論 文

大 韓 造 船 學 會 論 文 集
제 30 卷 第 3 號 1993年 8月
Transactions of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 30, No. 3, August 1993

부분구조진동형 합성방법에 의한 대형구조계의 진동해석

김병현*, 정태영*, 김극천**

Vibration Analysis of Large Structures by the Component-Mode Synthesis

by

B.H. Kim*, T.Y. Chung* and K.C. Kim**

요 약

대형구조계의 진동해석에 효율적인 방법으로 알려진 부분구조 진동형 합성방법을 방법론적 관점에서 분류하면 부분구조계간의 연결부 경계조건을 어떻게 가정하는가에 따라 구속모드방법, 불구속 모드방법 및 혼합방법으로 대별할 수 있다. 이 방법들 중에서 불구속 모드방법이 보다 효율적이고 또 특정 부분구조의 실험결과 이용이 용이한 장점이 있으나 정확도가 떨어진다는 단점이 있다. 본 연구에서는 대형 구조계의 진동해석에 효율적이면서 정확도 높은 결과를 얻을 수 있는 불구속 모드방법을 정식화하였다. 불구속 모드방법의 정확도 향상 방안으로서 모드합성시 배제된 고차진동형의 영향을 잉여강성과 더불어 잉여관성 효과도 고려하여 보상하였고, 또 주파수이동기법을 도입하므로써 주관심 주파수 부근에서 더욱 정확도가 높은 결과를 얻을 수 있도록 함과 동시에 부분구조계가 semi-definite system일 경우 특이매트릭스를 처리해야 하는 문제점도 해결하였다. 상기방법의 정확도 및 계산효율성은 선체 2차원 단순화 모델을 포함한 일련의 유한요소모델에 대해 검증되었다. 상기방법에 의한 계산결과는 정확도에 있어서 진동형 합성에 이용된 부분구조계의 최고차 진동수 이하에서는 전체계를 직접 유한요소해석한 경우와 대등하고, 구속모드방법보다 효율적이면서 정확도가 더 높은 결과를 얻을 수 있음이 확인되었다.

Abstract

The finite element method(FEM) has been commonly used for structural dynamic analy-

발 표 : 1993년도 대한조선학회 춘계연구발표회('93. 4. 16.)
접수일자 : 1993년 5월 6일
* 정회원, 한국기계연구원
** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

sis. However, the direct global application of FEM to large complex structures such as ships and offshore structures requires considerable computational efforts, and remarkably more in structural dynamic optimization problems. Adoption of the component-mode synthesis method is an efficient means to overcome the above difficulty. Among three classes of the component-mode synthesis method, the free-interface mode method is recognized to have the advantages of better computational efficiency and easier implementation of substructures' experimental results, but the disadvantage of lower accuracy in analytical results.

In this paper, an advanced method to improve the accuracy in the application of the free-interface mode method for the vibration analysis of large complex structures is presented. In order to compensate the truncation effect of the higher modes of substructures in the synthesis process, both residual inertia and stiffness effects are taken into account and a frequency shifting technique is introduced in the formulation of the residual compliance of substructures. The introduction of the frequency shifting not only excludes cumbersome manipulation of singular matrices for semi-definite substructural systems but gives more accurate results around the specified shifting frequency. Numerical examples of typical structural models including a ship-like two dimensional finite element model show that the analysis results based on the presented method are well competitive in accuracy with those obtained by the direst global FEM analysis for the frequencies which are lower than the highest one employed in the synthesis with remarkably higher computational efficiency and that the presented method is more efficient and accurate than the fixed-interface mode method.

1. 서 론

형상이나 경계조건이 복잡하여 단순 모델링이 어려운 구조계에 대한 진동해석은 유한요소해석에 의존하게 되는데, 선박이나 해양구조물 등과 같은 대형 구조계의 경우는 자유도수가 매우 커지게 된다. 대규모 자유도를 갖는 고유치문제 해석방법으로 Determinent search방법, Subspace iteration 방법 및 Lanczos방법 등이 있으나 자유도 수가 매우 큰 문제의 경우는 이들 방법으로도 많은 계산시간이 소요된다. 또한 원하는 동특성을 갖도록 재설계하는 동특성 최적화를 위해서는 점진적인 설계변경과 이에 따른 진동해석을 반복적으로 수행해야 하므로 유한요소법을 직접 적용한 진동해석을 근간으로 하는 대형구조계의 동특성 최적화에는 더욱 많은 시간과 노력이 요구된다. 부분구조 진동형 합성방법은 이와같은 대형 구조계의 진동해석을 효율적으로 수행할 수 있는 한 방법이다. 이 방법은 Hurty[1, 2]가 처음 진동해석에 도입한 이래 많은 연구가 이루어져 왔는데 이들을 방법론적인 관점에서 분류하면 합성에 이용되는 부분구조계의 동특성치들을 타 부분 구조계와의 연결부를 구속, 불구속 또는 이들의 조합으로 하여 얻은 것을 사용하는가에 따라 각각 구속모드(fixed-interface mode)방법[3], 불구속 모드(free-interface mode)방법[4, 5] 및 혼합방법[6]으로 대별할 수 있다.

구속모드방법은 비교적 정확도가 높은 결과를 얻을 수 있으나 연결부 자유도가 최종 방정식에 그대로 남게 되므로 연결부의 자유도가 많은 경우 최종 방정식의 차수가 커지게 되는 문제점과 실험결과를 이용하기 위한 실험시 구속조건을 구현하기 어려운 점등 단점이 있다. 반면에 불구속 모드방법은 타 방법에 비해 최종방정식의 차수가 작아 효율적이고 또 실험결과 이용이 용이하나 고전적인 불구속 모드방법[4, 5]에서는 정확도가 높은 결과를 얻을 수 없는 경우가 많다. 혼합방법은 구속 모드방법과 불구속 모드방법의 중간적인 특성을 갖는다. 따라서 정확도 향상방안이 강구될 수 있다면 불구속 모드방법이 대형구조계의 진동해석에 가장 효과적인 방법이 될 수 있다. 불구속 모드방법의 정확도 향상을 위한 연구로는

MacNeal[7]이 진동형 합성에 있어서 무시된 고차진동형 영향(modal truncation effects)을 보상하기 위해 잉여(residual) compliance를 정의하고 잉여 강성을 도입하는 방법을 제시하였고, Craig 등[8]은 MacNeal의 방법과 고전적인 불구속 모드방법인 Hou[4]의 방법에 대해 정확도를 비교하였다. Rosemblum[9]은 MacNeal의 방법을 체계적으로 수식화하였다. Rubin[10]은 MacNeal방법을 확장하여 잉여 관성효과까지 고려하였으며 Hintz[11]는 constraint mode 또는 attachment mode를 추가 사용하였다. MacNeal과 Rubin의 방법에서는 얻어진 전체 구조계의 고유벡터가 관성 및 강성행열에 대해 직교성이 보장되지 않는다. Rubin과 Hintz의 방법은 MacNeal의 방법보다 정확도가 향상되나 최종 방정식에 연결부 자유도가 반영되어 연산운용에 효율성이 저하되는 문제점이 있다. 또한 상기한 모든 방법들에서는 부분구조계가 semi-definite system일 경우 잉여 compliance 계산시 특이 매트릭스를 직접 처리해야 하는 어려움이 있다.

본 연구에서는 불구속모드방법에 대하여 고차진동형이 무시된 영향을 고려한 정확도 향상방법을 제시하였다. 정확도 향상을 위한 고차진동형 무시 영향 보상에 있어서 잉여 강성과 더불어 잉여 관성효과도 고려하여 정식화 하였으며, 주파수 이동 기법을 도입하므로써 주관심 주파수 부근에서 더욱 정확도가 높은 결과를 얻을 수 있도록 함과 동시에 부분 구조계가 semi-definite system일 경우의 특이 매트릭스 처리 문제를 해결한다. 제시된 방법의 타당성 및 효율성 검증을 위하여 대상계를 보, 판구조, 비교적 복잡한 유한요소 모델로 확대해 가면서 수치계산을 수행하고, 동 결과들을 직접적인 유한요소해석 결과 및 타방법에 의한 결과와 비교 검토하였다.

2. 부분 구조 진동형 합성방법

정식화의 편의상 전체계가 두개의 부분구조계로 이루어진 경우를 생각한다. 이때 한 부분구조계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m^{ii} & m^{ib} \\ m^{bi} & m^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^i \\ \ddot{u}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k^{ii} & k^{ib} \\ k^{bi} & k^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^i \\ u^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_c{}^b \end{Bmatrix} \tag{1}$$

여기서 윗첨자 b와 i는 각각 부분구조계간의 연결부 자유도 및 연결부 이외의 자유도(내부 자유도)를 나타내며 $\{f_c^b\}$는 인접 부분 구조계에 의한 연결부에서의 구속력 벡터이다.

구속 모드방법[7]에서는 진동변위 $\{u\}$를 연결부가 고정된 상태에서 얻은 저차 l개의 고유벡터로 이루어진 모드 매트릭스(modal matrix) $[\phi]$와 내부자유도의 변위와 연결부 자유도의 변위와의 관계를 나타내는 구속 모드 매트릭스(constraint mode matrix) $[\varphi]$를 사용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u^i \\ u^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \varphi \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \\ u^b \end{Bmatrix} \tag{2}$$

여기서 I는 단위 매트릭스이고 ζ는 모드 좌표(modal coordinates)이다. 구속 모드 매트릭스(constraint mode matrix) $[\varphi]$는 내부 자유도와 연결부 자유도 간의 정역학적인 관계만을 고려한 정역학적 축소방법에 의해 다음과 같이 산정한다.

$$[\varphi] = -[k^{ii}]^{-1}[k^{ib}] \tag{3}$$

불구속 모드방법[8, 9]에서는 진동변위 $\{u\}$를 연결부가 자유인 상태에서 얻은 저차 l개의 고유벡터를 사용하여 이들의 선형결합으로 가정한다. 즉,

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u^i \\ u^b \end{Bmatrix} = [\phi]\{\zeta\} \tag{4}$$

혼합방법[10]에서는 한 부분 구조계에 대해서는 구속 모드방법인 (2)식으로, 인접 부분 구조계에 대해서는 불구속 모드방법인 (4)식으로 가정한다.

진동변위의 가정식 즉, (2)식과 (4)식은 다음과 같이 포괄적으로 표현할 수 있다.

$$\{u\} = [\alpha]\{\eta\} \tag{5}$$

여기서 $\{\eta\}$는 일반좌표계로서 구속 모드방법에서는 $\{\eta\} = [\zeta, u^b]^T$이고 불구속 모드방법에서는 $\{\eta\} = \{\zeta\}$이다.

두개의 부분구조계를 각각 r- 및 s- 부분 구조계라고 하고 연결부의 자유도 수를 n^b라 하면, 다음과 같은 n^b개의 연결부의 적합조건식을 부과하므로써 이들 부분 구조계가 연성된 전체계의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\{u^b\}_r = \{u^b\}_s \tag{6}$$

(5)를 고려하면 (6)은 $\{\eta\}$좌표계에서의 구속 조건식이 되며 다음과 같은 일반적인 형태로 쓸 수 있고

$$[A]\{\eta\} = \{0\} \tag{7}$$

$\{\eta\}$좌표계에서 서로 독립인 좌표로 구성된 일반좌표계를 $\{q\}$라고 하면 (7)로 부터 다음과 같은 좌표변환식이 얻어진다.

$$\{\eta\} = [\beta]\{q\} \tag{8}$$

(5)식 및 (8)식을 이용하고, 연결부에 작용하는 구속력에 대한 평형조건식

$$\{f_c^b\}_r + \{f_c^b\}_s = \{0\} \tag{9}$$

을 고려하면 다음과 같이 자유도가 축소된 전체계의 고유 진동방정식이 얻어진다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \tag{10}$$

여기서 $[M]$, $[K]$는 각각 $\{q\}$좌표계로 변환된 질량 및 강성 매트릭스이다. r- 및 s- 부분 구조계에서 각각 l_r, l_s개의 모드를 사용하였을 경우 전체계에 대한 운동방정식(10)의 자유도수 L은 구속 모드방법에서는 $L = (l_r+l_s+n^b)$, 불구속 모드방법에서는 $L = (l_r+l_s-n^b)$, 혼합방법에서는 $L = (l_r+l_s)$이다.

구속 모드방법은 타 방법에 비해 일반적으로 정확도 높은 결과를 주는 것으로 알려져 있으나 연결부 자유도가 많은 경우에는 최종 방정식의 차수 L이 커지게 되어 연산효율이 저하되는 문제점이 있다. 불구속 모드방법은 타 방법에 비해 최종 방정식의 자유도가 가장 작게 되며 연산과정도 간편하여 효율적이나 정확도 높은 결과를 얻을 수 없는 경우가 많다. 이때 진동형 합성에 더 많은 진동형을 포함시키면 정확도가 더 높아질 수 있으나 최종 방정식의 자유도가 커지게 되며 불구속 모드방법에서는 그 수렴성도 약하다.

3. 배제된 고차진동형 영향을 고려한 불구속 모드방법

부분 구조 진동형 합성방법에서는 진동변위를 가정할 때 부분 구조계의 l개의 저차 진동형만을 사용하므로써 축소된 자유도를 갖는 전체계의 운동방정식을 얻는다. 따라서 필연적으로 고차진동형을 무시함으로 인한 오차를 포함하게 된다. 본 논문에서는 잉여 compliance를 사용하여 무시된 고차진동형의 강성효과 뿐만 아니라 관성효과도 고려되는 불구속 모드방법의 정확도 향상 방안을 제시한다. 또한 주파수 이동 기법을 도입하여 지정한 특정 진동수 부근에서 더욱 정확도가 높은 결과를 얻을 수 있도록 함과 동시에 특이 매트릭스 처리문제를 제거한다.

3.1 잉여 compliance 매트릭스

한 부분구조계에 대한 운동방정식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = [P]^T\{f_c^b\} \tag{11}$$

여기서 $[P] = [0 \quad I]$

부분 구조계 자체의 정규화 모드 매트릭스 $[\phi]$를 좌표변환 매트릭스로 하는 좌표변환식은

$$\{u\} = [\phi]\{q\} \tag{12}$$

인데, 진동형합성에 이용되는 저차 고유벡터들을 $[\phi_L]$, 무시되는 고차 고유벡터들을 $[\phi_H]$라고 하면 (12)는 다음과 같고

$$\{u\} = [\phi_L]\{q_L\} + [\phi_H]\{q_H\} \tag{13}$$

(13)을 이용하여 (11)을 모드해석하면 진동형 합성시 무시되는 진동 변위 성분인 (13)의 둘째항은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$[\phi_H]\{q_H\} = [R_H][P]^T\{f_c^b\} \tag{14}$$

여기서

$$[R_H] = [\phi_H]\,[\Lambda_H - \lambda I]^{-1}\,[\phi_H]^T \tag{15}$$

이고 Λ_H는 대각항이 부분 구조계의 고차진동형 $[\phi_H]$에 대응하는 고유치들인 대각 매트릭스, λ는 전체계의 고유치, I는 단위 매트릭스이다. (15)의 $[R_H]$는 무시되는 고차 고유벡터들에 대한 compliance를 나타내는 잉여 compliance 매트릭스이다. 만일, 무시되는 고차진동형들의 고유치 λ_H가 구하고자 하는 전체계의 고유치 λ에 비하여 비교적 크다면 $[R_H]$는 근사적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[R_H] \cong [\tilde{R}_H] = [\phi_H][\Lambda_H]^{-1}[\phi_H]^T \quad (16)$$

한편, 강성매트릭스의 역매트릭스 $[k]^{-1}$는 $[\phi_L]$ 및 $[\phi_H]$를 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$[k]^{-1} = [\phi_L][\Lambda_L]^{-1}[\phi_L]^T + [\phi_H][\Lambda_H]^{-1}[\phi_H]^T \quad (17)$$

(17)를 이용하면 (16)은 부분 구조계 강성매트릭스의 역매트릭스와 저차 고유치 및 고유벡터를 사용하여 다음과 같이 산정된다.

$$[\tilde{R}_H] = [k]^{-1} - [\phi_L][\Lambda_L]^{-1}[\phi_L]^T \quad (18)$$

따라서 (13)의 진동변위 $\{u\}$는 (18)의 근사 잉여 compliance 매트릭스 $[\tilde{R}_H]$를 사용하여 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$\{u\} = [\phi_L]\{q_L\} + [\tilde{R}_H][P]^T\{f_c^b\} \quad (19)$$

3.2 전체계의 운동방정식

연결부에서의 변위 및 구속력은 각각 적합조건 (6)과 평형조건 (9)를 만족해야 한다. (19)를 이용하면 변위 적합조건식 (6)은 다음과 같고

$$[P]_r([\phi_L]\{q_L\} + [\tilde{R}_H][P]^T\{f_c^b\})_r = [P]_s([\phi_L]\{q_L\} + [\tilde{R}_H][P]^T\{f_c^b\})_s \quad (20)$$

구속력 평형조건 (9)를 고려하여 (20)을 정리하여 다시 쓰면

$$[S]\{f_c^b\}_r = -[P]_r[\phi_L]_r\{q_L\}_r + [P]_s[\phi_L]_s\{q_L\}_s \quad (21)$$

여기서,

$$[S] = ([P][\tilde{R}_H][P]^T)_r + ([P][\tilde{R}_H][P]^T)_s \quad (22)$$

이며 이로부터 r- 부분구조계 연결부에서의 구속력 $\{f_c^b\}_r$은 다음과 같이 얻어진다.

$$\{f_c^b\}_r = -[\bar{\phi}]_r\{q_L\}_r + [\bar{\phi}]_s\{q_L\}_s \quad (23)$$

여기서,

$$[\bar{\phi}] = [S]^{-1}[P][\phi_L] \quad (24)$$

또한 s- 부분 구조계의 구속력 $\{f_c^b\}_s$는 다음과 같다.

$$\{f_c^b\}_s = [\bar{\phi}]_r\{q_L\}_r - [\phi]_s\{q_L\}_s \quad (25)$$

(23), (25)를 (19)에 대입하면 부분 구조계의 진동변위는 부분 구조계들의 저차 고유벡터에 대한 모드좌표계로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_s \end{Bmatrix} = [\alpha] \begin{Bmatrix} q_{Lr} \\ q_{Ls} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} ([\phi_L] - [\tilde{R}_H][P]^T[\bar{\phi}])_r & ([\tilde{R}_H][p]^T)_r[\bar{\phi}]_s \\ ([\tilde{R}_H][P]^T)_s[\bar{\phi}]_r & ([\phi_L] - [\tilde{R}_H][P]^T[\bar{\phi}])_s \end{bmatrix} \quad (27)$$

(26)을 이용하면 $\{q_L\}$ 좌표계에서의 전체계의 운동에너지 T 및 탄성변형에너지 V는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[M]\{\dot{q}\}$$
$$V = \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\} \quad (28)$$

여기서,

$$\{q\} = [\, q_{Lr} \;\; q_{Ls}]^T$$
$$[M] = [\alpha]^T\begin{bmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix}[\alpha] \quad (29)$$
$$[K] = [\alpha]^T\begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}[\alpha]$$

부분구조계의 정규화 고유벡터의 직교성을 고려하면 (29)로 정의된 관성 매트릭스와 강성매트릭스는 다음과 같다.

$$[M]=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_r^T S^{-1}BS^{-1}A_r & A_r^{-1}S^{-1}BS^{-1}A_s \\ A_s^T S^{-1}BS^{-1}A_r & A_s^T S^{-1}BS^{-1}A_s \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[K]=\begin{bmatrix} \Lambda_{Lr} & 0 \\ 0 & \Lambda_{Ls} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_r^T S^{-1}A_r & A_r^T S^{-1}A_s \\ A_s^T S^{-1}A_r & A_s^T S^{-1}A_s \end{bmatrix} \quad (31)$$

여기서,

$$I = [\phi_L]^T[m][\phi_L]$$
$$\Lambda_L = [\phi_L]^T[k][\phi_L]$$
$$A = [P][\phi_L]$$
$$B = ([P][\tilde{R}_H]^T[m][\tilde{R}_H][P]^T)_r + ([P][\tilde{R}_H]^T[m][\tilde{R}_H][P]^T)_s$$
$$S = ([P][\tilde{R}_H][P]^T)_r + ([P][\tilde{R}_H][P]^T)_s$$

이다. (30) 및 (31)의 우변 제2항이 부분 구조 진동형 합성에 있어서 배제된 고차 진동형의 효과를 반영하고 있다.

각 부분구조계의 연결부에 작용하는 구속력 (23) 및 (25)에 대한 $\{q\}$ 좌표계에서의 일반력 $\{F_c\}$는 가상일의 원리에 의해서

$$\{F_c\} = [\alpha]^T\begin{Bmatrix} [P]_r^T f_{cr}^b \\ [P]_s^T f_{cs}^b \end{Bmatrix} \quad (32)$$

인데 구속력 평형조건식 (9)로 부터 다음과 같다.

$$\{F_c\} = \{0\} \quad (33)$$

(28)과 (33)을 Lagrange 운동방정식에 대입하면 전체계에 대한 고유진동 방정식을 얻을 수 있다. 즉,

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (34)$$

이며, 이 고유진동 방정식의 자유도수 L은 $L = (l_r + l_s)$이다. 이것으로 부터 얻은 $\{q\}$ 좌표계에서의 고유진동형을 (26)에 대입하므로써 $\{u\}$ 좌표계에 대한 고유진동형을 얻게 된다.

MacNeal의 방법[7, 8, 9]에 있어서는 관성매트릭스 (30)에서 둘째항이 고려되지 않는다.

3.3 주파수 이동

(15)의 잉여 compliance 매트릭스 $[R_H]$에 지정된 특정 주파수 $\lambda_0(\lambda_0 < \lambda_H)$를 도입하면

$$[R_H] = [\phi_H][\Lambda_H - \lambda I]^{-1}[\phi_H]^T$$
$$= [\phi_H][(\Lambda_H - \lambda_0 I) - (\lambda-\lambda_0)I]^{-1} \cdot [\phi_H]^T \quad (35)$$

로 표현할 수 있고,

$$|\lambda_H - \lambda_0| \gg |\lambda - \lambda_0| \quad (36)$$

이면 잉여 compliance 매트릭스 $[R_H]$는 다음과 같이 근사 표현된다.

$$[R_H] \simeq [\tilde{R}_H] = [\phi_H][\Lambda_H - \lambda_0 I]^{-1}[\phi_H]^T \quad (37)$$

한편, $\lambda = \lambda_0$에서 compliance는 $[\phi_L]$ 및 $[\phi_H]$를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$[k - \lambda_0 m]^{-1} = [\phi_L][\Lambda_L - \lambda_0 I]^{-1}[\phi_L]^T + [\phi_H][\Lambda_H - \lambda_0 I]^{-1}[\phi_H]^T \quad (38)$$

(37)은 다음과 같이 귀착된다.

$$[\tilde{R}_H] = [k-\lambda_0 m]^{-1} - [\phi_L][\Lambda_L - \lambda_0 I]^{-1}[\phi_L]^T \quad (39)$$

(39)로 산정되어 $[\tilde{R}_H]$는 λ가 λ_0에 가까울수록 보다 정확한 값을 주게 되며 $\lambda = \lambda_0$이면 정확한 산정식인 (35)와 같다. (18)은 (39)의 특정한 경우 즉, $\lambda_0 = 0$인 경우이다. 따라서 (18) 대신에 (39)를 사용하여 전체계의 운동방정식 (34)를 형성하면 이의 해는 $\lambda = \lambda_0$에 가까울수록 보다 정확한 해를 주게된다. λ_0로 주관심 주파수를 택하므로써 그 주파수 부근에서 보다 더 정확도 높은 결과를 얻을 수 있다. 또한 분리된 부분 구조계가 semi-definite system인 경우 (18)에 의한 $[\tilde{R}_H]$의 산정에서는 특이 매트릭스인 강성 매트릭스의 역매트릭스를 구해야 하는 문제점이 있는 반면 (39)에 의한 $[\tilde{R}_H]$의 산정에 있어서는 λ_0가 부분 구조계의 고유치와 일치하지 않은 한 특이 매트릭스를 처리하는 문제점이 제거된다.

4. 수치계산예 및 고찰

본 연구에서 제시된 불구속 모드방법에 대한 타당성 및 유용성을 검토하기 위해 Euler보, 직사각형 평판 및 선체 단순화모델을 대상으로 본 연구에서 제시된 불구속 모드방법에 의해 일련의 수치계산을 수행하고 그 결과를 전체계에 대한 유한요소해석 결과 및 기존방법에 의한 결과와 비교하였다. 전체계에 대한 유한요소해석은 구조해석 범용 전산프로그램인 SAP4를 사용하였으며 진동형 합성 방법의 계산을 위한 전산프로그램은 그 결과들을 서로 비교하는데 있어서 객관성을 갖도록 하기 위하여 가능한 SAP4의 algorithm을 그대로 사용하여 작성하였다.

4.1 Euler 보

Fig. 1과 같이 양단이 단순지지된 Euler 보를 같은 길이를 갖는 2개의 부분구조계(SUB. 1 및 SUB. 2)로 나눈 경우에 대하여 수치계산을 수행하여 엄밀해 및 기존의 방법과 비교·검토하였다. 각 부분구조계에 대해서는 40개의 유한요소로 모델링하고 저차 5개의 고유진동형을 계산하였으며 이들을 이용하여 전체계의 9차 까지의 고유진동수를 계산하였다. 이때 이동주파수는 150Hz로 하였다. 계산결과는 Table 1에 나타내었는데 동 표에는 고차진동형 효과가 무시된 고전적인 불구속 모드방법[4], 잉여강성효과만을 고려한 MacNeal의 방법 및 엄밀해도 함께 나타내어 비교하였다. Table 1에서 보는 바와 같이 고차진동형 효과를 고려하지 않는 고전적인 방법으로는 정확한 결과를 얻을 수 없음을 알 수 있으며 MacNeal의 방법과 본 연구의 방법에 의해 얻어진 8차 까지의 결과는 공히 엄밀해와 근사한데, 본 연구의 방법이

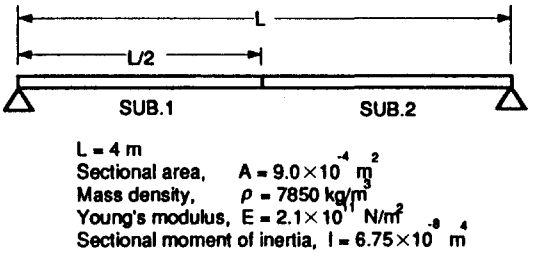


Fig. 1 Simply supported Euler beam model.

Table 1 Calculated natural frequencies for the simply supported Euler beam shown in Fig. 1.

(unit : Hz)

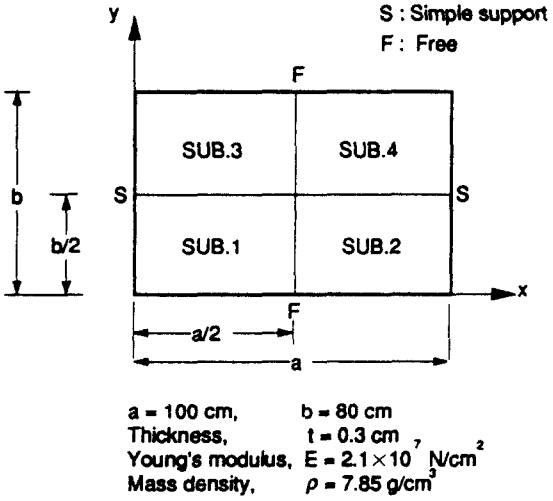
Order \ Method	Classical CMS	MacNeal's method	Present Work	Exact Solution
1	4.815	4.398	4.398	4.397
2	17.61	17.59	17.59	17.59
3	44.00	39.58	39.58	39.58
4	70.69	70.36	70.36	70.36
5	124.5	110.1	109.9	109.9
6	160.0	158.4	158.3	158.3
7	251.0	216.8	215.5	215.5
8	287.4	282.9	281.5	281.4
9		369.3	359.0	356.2

Note : Natural frequencies(Hz) of the substructures used in mode synthesis
1st : 0.00, 2nd : 27.46, 3rd : 88.92, 4th : 185.4, 5th : 316.8

MacNeal의 방법보다 개선된 결과를 얻고 있다. 또한 진동형 합성에 사용된 부분계의 최고차 진동수인 316.8Hz 보다 커지는 9차 이상에서 엄밀해와의 오차는 8차 이하에서의 오차에 비하여 상대적으로 커지고 있다. 따라서 진동형 합성에 이용된 부분계의 최고차 진동수 이하에서는 매우 정확도 있는 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

4.2 직사각형 평판

서로 마주보는 2변이 각각 자유 및 단순지지인 경계조건을 갖는 Fig. 2의 직사각형 평판에 대하여 전체계를 4개의 부분계(SUB. 1, SUB. 2, SUB. 3, SUB. 4)로 나누어 수치계산을 수행하였다. 각 부분계는 x 및 y 방향으로 각각 10등분하여 유한요소로 모델링하였다. 전체계의 고유진동수 계산에는 각 부분계의 5차 까지의 진동형을 사용하였으며 이동 주파수는 10Hz로 하고 10차 까지의 고유진동수를 계산하였다. 계산결과는 Table 2와 같다. 동 표에는 전체계를 직접 유한요소해석한 결과, MacNeal의 방법 및 비교적 정확도 있는 결과를 얻을 수 있는 방법으로 알려진 구속모드 합성 방법에 의한 계산결과도 함께 나타내었다. 또한 계산의 효율성을 검토하기 위하여 전산기 CPU 시간도 함께 비교하였다. Table 2에서 보면 본 연구의 방법, 구속모드 방법, MacNeal의 방법 순으로 직접 유한요소법에 의한 해석결과와 잘 부합하고 있으며 계산소요시간 역시 본 연구의 방법이 가장 작으며 직접 유한요소해석 소요시간의 약 60%



a = 100 cm, b = 80 cm
Thickness, t = 0.3 cm
Young's modulus, $E = 2.1\times10^{7}$ N/cm^2
Mass density, $\rho = 7.85$ g/cm^3

Fig. 2 Rectangular plate model.

Table 2 Calculated natural frequencies for the rectangular plate shown in Fig. 2.

(unit : Hz)

Order \ Method	MacNeal's method	Fixed-interface mode method	Present Work	Global F.E.M.
1	7.171	7.170	7.169	7.169
2	14.04	14.03	14.03	14.03
3	29.07	29.05	29.05	29.05
4	37.17	37.13	37.11	37.11
5	37.87	37.80	37.80	37.80
6	64.73	64.23	64.21	64.20
7	67.59	65.92	65.94	65.79
8	76.83	75.32	75.29	75.12
9	82.47	81.60	81.55	81.46
10	106.2	104.5	104.5	104.2
Total CPU time(sec)	1509	154	147	243

정도이다. MacNeal의 방법에 있어서는 직접 유한요소해석 소요시간 보다 오히려 많은 시간이 소요되었는데 이는 잉여 compliance 매트릭스를 산정할 때 특히 매트릭스의 역매트릭스 계산에 매우 많은 시간이 소요되었기 때문이다. 특히 매트릭스의 역매트릭스 계산에는 Rozenblum[9]의 방법을 사용하였다. 이동주파수에 따른 영향을 검토하기 위하여 이동주파수를 0Hz, 10Hz, 30Hz 및 50Hz인 경우에 대하여 계산을 수행하고 Table 3에 직접 유한요소해석 결과와 비교하였다. Table 3을 보면 이동주파수 부근에서의 결과는 직접 유한요소해석 결과와 잘 일치하고 있으며 이동주파수가 커짐에 따라서 저차 진동수는 정확도

Table 3 Calculated natural frequencies w.r.t. shifting frequencies for the rectangular plate shown in Fig. 2.

(unit : Hz)

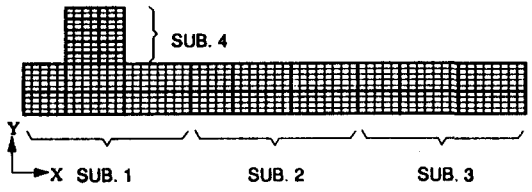
Order \ Shifting Freq.	0Hz	10Hz	30Hz	50Hz	Global F.E.M.
1	7.169	7.169	7.170	7.174	7.169
2	14.03	14.03	14.03	14.04	14.03
3	29.05	29.05	29.05	29.05	29.05
4	37.11	37.11	37.11	37.11	37.11
5	37.80	37.80	37.80	37.80	37.80
6	64.22	64.21	64.21	64.21	64.20
7	65.95	65.94	65.89	65.82	65.79
8	75.30	75.29	75.25	75.18	75.12
9	81.53	81.55	81.51	81.49	81.46
10	104.5	104.5	104.4	104.4	104.2

가 떨어지는 반면 고차진동수는 정확도가 개선되고 있음을 알 수 있다. 따라서 주 관심주파수를 이동주파수로 선택하므로써 관심주파수 부근에서 정확도 있는 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 이동주파수를 사용하지 않는 경우 즉 이동주파수가 0Hz인 경우에는 Table 2의 MacNeal 방법과 비슷한 시간이 소요되었는데 이는 부분계가 semi-definite system이므로 잉여 compliance 산정시 특이 매트릭스를 처리해야 하기 때문이다. 따라서 부분계가 semi-definite system인 경우는 이동주파수를 사용하는 것이 매우 효율적임을 알 수 있다.

4.3 선체 단순화모델

Euler 보 및 직사각형 평판 예로부터 기초적인 사항에 대한 검토결과를 바탕으로 Fig. 3에 보인바와 같이 선체상하진동해석을 위한 2차원 유한요소모델을 의식한 단순화 모델을 채택하여 수치계산을 수행하였다. 수치계산 입력자료를 위한 특성치들은 Table 4와 같이 가정하였다. 이동주파수를 8.0Hz로 하고 전체계의 진동수가 20.0Hz 이하인 16차 까지의 고유진동수를 계산하였다. 계산결과는 Table 5에 구속 모드방법 및 전체계를 직접 유한요소해석한 결과와 함께 보였다. Fig. 4에는 6차 까지의 고유진동형을 도시하였다.

Table 5에서 보듯이 본 연구의 방법이 구속 모드방법 보다 정확도 높은 결과를 주고 있다. 진동형 합성에 이용된 진동형들의 진동수 상한이 25.47Hz였는데



No. of D.O.F. : total 1,380
(SUB.1,2&3 - @420, SUB.4 - 176, Interface - 56)

No. of nodes : total 690
(SUB.1,2&3 - @210, SUB.4 - 88, Interface - 28)

No. of membrane elements : total 610
(SUB.1,2&3 - @180, SUB.4 - 70)

No. of truss elements : total 353
(SUB.1,2&3 - @96, SUB.4 - 65)

Fig. 3 A simplified ship-like 2-D F.E. model for vertical vibration.

Table 4 Properties of the simplified ship-like 2-D F.E. model shown in Fig. 3.

Particulars	Main hull (sub. 1, 2, 3)	Super-structure (sub. 4)
Principle dimension(m)		
Length, L	180	21
Depth, D or Height, H	D=18	H=20
Membrane element		
Thickness, t(m)	0.05	0.02
Mass density, ρ(ton/m^3)	7.85	7.85
Young's modulus, E(kN/m^2)		
Ex	2.1×10^8	4.2×10^8
Ey	4.2×10^8	2.1×10^8
Shear modulus, G(kN/m^2)	8.1×10^7	8.1×10^8
Poission's ratio, ν	0.3	0.3
Truss elements		
Sectional area, A(m^2)	0.8	0.3
Young's modulus, E(kN/m^2)	2.1×10^8	2.21×10^8
Total concentrated mass at nodes(ton)	21610	1408

전체계를 직접 해석한 결과와의 오차는 0.17% 이하이다. 계산에 소요된 CPU time을 비교하여 보면 전체계를 직접 유한요소해석하는 경우에 비해 약 46% 정도이며 구속 모드방법 보다 효율적임을 알 수 있다.

5. 결 론

유한요소법에 의한 대형구조계의 진동해석, 특히 반복적 진동해석이 요구되는 동특성 최적화에는 많은 계산시간이 소요된다. 이를 극복하기 위하여 여러가지 방법들이 제시되고 있으나 주로 이용되고 있는 것이 부분구조 진동형 합성방법이다. 부분구조 진동형 합성방법 중에서 불구속 모드방법은 타방법에 비해 효율적이며 특히 특정 부분 구조의 실험결과를 용이하게 이용할 수 있는 장점을 갖고 있는데, 반면에 정확도가 떨어진다는 단점이 있다.

본 연구에서는 불구속 모드방법에 대하여 정확도 및 효율성 향상 방안으로서 잉여 강성과 잉여 관성효과를 함께 고려하고 또 주파수 이동방법을 도입한 진동해석방법을 정식화 하였으며 제시된 방법의 타당성 및 효율성 검증을 위해 수행된 일련의 수치계산

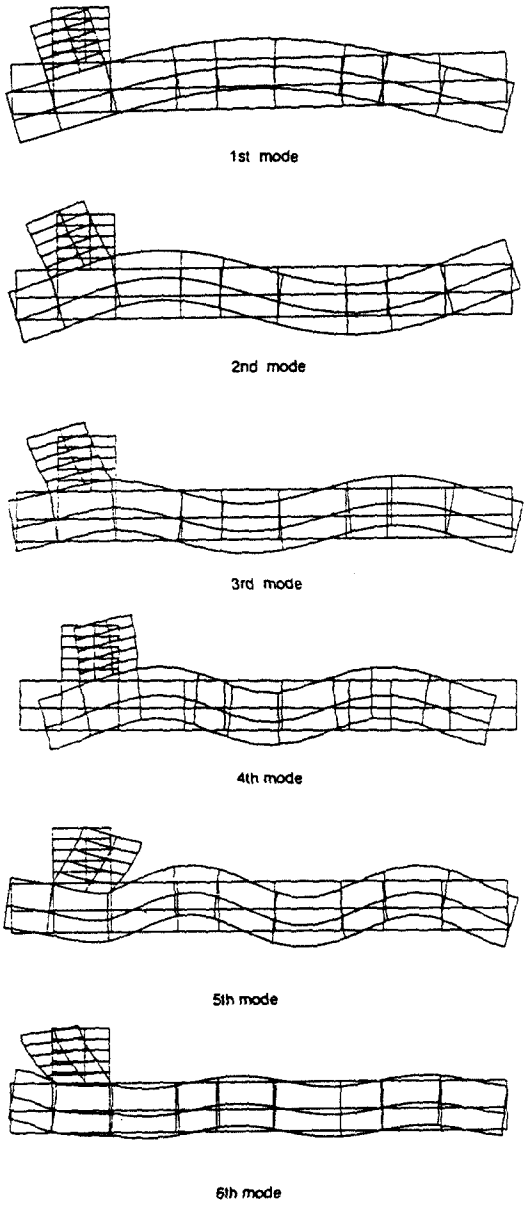


Fig. 4 Mode shapes of the ship-like 2-D F.E. model.

예로 부터 다음과 같은 사항을 파악하였다.

잉여강성과 잉여관성 효과를 고려한 불구속 모드 방법은 진동형 합성에 이용된 부분구조계의 최고차 진동수 이하에서는 전체계를 직접 유한요소 해석하는 경우와 거의 대등한 결과를 얻을 수 있다.

Table 5 Comparison of the calculated natural frequencies for the model shown in Fig. 3 & Table 4.

Method / Order	Present work*		Fixed-interface mode method		Global F.E. analysis
	Freq.(Hz)	Error(%)**	Freq.(Hz)	Error(%)**	Freq.(Hz)
1	1.34	0.00	1.34	0.00	1.34
2	3.07	0.00	3.07	0.00	3.07
3	4.84	0.00	4.84	0.00	4.84
4	5.47	0.00	5.47	0.00	5.47
5	6.89	0.00	6.89	0.00	6.89
6	8.44	0.00	8.44	0.00	8.44
7	9.26	0.00	9.27	0.11	9.26
8	10.97	0.00	10.99	0.18	10.97
9	11.18	0.00	11.19	0.09	11.18
10	13.12	0.08	13.14	0.23	13.11
11	14.76	0.07	14.82	0.47	14.75
12	15.79	0.00	15.99	1.27	15.79
13	16.32	0.12	16.36	0.37	16.30
14	17.68	0.17	17.73	0.45	17.65
15	19.02	0.00	19.18	0.84	19.02
16	19.32	0.00	19.56	1.24	19.32
Total CPU time(sec)	168		196		363

Number of modes used in the synthesis
SUB. 1, 2, 3 : up to 9th mode
SUM. 4 : up to 6th mode
* frequency shifting : 8.0Hz
** w.r.t. global F.E. analysis

잉여 compliance 산정시 주파수 이동방법을 도입하므로써 특정 주파수 부근에서 더욱 정확도 높은 해를 얻을 수 있으며, 특히 분리된 부분구조계가 semi-definite system인 경우에 특이 매트릭스 처리 문제가 해결된다.

계산효율면에서 전체계를 직접 유한요소해석할 경우에 비하여 수치계산 예의 경우 계산소요시간이 45~60%로 단축되는데, 보다 더 복잡한 구조계 일수록 그 효율성이 더욱 증대된다.

6. 후 기

이 논문은 1990년도 한국과학재단 목적기초연구 관리번호 90-02-00-02-03의 일부이다. 이 기회에 동재단에 심심한 사의를 표한다.

참 고 문 헌

[1] Hurty, W.C., "Vibration of Structural Systems by Component Mode Synthesis", *J. of the Engineering Mechanics Div., ASCE*, Vol. 86, 1960.

[2] Hurty, W.C., "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 4, 1965.

[3] Craig, R.R. and Bampton, M.C., "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 7, 1968.

[4] Hou, S.N., "Review of Modal Synthesis Techniques and A New Approach", *Shock and Vib. Bull.*, 40, pt. 4, 1969.

[5] Goldman, R.L., "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning", *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 6, 1969.

[6] Benfield, W.A., and Hruda, R.F., "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution", *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 7, 1971.

[7] MacNeal, R.H., "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis", *Computer and Structures*, Vol. 1, 1971.

[8] Craig, R.R. and Chang, C.J., "Free-Interface Method of Substructure Coupling for Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 11, 1976.

[9] Rozenblum, G., "Modal Synthesis : Generalization of MacNeal's Method. Theoretical Basis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 48, 1985.

[10] Rubin, S., "Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 13, No. 8, 1975.

[11] Hintz, R.M., "Analytical Methods in Component Modal Synthesis", *AIAA Journal*, Vol. 13, No. 8, 1975.

[12] Kuang, J.H. and Tsuei, Y.G., "A More General Method of Substructure Mode Synthesis for Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 4, 1985.

[13] Kline, K.A., "Dynamic Analysis Using a Reduced Basis of Exact Modes and Ritz Vectors", *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 12, 1986.

[14] 이호섭외, "선박 진동해석 프로그램 개발에 관한 연구", 한국기계연구소 보고서, BSI324-630, 1986.

[15] 김병현 "부분 구조 진동형 합성방법에 의한 대형구조계의 진동해석 및 동특성 최적화", 공학박사 학위논문, 서울대학교 대학원 조선해양공학과, 1993.