)$$

같은 方法으로 第2環, 第3環, 第4環의 x, y값도 計算할 수 있다. 즉, 第2環의 x, y값은

$$\begin{aligned} \cdot \text{測點 } 3\sim 5 : x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} K_3 + \frac{\sin\theta_i}{p_i} K_4, \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} K_3 + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} K_4 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{測點 } 6\sim 15 : \\ x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} (K_3 - K_5) + \frac{\sin\theta_i}{p_i} (K_4 - K_6) \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} (K_3 - K_5) + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} (K_4 - K_6) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{測點 } 13\sim 12 : \\ x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} (K_3 - K_1) + \frac{\sin\theta_i}{p_i} (K_4 - K_2) \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} (K_3 - K_1) + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} (K_4 - K_2) \end{aligned} \quad (11)$$

第3環의 x, y값은

$$\begin{aligned} \cdot \text{測點 } 6\sim 7 : x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} K_5 + \frac{\sin\theta_i}{p_i} K_6, \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} K_5 + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} K_6 \end{aligned} \quad (12)$$

· 測點 8~14 :

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} (K_5 - K_7) + \frac{\sin\theta_i}{p_i} (K_6 - K_8) \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} (K_5 - K_7) + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} (K_6 - K_8) \end{aligned} \quad (13)$$

· 測點 13~15 :

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} (K_5 - K_3) + \frac{\sin\theta_i}{p_i} (K_6 - K_4) \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} (K_5 - K_3) + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} (K_6 - K_4) \end{aligned} \quad (14)$$

第4環의 x, y값은

$$\begin{aligned} \cdot \text{測點 } 8\sim 9 : x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} K_7 + \frac{\sin\theta_i}{p_i} K_8, \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} K_7 + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} K_8 \end{aligned} \quad (15)$$

· 測點 10~15 :

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} (K_7 - K_1) + \frac{\sin\theta_i}{p_i} (K_8 - K_2) \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} (K_7 - K_1) + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} (K_8 - K_2) \end{aligned} \quad (16)$$

· 測點 13~14 :

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\cos\theta_i}{p_i} (K_7 - K_5) + \frac{\sin\theta_i}{p_i} (K_8 - K_6) \\ y_i &= -\frac{\sin\theta_i}{r_i l_i} (K_7 - K_5) + \frac{\cos\theta_i}{r_i l_i} (K_8 - K_6) \end{aligned} \quad (17)$$

과 같다.

이 경우 未定係數를 求하는 正規方程式은 다음 式 (18)과 같고,

$$\begin{aligned} A_1 K_1 + B_1 K_2 - a_{1.11} K_3 - b_{1.11} K_4 - a_{1.14} K_7 - b_{1.14} K_8 + d_1 &= 0 \\ B_1 K_1 + C_1 K_2 - b_{1.11} K_3 - c_{1.11} K_4 - b_{1.14} K_7 - c_{1.14} K_8 + d_2 &= 0 \\ A_{11} K_3 + B_{11} K_4 - a_{1.11} K_1 - b_{1.11} K_2 - a_{1.13} K_5 - b_{1.13} K_6 + d_3 &= 0 \\ B_{11} K_3 + C_{11} K_4 - b_{1.11} K_1 - c_{1.11} K_2 - b_{1.13} K_5 - c_{1.13} K_6 + d_4 &= 0 \\ A_{111} K_5 + B_{111} K_6 - a_{1.111} K_3 - b_{1.111} K_4 - a_{1.114} K_7 - b_{1.114} K_8 + d_5 &= 0 \\ B_{111} K_5 + C_{111} K_6 - b_{1.111} K_3 - c_{1.111} K_4 - b_{1.114} K_7 - c_{1.114} K_8 + d_6 &= 0 \\ A_{114} K_7 + B_{114} K_8 - a_{1.114} K_1 - b_{1.114} K_2 - a_{1.113} K_5 - b_{1.113} K_6 + d_7 &= 0 \\ B_{114} K_7 + C_{114} K_8 - b_{1.114} K_1 - c_{1.114} K_2 - b_{1.113} K_5 - c_{1.113} K_6 + d_8 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$A, a = \left[ \frac{\cos^2 \theta}{p} \right] + \left[ \frac{\sin^2 \theta}{r} \right]$$

여기서,

$$B, b = \left[ \frac{\sin \theta \cos \theta}{p} \right] - \left[ \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \right]$$

$$C, c = \left[ \frac{\sin^2 \theta}{p} \right] + \left[ \frac{\cos^2 \theta}{r} \right]$$

위의 A, B, C는 그 環全體에 대해서, a, b, c는 그 環과 隣接環과의 共通部分에 對해서의 값을 合算한 것이다.

따라서 式 (18)의 正規方程式을 풀어 各環의 未定係數  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$ 을 求한 다음 距離 l 및 方位角  $\theta$ 의 調整量 x, y를 求한다.

### 3. 試驗觀測 및 調整量 比較

#### 3.1 觀測器種 및 方法

本 研究에서는 그림 2와 같은 閉合traverse를 1993年 8月 21日~22日 全南 高興 公設運動場 新設 敷地에 設置하고, 日産 Sokkisha製 Electronic Total Stations (Set 3)를 使用하여 測線距離를 90~150 m 範圍로 觀測하였다.

또한, 角은 觀測對回를 正反으로 하여 3倍角으로 觀測하였고, 觀測距離는 6回 觀測하여 平均값을 取하였으며, 氣象補正에 있어서는 760 mmHg, 30°C에 對한 氣象補正값 18 ppm으로 補正하여 測定하였다.<sup>14)</sup>

#### 3.2 3가지 調整法의 調整量 比較

只今, 그림 2와 같은 閉合traverse를 觀測하여 (1) 本 方法, (2) compass 法則, (3) transit 法則의 3가지 方法으로 調整한 調整量을 表 1에 나타냈다.

또한, 各 調整法에 의한 距離 및 角의 調整量을 比較하면 그림 3 및 그림 4와 같다. 그림 4에 나타난 바와 같이 本 理論的 調整法에 의한 角調整量은 거의 0에 接近함을 알 수 있다. 따라서 traverse 測量의 誤差調整에 있어서 距離 및 角의 重量을 考慮한 本 理論的 調整法이 在來의 compass 및 transit法則 보 다도 더 信賴性이 높다고 思料된다.

### 4. 結 論

本 研究에 있어서 測距와 測角의 重量을 考慮한

표 1. 各 調整法에 의한 距離 및 角의 調整量

測點	距離(mm)			角(sec)		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
1	0	-2	-9	0.8	-19.3	-13.5
2	16	-10	-10	-0.2	-20.2	-14.4
3	-24	-8	-6	0.2	-24.3	-12.5
4	-12	-21	-26	-0.6	4.7	0.0
5	-22	-12	-14	-0.4	17.4	20.1
6	29	-8	-7	0.2	26.6	26.6
7	19	10	9	0.7	29.1	9.0
8	45	13	14	2.2	5.8	7.7
9	63	22	-62	0.4	-3.7	-3.2
10	17	9	11	0.1	-17.7	-16.7
11	16	15	17	-0.1	-17.1	-21.2

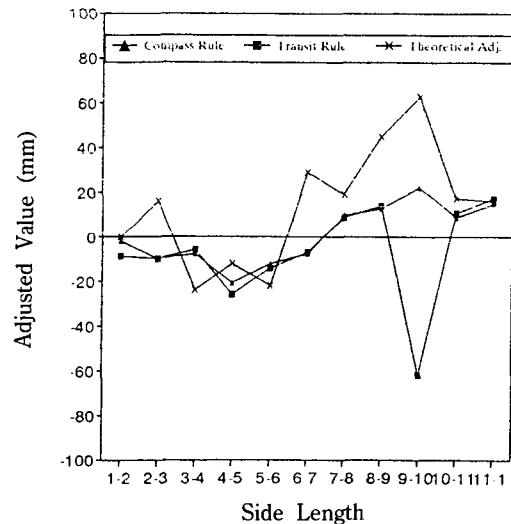


그림 3. 各 調整法에 의한 距離 調整量

여러 環으로 이루어진 traverse網을 最小제곱法으로 調整한 結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

1. 本 調整法에 依하면 距離의 調整量은 다른 調整法(compass, transit rule)과 거의 비슷하나, 角의 調整量은 微小한 값으로 나타났다.

2. 本 方法은 角의 調整量이 微小하므로 座標軸의 方向에는 거의 變化가 없지만, 다른 方法은 座標軸의 方向이 變하므로 調整量도 變한다.

따라서, 1等 多角測量, 廣範圍의 多角測量 등을 이 方法에 의해서 調整하면 信賴性이 높은 精度를 期待할 수 있다.

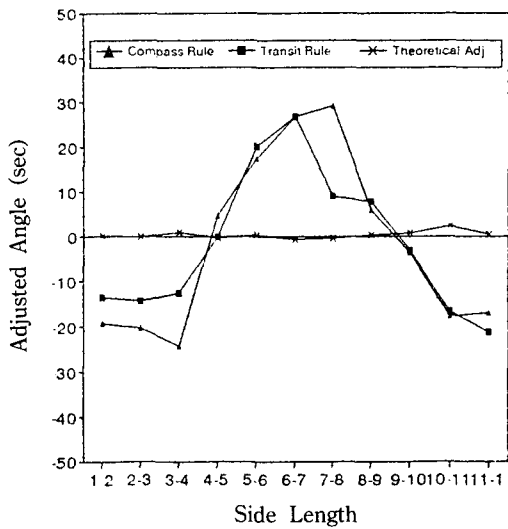


그림 4. 各 調整法에 의한 角 調整量

參考文獻

1. 李啓鶴, “測角과 測距를 考慮한 閉合트래버스網의 同時調整”, 韓國測地學會誌, 第 8卷, 第 1號, pp. 51-56, 1990.
2. 李啓鶴 外 2人, “Traverse 測量에 있어서 閉合誤差의

- 理論的 調整”, 韓國測地學會誌, 第 8卷, 第 2號, pp. 31-34, 1990.
3. 李啓鶴, “閉合 Traverse 測量에서 誤差配分에 關한 研究”, 全南大 工技研誌, 第 5輯, pp. 121-127, 1969.
4. 石川甲子男 外 2人, 測量の爲ための最小二乘法, 實教出版, pp. 115-118, 1982.
5. Edward M. Mikhail, “Observations and Least Squares”, Thomas Y. Crowell Company, pp. 3-70, 1976.
6. Kissam, P., Surveying for Civil Engineers, 2nd ed., McGraw-Hill, pp. 140-142, 1981.
7. Davis R. E. et al., Surveying Theory and Practice, 6th ed., McGraw-Hill, pp. 254-257, 1981.
8. 春日屋伸昌, 測量學 I, 朝倉書店, pp. 144-162, 1978.
9. 岡積 滿 外 1人, “測量の視準誤差について”, 日本土木學會 學術講演會 概要集, pp. 116, 1-2, 1965.
10. 龜田和昭, “角測定値の誤差について” 日本大學工學部 學術講演會 論文集, pp. 87-88, 1973.
11. 齊藤暢夫, 測量誤差の處理法, 日本測量協會, pp. 100-101, 1978.
12. 日本測量協會, 現代測量學-3. 一般測量-, pp. 299-302, 1982.
13. 李啓鶴, “水平角 觀測値의 誤差에 關한 考察”, 全南大 工技研誌, 第 13輯, pp. 113-122, 1977.
14. 李啓鶴, “電磁波測距儀의 特性과 利用에 關하여”, 全南大 工技研誌, 第 17輯, pp. 107-126, 1980.