

境界要素法을 이용한 非線形波의 再現 Simulation of Nonlinear Water Waves using Boundary Element Method

吳榮敏* · 李吉成** · 全仁植*

Young Min Oh*, Kil Seong Lee** and In Sik Chun*

要 旨 : Laplace 方程式을 Green 公式으로 해석한 境界要素法을 이용하여 數値水槽에서 非線形波를 再現하였다. 未知數는 유체영역의 경계에 설정한 각 節点에서의 속도포텐셜과 水面變位이며 이를 구하기 위하여 支配方程式과 자유수면 경계조건을 기본식으로 하는 연립 1차방정식을 구성하였다. 動力學的 自由水面 境界條件에서 속도의 제곱항을 고려하였으며 자유수면 경계에서 속도포텐셜의 연직변화를 고려하여 이의 時間微分을 계산하였다. 본 數値모델을 이용하여 孤立波와 Stokes의 2次 波浪을 재현한 결과, 理論値와 매우 잘 일치함을 확인하였다.

Abstract □ Boundary element method is applied to simulate nonlinear water waves using Green's identity formula in a numerical wave flume. A system of linear equations is formulated from the governing equation and free surface boundary conditions in order to calculate velocity potential and water surface elevation at each nodal point. The velocity square terms are included in the dynamic free surface boundary condition. The free surface is treated as a moving boundary, the vertical variation of velocity potential being considered in calculating the time derivative of the velocity potential at the free surface. The present method is applied to simulate solitary wave and Stokes 2nd order wave, and shows excellent agreements with their theoretical values.

1. 緒 論

해안 구조물에 작용하는 파압이나 쳐올림 높이 등을 계산하기 위하여 대부분의 경우 微小振幅波로 가정한 線形波 이론을 이용하고 있다. 그러나, 일반적으로 구조물의 설계에 사용되는 파랑조건은 미소진폭파의 적용범위를 벗어나는 경우가 많으므로, 정확한 계산을 위해서는 파랑을 지배하는 運動方程式과 경계조건에서 모든 非線形 項을 고려하는 계산기법의 개발이 필요하다.

경계요소법을 이용하여 파의 비선형 해를 구하는 기법이 Ijima and Nagata(1980), Nakayama(1983), Kim *et al.*(1983), 金南亨等(1991)에 의하여 발전되어 왔다. 이 기법에서는 Laplace 방정식을 풀기 위하여 Green 공식을 이용하여 자유표면에서의 비선형 경

계조건을 직접 적분방정식에 포함시키기 때문에 3차원 파동장에서의 적용이 용이하다. 그러나, 시간적으로 형상이 변화하는 자유표면 경계에서의 積分方程式을 푸는 것은 매우 어려운 문제점이 있다. 이러한 變動境界를 취급하는 방법으로는 변동경계상의 節点을 속도 Potential에 따라서 Lagrangian 적으로 변동시키는 방법(Kioka, 1983)과 미리 절점의 변동방향을 규정하는 방법(大山, 1985)이 있다. 前者는 碎波時 파가 말릴 때까지 계산이 가능하지만 요소의 길이가 시간적으로 변하고 부분적으로 節点의 거리가 멀어지기 때문에 미리 시간 Step도 함께 포함하여 要素를 짧게 재분할하여야 한다. 여기에 대해서 後者は 파가 말리는 경우 해석이 불가능하지만 전자에 비해서 요소길이의 시간변화가 작기 때문에 要素分割數를 상대적으로 적게 할 수 있다.

*韓國海洋研究所 海洋工學研究部 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan, Korea)

**서울대학교 工科大学 土木工學科 (Department of Civil Engineering, Seoul National Univ., Seoul, Korea)

自由表面을 變動境界로서 취급할 때 주의하여야 할 것은 우선 자유표면상의 절점에 관한 속도 포텐셜의 시간 변화를 평가할 때 節点의 空間 변위의 영향을 고려할 필요가 있다. Nakayama and Washizu(1981)는 이를 고려하지 않고 動力學的 자유수면 境界조건에 補正係數를 도입하여 매 계산시간마다 誤差를 보정 하였으나 과의 비선형성이 강하면 해가 발산하는 단 점이 있다.

본 연구에서는 動力學的 自由水面 境界條件에서 速度의 제곱항을 고려하고 또한 속도포텐셜의 시간 변화를 계산할 때 大山(1985)의 方法에서는 Δt 의 1차항까지만 고려하였으나 여기서는 Δt 의 2차항을 포함하는 수치모델의 개발을 시도하였다. 아울러 자유 표면상의 절점에 관한 속도 포텐셜의 시간 변화를 계산하기 위하여 각 節点에서 空間 변위의 영향을 고려하였다.

2. 境界要素法을 이용한 數值모델의 구성

2.1 境界積分方程式과 離散化

수치 조파수조에서 비선형 파랑을 재현하기 위하여 Fig. 1과 같은 2차원 流體領域을 설정하였다. 유체영역은 造波境界 S_c 에서 발생한 有限振幅波가 x 의 正方向으로 진행하고 壁面境界 S_v 에서 반사하는 구조를 가지고 있다. 조파경계는 조파판에 대응하는 것으로서 발생시키고자 하는 과의 水平方向 水粒子 速度를 강제로 부여하였으며 壁面경계는 조파경계로부터 충분히 멀리 떨어진 위치에 설정하였다. 유체는 非粘性 非壓縮性을, 유체운동은 非回轉性을 가정하였다. 이러한 조건하에서 속도 Potential ϕ 에 관한 지배방정식과 境界조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{on the bottom}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S_v) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -U(z, t) \quad (\text{on } S_c) \quad (4)$$

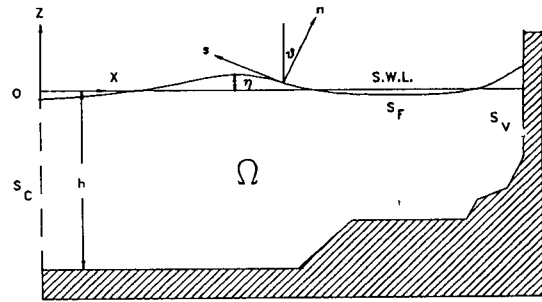


Fig. 1. Definition sketch of 2-dimensional fluid domain.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_z \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (\text{on } S_f) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad (\text{on } S_f) \quad (6)$$

여기서, n, s 는 각각 境界面에서의 外向 法線과 接線 方向을 나타내고 n_z 는 外向 法線벡터의 z 방향성분이며 자유수면이 수평축과 이루는 각도를 θ 라 할 때 $\cos\theta$ 에 해당한다. 또한, η 는 鉛直上方向을 正으로 하였을 때의 平均水面으로부터의 수면변동량이며 식 (4)의 U 는 조파경계에서 부여하는 발생파의 水平 水粒子 速度이다. 식 (1)은 2차원 Laplace 방정식으로 지배 방정식이며 식 (2)와 (3)은 각각 바닥면과 壁面의 不透過 境界조건이고 식 (4)는 조파경계이다. 또한 식 (5)와 (6)은 자유수면에서의 運動學的 및 動力學的 境界條件이다.

境界積分方程式을 유출하기 위하여 Green 공식과 加重殘差法 (Weighted residual method)을 이용하였다. 식 (1)을 유체영역 Ω 에서 Green 公式를 적용하면 유체영역을 포함한 境界 S 상의 점 $P(x_P, z_P)$ 에서의 속도 Potential $\phi(P)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi(P) = -\frac{1}{\alpha(P)} \int_S \left\{ \phi \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} G \right\} ds \quad (7)$$

$$G(P, Q) = \ln \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \quad (8)$$

여기서, $Q(x_Q, z_Q)$ 는 境界상의 점이고 α 는 점 P 의 양 측이 이루는 內角이다. 식 (2)-(5)를 식(7)에 대입하여 정리하면 최종적으로 다음과 같은 식이 얻어진다.

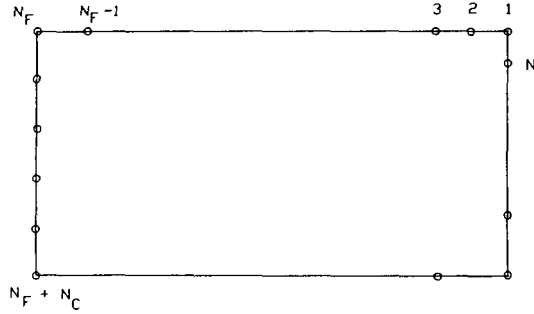


Fig. 2. Discretization of fluid domain for calculating fluid motion.

$$\phi(P) = \frac{-1}{\alpha(P)} \left\{ \int_S \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_{S_F} n_z \frac{\partial \eta}{\partial t} G ds + \int_{S_C} UG ds \right\} \quad (9)$$

한편, 식 (6)에 대해서는 식 (5)를 대입하여 加重殘差變數 ω 를 이용한 加重殘差法을 적용한다. 이렇게 하여 얻어진 식은 다음과 같다.

$$\int_{S_F} \omega \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ (n_z)^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 \right\} + g\eta \right] ds = 0 \quad (10)$$

식 (9)와 (10)으로 주어진 積分方程式을 수치적으로 풀기 위하여 Fig. 2와 같이 평평한 벽면경계와 바다 경계를 갖는 유체영역을 가정하고 경계면을 여러 개의 節점으로 나누었으며 각 節점에서의 數值解를 구하기 위하여 離散化를 실시한다. 이를 이산화하기 위하여 未知變數는 境界요소내에서 1차함수로 표시할 수 있다고 가정하고 j 번째 節점과 $j+1$ 번째 節점이 이루는 線要素의 번호를 J 로 정의한다. 이때 J 번째 線要素내의 미지변수 ϕ 는 다음과 같은 線形 內插函數 N_J 로 나타낼 수 있다.

$$\phi = N_J^T \phi_j, \quad N_J^T = \left\{ 1 - \frac{s}{l_j}, \frac{s}{l_j} \right\}, \quad \phi_j^T = \{\phi_j, \phi_{j+1}\} \quad (11)$$

여기서, l_j 는 J 번째 요소의 길이를 나타내며 T 는 벡터의 前置(Transpose)이다. 다른 미지변수들($\phi_i, \eta, \eta_i, U, \omega$)도 식 (11)과 같은 방법으로 나타낼 수 있다. 이러한 線形 內插函數로 표시된 식을 식 (9) 및 (10)에

대입하면 다음과 같은 離散化 식을 얻을 수 있다.

$$\alpha_i \phi_i + \sum_{j=1}^N A_{ij}^T \phi_j - \sum_{j=1}^{N_F-1} (n_z)_j B_{ij}^T (\eta_i)_j + \sum_{j=N_F}^{N_F+N_C-1} B_{ij}^T U_j = 0, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

여기서,

$$A_{ij}^T = \int_0^{l_j} N_j^T \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad B_{ij}^T = \int_0^{l_j} N_j^T G ds$$

$$\sum_{j=1}^{N_F-1} \omega_j^T \left[\int_0^{l_j} N_j N_j^T ds (\phi_i)_j + \frac{1}{2} \left\{ (n_z)_j^2 \int_0^{l_j} N_j N_j^T (\eta_i)_j N_j^T ds (\eta_i)_j + \frac{1}{l_j^2} \int_0^{l_j} N_j ds E^T \phi_j E^T \phi_j \right\} + g \int_0^{l_j} N_j N_j^T ds \eta_j \right] = 0 \quad (13)$$

여기서,

$$E^T = (-1, 1)$$

한편, 식 (10)의 $\partial \phi / \partial s$ 는 다음과 같은 離散化 식으로 표시하였다.

$$(\phi_s)_j = \frac{1}{l_j} (\phi_{j+1} - \phi_j) = \frac{1}{l_j} E^T \phi_j \quad (14)$$

식 (13)을 ω 에 관하여 다시 쓰면

$$\sum_{j=1}^{N_F} \gamma_j \omega_j = 0 \quad (15)$$

단, γ_j 는 다음과 같다.

$$\gamma_1 = a_1 \left\{ 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_2 \right\} + b_1 \left\{ 3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_1^2 + 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_2^2 \right\} + c_1 (\phi_2 - \phi_1)^2 + g a_1 (2\eta_1 + \eta_2)$$

$$\gamma_j = a_{j-1} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{j-1} + 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_j \right\} + a_j \left\{ 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_j + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{j+1} \right\} + b_{j-1} \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{j-1}^2 + 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{j-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_j + 3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_j^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + b_j \left\{ 3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_j^2 + 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_j \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{j+1} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{j+1}^2 \right\} \\
 & + c_{j-1} (\phi_j - \phi_{j-1})^2 + c_j (\phi_{j+1} - \phi_j)^2 \\
 & + g a_{j-1} (\eta_{j-1} + 2\eta_j) + g a_j (2\eta_j + \eta_{j+1}) \\
 & , (j=2, 3, \dots, N_F-1) \\
 \gamma_{N_F} = & a_{N_F-1} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{N_F-1} + 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{N_F} \right\} \\
 & + b_{N_F-1} \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{N_F-1}^2 + 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{N_F-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{N_F} \right. \\
 & \left. + 3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{N_F}^2 \right\} + c_{N_F-1} (\phi_{N_F-1} - \phi_{N_F})^2 \\
 & + g a_{N_F-1} (\eta_{N_F-1} + 2\eta_{N_F}) \quad (16)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$a_j = \frac{l_j}{6}, \quad b_j = \frac{l_j(n_z)^2}{24}, \quad c_j = \frac{1}{4l_j}$$

식 (15)가 임의의 加重殘差函數에 대하여 성립하기 위해서는 다음 식을 만족해야 한다.

$$\gamma_j = 0; \quad j=1, 2, \dots, N_F \quad (17)$$

2.2 逐次計算에 의한 해석

離散化 方程式 (12)와 (17)을 풀면 유체운동을 계산할 수 있다. Nakayama and Washizu(1981)는 자유수면상의 節點이 鉛直으로 변동한다고 가정하여 η , ϕ 를 시간 Step에 의한 증분 $\Delta\eta^{(n)}$, $\Delta\phi^{(n)}$ 에 의하여 다음과 같이 표현하였다.

$$\eta^{(n)} = \eta^{(n-1)} + \Delta\eta^{(n)} \quad (18)$$

$$\phi^{(n)} = \phi^{(n-1)} + \Delta\phi^{(n)} \quad (19)$$

따라서, η , ϕ 의 時間偏微分値 $\partial\eta/\partial t$, $\partial\phi/\partial t$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^{(n)} = \frac{2\Delta\eta^{(n)}}{\Delta t} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^{(n-1)} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n)} = \frac{2\Delta\phi^{(n)}}{\Delta t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n-1)} \quad (21)$$

이 관계식은 $\partial\eta/\partial t$ 와 $\partial\phi/\partial t$ 가 단위 시간간격에 대해서 선형으로 변화한다는 전제하에서 성립하는데, 실제로는 자유수면상의 節點이 鉛直方向으로 변화하기 때

문에 완전한 식이라고 할 수가 없다. 다시 말하면 $\partial\eta/\partial t$ 는 관계가 없지만 $\partial\phi/\partial t$ 는 ϕ 가 z 의 함수라 적절한 표현이 아니다. 따라서, 식 (21)에 대해서는 z 를 포함하는 새로운 關係式을 구성해야 한다. 이를 위하여 $\Delta\phi^{(n)}$ 을 1 Step 전의 값을 이용하여 Taylor 級數를 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi^{(n)} = & \Delta t \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n-1)} + \Delta\eta^{(n)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^{(n-1)} \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)^{(n-1)} + 2\Delta t \Delta\eta^{(n)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \right)^{(n-1)} \right. \\
 & \left. + (\Delta\eta^{(n)})^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^{(n-1)} \right\} + \dots \quad (22)
 \end{aligned}$$

같은 방법으로 $(\partial\phi/\partial t)^{(n)}$ 에 대해서도 급수전개를 하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n)} = & \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n-1)} + \Delta t \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)^{(n-1)} \\
 & + \Delta\eta^{(n)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^{(n-1)} + \dots \quad (23)
 \end{aligned}$$

식 (22)와 (23)으로부터 $\Delta\phi^{(n)}$ 및 $\Delta\eta^{(n)}$ 을 이용하여 $(\partial\phi/\partial t)^{(n)}$ 을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n)} = & \frac{2\Delta\phi^{(n)}}{\Delta t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n-1)} - \frac{2\Delta\eta^{(n)}}{\Delta t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^{(n-1)} \\
 & - \Delta\eta^{(n)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \right)^{(n-1)} \\
 & - \frac{(\Delta\eta^{(n)})^2}{\Delta t} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^{(n-1)} + \dots \quad (24)
 \end{aligned}$$

여기서, $\Delta\eta^{(n)}$ 은 Taylor 전개로부터

$$\Delta\eta^{(n)} = \Delta t \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^{(n-1)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right)^{(n-1)} + \dots \quad (25)$$

가 되는데, 이를 식 (24)의 제 4, 5항에 대입하여 $(\Delta t)^2$ 까지 전개하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n)} = & \frac{2\Delta\phi^{(n)}}{\Delta t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{(n-1)} \\
 & - \frac{\Delta\eta^{(n)}}{\Delta t} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^{(n-1)} + \Delta(\phi_z)^{(n)} \right\} \quad (26)
 \end{aligned}$$

여기서 $\Delta(\phi_z)^{(n)}$ 은 $\partial\phi/\partial z$ 를 시간에 관해서도 Taylor 전개하면 얻을 수 있는데 그 결과는 다음과 같다.

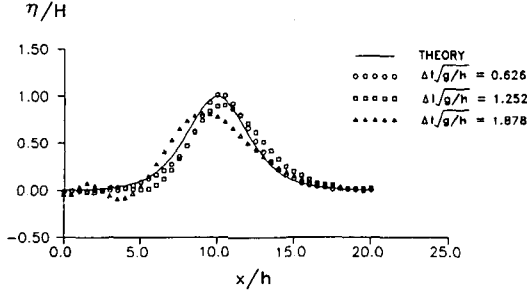


Fig. 3. Comparison of the solitary wave profiles for different time increments employed ($H/h=0.2$, $\Delta x/h=0.5$).

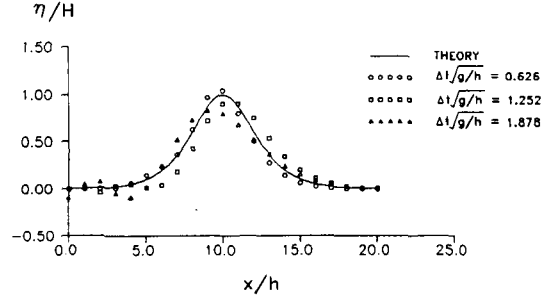


Fig. 4. Comparison of the solitary wave profiles for different time increments employed ($H/h=0.2$, $\Delta x/h=1.0$).

$$\Delta t \left\{ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \right)^{(n-1)} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^{(n-1)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^{(n-1)} \right\} = \Delta(\phi_z)^{(n)} \quad (27)$$

단, $\Delta(\phi_z)^{(n)} = (\partial\phi/\partial z)^{(n)} - (\partial\phi/\partial z)^{(n-1)}$ 이다.

식 (18)-(20), (26)을 離散化 方程式 (12), (17)에 대입하여 $(\Delta\phi)^{(n)}$, $(\Delta\eta)^{(n)}$ 에 대응하는 비선형 항을 무시하면 최종적으로 $\Delta\phi^{(n)}$ 와 $\Delta\eta^{(n)}$ 에 관한 聯立 1次方程式을 얻을 수 있다. 여기서 $\Delta\eta^{(n)}$ 는 未知數로서 聯立方程式에 포함되어 있으므로 n time step에서의 水面形狀은 미지수이다. 이를 해결하기 위하여 Nakayama and Washizu(1981)는 水面形狀에 관계된 변수 α , A_j , B_j , l_j , β_j 에 대하여 한 step 전의 값을 이용하였으나 본 해석에서는 Kim *et al.*(1983), 大山(1985)이 사용한 것과 같이 초기에 $\Delta\phi^{(n)}$, $\Delta\eta^{(n)}$ 을 零으로 가정하여 聯立方程式을 풀고 여기서 얻어진 값을 다음과 같은 조건이 만족될 때까지 反復 計算하였다.

$$\max \left| \frac{\Delta\eta_j^{(n,m)} - \Delta\eta_j^{(n,m-1)}}{\Delta\eta_j^{(n,m-1)}} \right| \leq \varepsilon; j=1, 2, \dots, N_F \quad (27)$$

여기서, $\Delta\eta_j^{(n,m)}$ 은 n시간 Step에서 m번째 水面形狀 補正值이다. 또한, 본 해석에서는 $\varepsilon=0.01$ 로 하였다.

3. 數値모델의 適用

3.1 孤立波의 再現

개발된 수치모델의 적용성을 확인하기 위하여 孤立波를 유체영역 내에서 재현하였다. 고립파는 Fenton(1972)이 제시한 제3차 近似解를 이용한 수평 수립자 속도 U 를 조파경계로 하여 재현하였는데 그 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U/\sqrt{gh} = & 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{20}\varepsilon^2 + \frac{3}{56}\varepsilon^3 - \varepsilon S^2 \\ & + \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{4}S^2 + S^4 + Z^2 \left(\frac{3}{2}S^2 - \frac{9}{4}S^4 \right) \right] \\ & + \varepsilon^3 \left[\frac{19}{40}S^2 + \frac{1}{5}S^4 - \frac{6}{5}S^6 + Z^2 \right. \\ & \left. \left(-\frac{3}{2}S^2 - \frac{15}{4}S^4 + \frac{15}{2}S^6 \right) \right. \\ & \left. + Z^4 \left(-\frac{3}{8}S^2 + \frac{45}{16}S^4 - \frac{45}{16}S^6 \right) \right] + O(\varepsilon^4) \quad (28) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} Z &= 1 + z/h \\ \varepsilon &= H/h \\ S &= 1/\cosh \alpha x \\ \alpha &= \left(\frac{3}{4}\varepsilon \right)^{1/2} \left(1 - \frac{5}{8}\varepsilon + \frac{71}{128}\varepsilon^2 \right) + O(\varepsilon^{2/7}) \quad (29) \end{aligned}$$

계산에 사용한 入力條件은 수심 $h=1.0\text{m}$ 로 하고 유체영역의 無次元 길이 $X/h=20$ 으로 고정시키고 無次元 波高 $H/h=0.2$ 일때, 자유수면의 無次元 x 方向 増分 $\Delta x/h=0.5$ 와 1.0 의 두 가지 경우에 대하여 무차원 계산시간간격 $\Delta t\sqrt{g/h}$ 는 0.626, 1.252, 1.878로 변화시키면서 孤立波의 再現性을 검토하였다. 이때 사용한 요소의 수는 조파경계와 벽면경계를 5등분, 바닥경계는 20등분, 자유수면은 각각 40과 20등분하여 총 70개와 50개로 하였다. 계산결과는 각각 Fig. 3, 4와 같으며, 이 그림에서 時間増분이 작을수록 孤立波를 잘 재현함을 알 수 있다. 한편 非線形性이 강할 경우의 재현성을 살펴보기 위하여 $H/h=0.3$ 에 대하여 다른 조건은 동일한 상태에서 $\Delta x/h=1.0$ 일때 계산을 실시

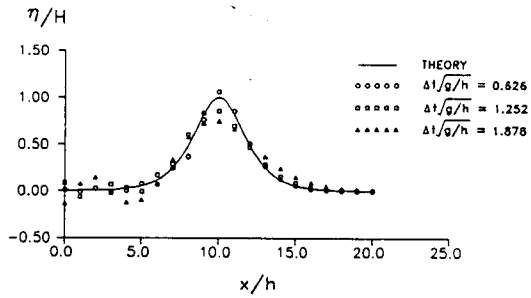


Fig. 5. Comparison of the solitary wave profiles for different time increments employed ($H/h=0.3, \Delta x/h=1.0$).

하였으며, 그 결과는 Fig. 5와 같다. 이를 Fig. 4와 비교해 보면 정상에서는 약간 재현성이 떨어지나 頂上附近에서는 오히려 더 좋아져서 비선형성이 강해져도 큰 오차없이 入力波를 재현함을 알 수 있다.

孤立波의 벽면에 대한 初올림(Run-up) 현상과 反射를 재현하기 위하여 파의 진행에 따른 파형과 流體領域 内部의 流速分布를 Fig. 6에 제시하였다. 실험 조건은 $H/h=0.2, \Delta x/h=0.5$ 로 하였으며 계산시간은

$\Delta t\sqrt{g/h}=0.626$ 으로 하여 反射波가 造波境界에 도달하기 전까지 실시하였다. 그 결과, 最大 初올림은 42 time step에서 발생하였으며 이 때의 무차원 높이는 0.46으로 Byatt-Smith(1971)가 제시한 다음의 理論式에 비교적 일치하고 있다.

$$\frac{R}{h} = 2\left(\frac{H}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad (30)$$

여기서,

R = 初올림 높이

3.2 規則波의 再現

規則波를 재현하기 위하여 Stokes의 2次 波浪을 대상으로 수심 $h=1.0m$ 로 하고 $X/h=30, \Delta x/h=0.5, \Delta t\sqrt{g/h}=0.157$ 의 입력조건 하에서 파가 반사되어 造波境界로 돌아올 때까지 계산을 수행하였다. 대상으로 한 규칙파의 조건은 無次元 波高 $H/h=0.1$, 無次元 週期 $T\sqrt{g/h}=7.83$, 無次元 波長 $h/L=0.143$ 으로 하였다. 자유수면에서의 수면변동량을 계산하기 위해

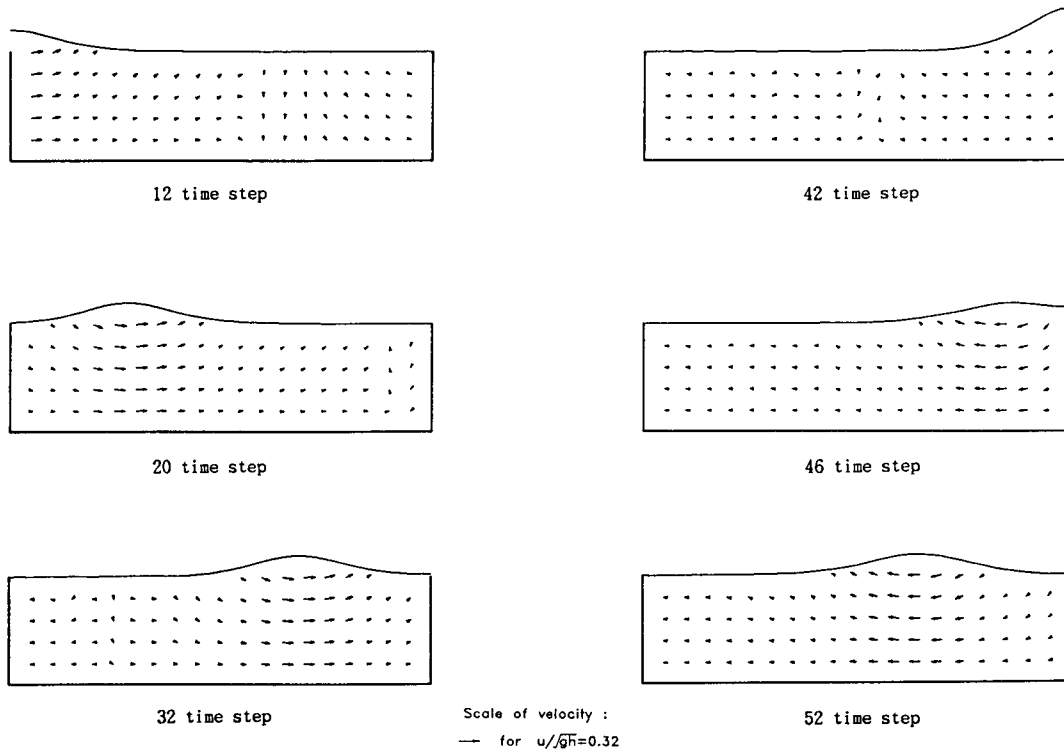


Fig. 6. Runup, reflection and velocity distribution for the solitary wave propagating to the vertical wall boundary.

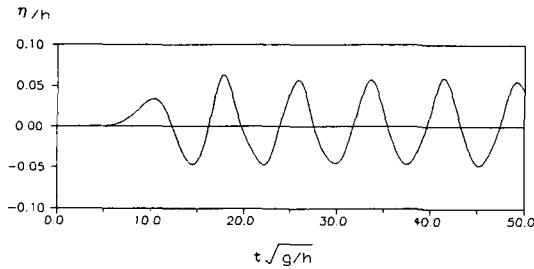


Fig. 7. Water surface displacement with time marching at the quarter point from the wave-making boundary to the vertical wall boundary.

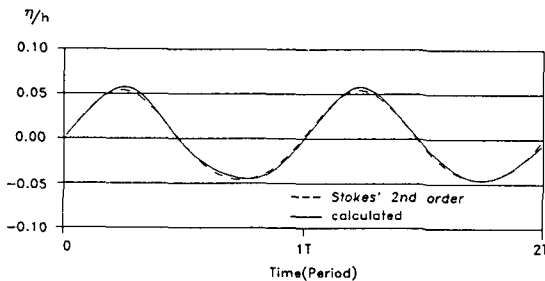


Fig. 8. Comparison of the wave profile calculated by numerical model with one given by Stokes' 2nd order wave theory.

여 경계상에 임의로 造波始作点(절점번호 N_f)로부터 전체 길이의 1/4이 되는 지점에서의 시간의 변화에 따른 水面變動量을 Fig. 7에 제시하였다. 이 그림에서 첫번째 파랑은 入射波高에 비하여 파고가 작음을 알 수 있는데 이는 靜穩한 상태의 유체영역을 파랑이 진행할 때 에너지가 반으로 줄어들기 때문이며(US Army Corps of Engineers, 1984) 水理實驗에서도 관측되는 自然的인 현상이다. 또한, 파랑의 형태는 파가 진행해 감에 따라 波峯의 높이가 波谷의 높이보다 크면서 幅은 좁은 전형적인 非線形波로 변해감을 알 수 있다. 이를 Stokes의 2차 파랑 理論值(Dean and Dalrymple, 1984)와 비교하기 위하여 비교적 안정된 구간에서 2週期의 파랑을 골라 Fig. 8에 제시하였다. 이 그림에서 수치계산결과는 이론치와 잘 일치하고 있으며 본 수치모델이 非線形波를 잘 재현해 준다는 사실을 나타낸다.

3.3 方法間的 比較

속도포텐셜의 時間微分을 계산할 때 Nakayama and Washizu(1981)가 제시한 식 (21)은 이의 연직방향

변화를 Δt 의 1차항 까지만 고려한 大山(1985)의 방법에 비하여 비선형성이 강해지고 시간간격이 클 경우 해가 發散하였다. 따라서, 본 연구에서 채택한 방법이 비선형파를 재현하기에는 적합하다고 생각되며 大山의 방법을 좀 더 개선하기 위하여 2차항 까지 고려한 식 (26)을 사용한 결과, 孤立波와 Stokes의 2차 파랑을 상당히 잘 再現하였다.

세 방법간의 차이를 살펴보면, 해를 구하기 위한 反復計算 횟수를 최대 20번으로 하여 이를 초과하면 발산하는 것으로 가정하였을 때 發散하기 전까지는 세 방법 모두 반복계산 횟수가 3번이나 4번 정도로 일정하였으나 식 (21)에 의한 방법은 나머지 두 방법에 비해 非線形 效果를 제대로 반영하지 못하기 때문에 일찍 발산하였다. 그러나 大山의 방법과 식 (26)을 이용한 방법은 해가 발산하기 전까지의 파랑 조파 시간이나 反復計算 횟수에 있어서 거의 차이가 없었으나 두 방법 모두 波形傾斜 H/L 가 0.02 정도에서는 중복파를 형성하기도 전에 발산하는 문제점을 가지고 있어서 Stokes의 3차 파랑 정도의 강한 비선형 파랑을 재현하기에는 미흡하였다.

4. 結論 및 討議

해안 구조물에 작용하는 파압이나 쳐올림 높이 등을 파악하기 위하여 비선형파를 재현할 수 있는 수치모델을 境界要素法을 이용하여 개발하였다. 본 수치모델에서는 비선형파를 정확하고 빠르게 재현하기 위하여 속도포텐셜의 時間微分을 계산할 때 연직방향의 변화를 고려하였으며 이를 고려한 방법이 그렇지 않은 방법보다 비선형파를 잘 재현하였으나 Δt 의 2차항까지 고려한 방법은 1차項까지 고려한 방법에 비하여 반복계산 횟수와 해는 거의 차이가 없었다. 본 수치모델의 適用性을 검증하기 위하여 孤立波와 Stokes의 2차 파랑을 재현한 결과, 理論值와 상당히 잘 일치하였다. 본 연구에서 개발된 수치모델은 非線形項을 Taylor 級數로 전개하면서 線形化를 많이 하였는데 이 때문에 비선형성이 강해지면 節點間隔이나 計算時間間隔을 작게 해야하는 문제가 발생하며 때로는 해가 전혀 收斂하지 않는 경우도 발생한다. 따라서, 차후로는 비선형성이 강해져도 해를 구할 수 있도록 생략된 非線形項을 가급적 많이 반영할 수 있는 방법이 강구되어야 할 것이다.

謝 辭

본 연구는 韓國海洋研究所의 1993년도 基本研究 사업비에 의하여 수행한 연구결과이다. 연구에 많은 도움을 주신 日本 運輸省 港灣技術研究所의 細山田 박사과 조언을 아끼지 않은 한국해양연구소의 朴佑善 박사에게 감사드립니다.

參考文獻

- 金南亨, Takikawa K., 崔漢圭, 1991. 境界要素法에 의한 波動場에 있어서 非線形波의 假想境界處理, 한국해양·해양공학회지, 제3권 제3호, pp. 176-183.
- 大山巧, 1985. 境界要素法による非線形孤立波의 反射および作用波力의 解析, 第32回海岸工學講演會論文集, pp. 555-559.
- Byatt-Smith, J.G.B., 1971. An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesque equation, *J. of Fluid Mechanics*, **49**, pp. 625-633.
- Dean, R.G. and Dalrymple, R.A., 1984. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Prentice-Hall, Inc., pp. 300-303.
- Fenton, J., 1972. A ninth-order solution for the solitary wave, *J. of Fluid Mechanics*, **53**, pp. 257-271.
- Ijima, T. and Nagata, S., 1980. Numerical analysis of transient finite amplitude waves by boundary integral and perturbation expansion, *Coastal Engineering in Japan*, **29**, pp. 25-44.
- Kim, S.K., Philip, L.F. and James, A.L., 1983. Boundary integral equation solutions for solitary wave generation, propagation and run-up, *Coastal Engineering*, **7**, pp. 299-317.
- Kioka, W., 1983. Numerical analysis of breaking waves in a shallow water, *Coastal Engineering in Japan*, **26**, pp. 11-18.
- Nakayama, T., 1983. Boundary element analysis of nonlinear water wave problems, *Int. Jou. for Numerical Methods in Engineering*, **19**, pp. 953-970.
- Nakayama, T. and Washizu, K., 1981. The boundary element method applied to the analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **17**, pp. 1631-1646.
- US Army Corps of Engineers, 1984. *Shore Protection Manual*, Coastal Engineering Research Center, Vol I, pp. 29-30 of Chapter 2.