
 論 文

大韓造船學會論文集
 제 30 卷 第 3 號 1993 年 8 月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 30, No. 3, August 1993

혼합경계조건에 의한 수중익 해석에 관한 연구

문일성*, 이창섭**, 김영기*

A Study on Lifting Problem of Hydrofoil Using Robin Boundary Condition

by

I.S. Moon*, C.S. Lee** and Y.G. Kim*

요 약

본 논문은 2차원 수중익 주위의 유동해석을 위하여 포텐셜을 기저로한 여러가지 패널법을 비교한다. 각 패널에서의 특이함수의 세기는 일정하거나 선형으로 변한다고 가정하고, Neumann 및 Dirichlet의 경계조건과 함께 혼합경계조건(Robin경계조건)을 적용하여 정식화를 한후, 각 방법의 정확도를 평가 하였다.

여러가지 2차원 단면에 대한 압력분포 및 양력을 계산하고, 해석해와 비교하였다. 날카로운 뒷날과 큰 캠버값을 갖는 날개의 경우에 특히 예민하다고 알려진 날개 뒷날 부근에서의 국소오차에 대하여 집중적인 연구를 수행하였다. 비교해석 결과, 혼합 경계조건을 사용하는 정식화 방법이 가장 정확성이 높고, 수렴속도도 우수함을 밝혔다.

Abstract

This paper compares various potential based panel methods for the analysis of two-dimensional hydrofoil. The strength of singularity on each panel is assumed to be constant or linear. Robin boundary condition as well as Neumann and Dirichlet boundary conditions are applied to various formulations to evaluate the accuracies of the methods.

Pressures and lifts are computed for various two-dimensional hydrofoil geometries and are compared with the analytic solutions. Extensive studies are performed on the local errors near the trailing edge, known to be sensitive to the foil geometry with sharp trailing edge and high camber.

Robin boundary condition with the perturbation velocity potential formulation shows the best accuracy and convergence rate.

발 표 : 1992년도 대한조선학회 추계연구발표회('92. 11. 14.)

접수일자 : 1993년 12월 21일, 재접수일자 : 1993년 5월 15일

* 정회원, 충남대학교 선박해양공학과 대학원

** 정회원, 충남대학교 선박해양공학과

大韓造船學會論文集 第30卷 3號 1993年 8月

1. 서 언

과거에는 2차원 수중익이나 비행날개 주위의 유동 해석은 대부분 양력면 이론에 기초를 두어왔다(Lee, C. -S. [1]). 양력면 이론은 선형이론에 입각하여 날개의 두께문제와 양력문제를 분리함으로써 쏘오스와 보오텍스를 도입하여 비행날개 혹은 수중익주위의 유동을 기술하는데 그 실용적 가치를 인정받아 왔다.

그러나, 양력면 이론은 날개 두께의 영향을 무시하였기 때문에 날개 앞날에서 실제 현상과는 거리가 먼 음의 무한대의 압력이 발생하는 압력특이거동을 보인다.

이러한 선형화에 따른 앞날 근처에서의 부정확한 해석을 해결하기 위해 날개 두께의 영향을 정확하게 고려해 주어야만 한다. 날개 표면에 특이점을 분포하여 두께문제를 해결하고자 하는 연구는 항공분야에서 널리 발표되고 있으며 비교적 뒷날의 두께가 두껍고 캠버가 작은 수중익에 대해서 성공적으로 적용되어 왔다(Hess & Valarezo[2], Moran[3]).

최근의 표면 패널법에 의한 해석방법은 대부분 내부유동의 Dirichlet 경계조건을 사용하였으며 저차의 특이점을 수중익표면에 분포하여 해석하였다. 하지만, 뒷날의 두께가 얇거나 뒷날의 두께가 0으로 접근할 때 수중익 표면에 특이점을 분포하는 패널법에 대해 부분적인 결함을 제시한 바 있다(Kinnas & Hsin[4], Yon, Katz & Plokin[5]). 이러한 결함은 특이점의 세기를 선형으로 한 패널법에 의해 극복되어 질 수 있으나 이 경우에는 저차의 패널법(Low Order Panel Method, LOPM)에 의한 해석방법보다 정식화과정이 복잡할 뿐 아니라 3차원 형상으로 적용할 때 계산시간이 더욱 많아지며, 아직은 3차원 형상으로서의 적용조차 용이하지 않다.

Kinnas & Hsin[4]은, 뒷날의 두께가 0으로 접근할 때에 캠버를 가지는 2차원 수중익에 대하여, 저차의 패널법을 사용한 "Saw-Tooth"효과(톱날효과)를 도입하여 문제를 해결하였으나, 이때 해석해에서 구한 포텐셜의 점프를 사용하였기 때문에 보다 일반적인 '수치적 Kutta조건'의 적용이 결여된 결과라 볼 수 있다.

Yon, Katz & Plokin[5]는, 뒷날의 두께가 0에 가까운 2차원 단면에 대하여, 저차의 패널법을 사용하여 해석 하였으며 이때 뒷날에서 유동의 속도가 같아야 한다는, '속도에 입각한 Kutta조건'의 사용에 의한 해결법을 제시하였다. 하지만, 이때 적용한 수중

익이 모두 캠버가 없는 수중익으로써 이 경우 본 연구에서 채택한 저차의 패널법에 의한 해석법으로도 Yon, Katz & Plokin[5]이 제시한 뒷날에서의 특이 현상이 나타나지 않는다. 본 연구에서는 뒷날의 두께가 0으로 접근하며, 캠버를 가지는 2차원 수중익에 대하여, 특이점의 세기가 각 판요소에서 일정한 저차의 패널법과 선형으로 변하는 선형 패널법의 결과에 대해 비교, 분석함으로써, 저차 패널법으로 해석할 때의 문제점을 제시하였고 선형 패널법에 대한 정확성과 어려움을 보였다. Neumann, Dirichlet 경계조건 및 혼합경계조건(Robin 경계조건)을 사용한 저차의 패널법을 비교하였으며, 이 중에서 혼합 경계조건을 사용한 해석방법이 뒷날의 두께가 얇고 캠버를 가지는 수중익에 대하여 특히 높은 정확도를 보이고 수렴 속도도 빠르다는 것을 보였다.

2. 경계치 문제의 정식화

2.1 기준 좌표계

2차원 수중익을 해석 하는데 있어 Fig. 1과 같이 2차원 유체장, v 가 경계면 S 로 둘러 쌓여 있다고 하자. 경계면 S 에서의 단위법선벡터 \hat{n} 은 유체장을 향할 때 양으로 정의한다. 경계면 S 는 수중익경계면 S_B , 반류경계면 S_w , 그리고 무한원방경계면 S_∞ 로 이루어져 있다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 좌표계는 수중익에 고정된 직교 좌표계를 채택하기로 하며, 수중익에 대

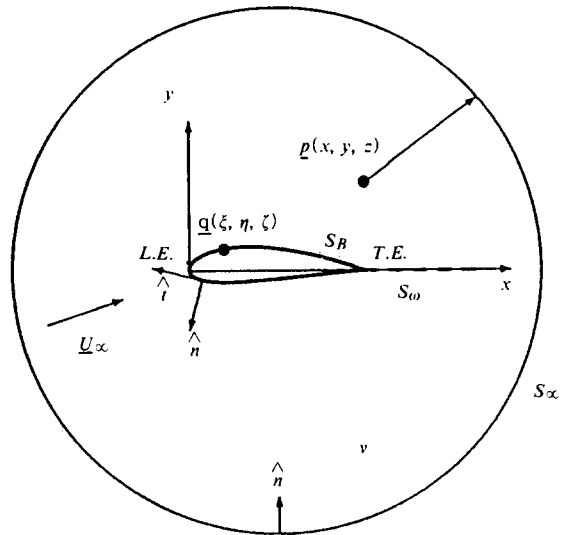


Fig. 1 기준좌표계 및 기호

한 유입유동 \vec{U}_∞ 이 받음각 α 를 가지고 유입한다고 하자.

본 논문에서는 특별한 언급이 없는 한, $p(x, y)$ 는 유동장점 또는 제어점을 의미하고 있으며, $q(\xi, \eta)$ 는 특이점의 좌표를 의미한다. 물체표면에서의 단위접선 벡터 \hat{n} 은 날개 뒷날에서 (T.E.)부터 반 시계방향으로 날개 표면에 접하는 방향으로 정의된다.

2.2 기본 가정

받음각 α 를 가지고 일정속도 \vec{U}_∞ 로 유입하는 비점성, 비압축성 유체의 비회전성이고 정상상태인 무한 영역의 유동중에 2차원 수중익이 놓여 있다고 하자. 유체중에서 전속도 벡터 \vec{V} 는 유입유동 \vec{U}_∞ 와 전체속도 포텐셜 Φ 로 표현 될 수 있다. 즉,

$$\vec{V} = \nabla \Phi \tag{1}$$

여기서, ϕ 를 섭동 속도 포텐셜이라 할 때 전체속도 포텐셜 Φ 는 유입유동의 속도 포텐셜 ϕ_∞ 와 수중익에 의한 섭동 포텐셜 ϕ 로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi_\infty + \phi \\ &= \vec{U}_\infty \cdot \vec{x} + \phi \end{aligned} \tag{2}$$

유체장 내부에서는 질량보존의 법칙이 성립하여야 하며 이로부터 속도포텐셜의 지배방정식을 얻는다. 즉,

$$\nabla^2 \Phi(p) = 0, \quad p(x, y) \in v \tag{3}$$

2.3 경계조건

유체영역을 둘러싸고 있는 경계면에 다음과 같은 경계조건을 부과함으로써 수중익주위의 유동을 유일하게 정의한다.

- 1) 무한원방에서의 교란속도 정지조건 : 무한원방 (S_∞)에서는 수중익에 의한 교란속도가 없다. 즉,

$$\nabla \Phi(p) \rightarrow \vec{U}_\infty, \quad p(x, y) \rightarrow \infty. \tag{4}$$

- 2) 수중익 표면에서의 운동학적 경계조건 : 수중익 표면(S_B)에서의 운동학적 경계조건은 유체가 수중익 표면을 통과할 수 없다는 비 침투 조건이다. 즉,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial (\phi_\infty + \phi)}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\hat{n} \cdot U_\infty, \quad p(x, y) \in S_B$$

여기서 \hat{n} 은 수중익 표면에서의 단위 법선벡터이며 Fig. 1에 처럼 수중익 표면에서 유체장을 향할 때 양으로 정의한다.

- 3) 수중익 뒷날에서의 Kutta 조건 : 수중익 뒷날 (T.E.)을 떠나는 유동은 수중익 뒷날에서 매끈하게 후류로 방출된다. 즉, 뒷날에서의 속도는 유한하다.

$$|\vec{V}_{T.E.}| < \infty, \quad \text{at T.E.} \tag{6}$$

3. 적분 방정식

3.1 Kutta 조건의 표현

Kutta 조건은 수학적으로 날개 뒷날에서의 속도가 유한하다는 식(6)에 의해 표현되지만, 물리적으로는 뒷날 근처의 유동이 접선방향으로 후류로 방출된다는 운동학적 경계조건, 또는 뒷날 하류에 접한 반류면에서의 압력차이가 없어야 한다는 역학적 경계조건으로 표현될 수 있다.

집중 보오텍스법을 사용하여 2차원 평판주위의 정상유동을 해석 하는데 있어서 James[6]는 평판을 등간격으로 분할한 후에 각 요소의 1/4지점에 집중 보오텍스와 3/4지점에 제어점을 분포함으로써 Kutta 조건을 만족시킬 수 있다는 것을 보인바 있으며, 동일한 수치해석 방법은 Kerwin and Lee[7]에 의하여 프로펠러의 성능해석에도 확장되어 사용되어 왔다.

본 논문에서의 해석방법은 포텐셜을 기저로 한 패널법으로써 이때의 Kutta조건의 적용을 Morino[8]가 보여준 바 있다. Morino[8]에 의한 방법은 반류면에서의 다이폴의 세기가 뒷날에서 두 판요소의 다이폴 세기의 차이와 같다는데에서 기초한 것으로 이는 2차원 수중익의 뒷날각이 작을 때 정확한 값을 준다. 그러나 3차원 문제에서는 교차류의 발생으로 뒷날에서의 새로운 Kutta조건이 필요하게 된다.

2차원 수중익에서는 반류면에서 발생하는 속도 포텐셜의 상승치가 뒷날에서의 두요소, 즉 윗면과 아래면의 전체 속도포텐셜의 차이와 같아진다는 사실로부터 Kutta조건을 만족시켜 줄 수 있다(Lee, J. T. [9]).

$$(\Delta \Phi)_{\text{wake}} = \Phi^u - \Phi^l + \vec{U}_\infty \cdot \vec{r}_{T.E.} \tag{7}$$

여기서 $\vec{r}_{T.E.}$ 는 뒷날에서 아랫면에서 윗면 쪽으로 향하는 두 판요소소의 제어점 사이의 벡터이다.

3.2 포텐셜을 기저로 한 적분방정식

Green정리로 부터 유체영역 V에서 앞의 경계조건을 만족하는 유체속도 포텐셜을 다음과 같은 적분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\phi_p = \int_{S_s} \left[-(\phi_q - \phi'_q) \frac{\partial G}{\partial n_q} + \left(-\frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi'_q}{\partial n_q} \right) G \right] dS + \int_{S_v} (-\Delta \phi_{T.E.}) \frac{\partial G}{\partial n_q} dS \quad (8)$$

- 여기서 ϕ = 유체장, v,에서의 섭동속도 포텐셜
- ϕ' = 수중의 내부, v',에서의 섭동속도 포텐셜
- $\vec{p}(x, y)$ = 섭동속도 포텐셜을 계산하는 제어점의 좌표
- $\vec{q}(\xi, \eta)$ = 특이점의 좌표
- $\Delta \phi_{T.E.}$ = 수중의 뒷날에서의 섭동포텐셜의 점프
- G = Green함수 = $\frac{1}{2\pi} \ln R(p; q)$

여기서 $R(p; q) = \vec{p}$ 점과 \vec{q} 점 사이의 거리

$$= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

식(8)은 $-(\phi_q - \phi'_q)$ 를 수중의 표면에서의 단위 법선 다이폴의 세기로, $(\frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi'_q}{\partial n_q})$ 을 쏘오스의 세기로 표현할 수 있으며 $-\Delta \phi_{T.E.}$ 는 반류면 Sw에서의 법선다이폴의 세기로 표현된다. 즉,

$$\begin{aligned} \mu_q &= -(\phi_q - \phi'_q) \\ \sigma_q &= \left(\frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi'_q}{\partial n_q} \right) \\ \Gamma &= \Delta \phi_{T.E.} \end{aligned} \quad (9)$$

수중의 내부에서의 속도포텐셜 ϕ' 은 물리적인 의미가 없으므로 수치해석을 수행하는데 있어서 어떤

값을 선택하여도 된다.

따라서 수중의 내부에서의 섭동포텐셜을 영으로 놓으면(즉, $\phi' = 0$) 수중의 표면에 있는 제어점 p에 대해 식 (8)은 다음과 같이 표현된다.

$$-\phi_p = \int_{S_s} \left[\phi_q \frac{\partial G}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} G \right] dS + \int_{S_v} \Delta \phi_{T.E.} \frac{\partial G}{\partial n_q} dS \quad (10)$$

여기서 제어점 p가 특이점 q로 접근할 때의 극한값을 적용하여 식(5)의 수중의 표면에서의 경계조건과 식(7)의 Kutta조건을 적용하면

$$-\frac{1}{2} \phi_p = \int_{S_s} \phi_q \frac{\partial G}{\partial n_q} dS - \int_{S_s} G (-\hat{n}_q \cdot \vec{U}_\infty) dS + [(\phi_N - \phi_1) + \vec{U}_\infty \cdot \vec{r}_{T.E.}] \int_{S_s} \frac{\partial G}{\partial n_w} dS \quad (11)$$

식(11)을 이산화하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_i + \sum_{j=1}^N \phi_j D_{ij} + (\phi_N - \phi_1) W_i \\ = \sum_{j=1}^N S_{ij} (-\hat{n}_j \cdot \vec{U}_\infty) - (\vec{U}_\infty \cdot \vec{r}_{T.E.}) W_i, \\ i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$D_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n_j} d\kappa, \quad S_{ij} = \int_{S_j} G d\kappa, \\ W_i = \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial n_w} d\kappa$$

3.3 속도를 기저로 한 적분방정식

수중의 표면에서 제어점 p에 대한 미분과 법선벡터의 내적을 식(10)에 취함으로써 다음과 같은 속도를 기저로 한 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$-\frac{\partial \phi_p}{\partial n_p} = \int_{S_s} \left[\phi_q \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} \frac{\partial G}{\partial n_p} \right] dS \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{S_v} \Delta\phi \tau.E. \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} dS \\
 \frac{\partial \phi_p}{\partial n_p} & = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} - \int_{S_v} \phi_q \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} dS \\
 & + \int \frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} \frac{\partial G}{\partial n_p} dS - \int_{S_v} \Delta\phi \tau.E. \\
 & \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} dS \tag{14}
 \end{aligned}$$

여기서 $\frac{\partial G}{\partial n_p}$ 는 특이점 q 에 분포되어 있는 단위세기의 소오스에 의해 제어점 p 에 유기되는 법선방향 속도성분으로 간주되고 $\frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_p}$ 는 특이점 q 에 분포되어 있는 단위세기의 법선 다이폴에 의해 제어점 p 에 유기되는 법선방향 속도성분이다.

3.4 혼합 경계조건 (Robin 경계조건)을 이용한 적분방정식

본 절에서는 혼합경계조건(Robin 경계조건)을 사용한 적분방정식의 유도과정에 대해 다시 살펴 보기로 한다. ϕ 는 물체외부 및 내부의 포텐셜을 각각 ϕ^+ , ϕ^- 로 표기할 때, 다음과 같이 적분형으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{x}) & = \int_{S_v} \left[-(\phi^+ - \phi^-) \frac{\partial G}{\partial n} + G \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial n} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \phi^-}{\partial n} \right) \right] dS \tag{15}
 \end{aligned}$$

위식을 해석할 때 내부 포텐셜 ϕ^- 의 값은 임의로 선택될 수 있으므로, 다음의 4가지에 대하여 검토하기로 한다.

$$\text{I} : \phi^+ = \phi^- \tag{16}$$

(내부유동의 Dirichlet 경계조건)
 경계면 S_B 를 지나서 포텐셜 ϕ 의 값이 연속이 되며, 법선방향 속도의 값이 불연속이 된다. 이때 (15)는 경계면에 소오스만을 분포하여 얻는 식이 된다.

$$\text{II} : \frac{\partial \phi^+}{\partial n} = \frac{\partial \phi^-}{\partial n} \tag{17}$$

(내부유동의 Neumann 경계조건)
 경계면 S_B 를 지나서 포텐셜의 법선 방향 변화율이 연속이 되며, 포텐셜의 값이 불연속이 된다. 이 때 (15)는 경계면에 다이폴만을 분포하여 얻는 식이 된다.

$$\text{III} : \phi^- = 0 \tag{18}$$

(내부유동의 Dirichlet 경계조건)
 내부 포텐셜을 영으로 하는 경우로, 경계면 S_B 의 내부에서의 유동은 유입유동과 같다. 이 때 (15)는 Morino의 방법으로 알려진 포텐셜을 기저로 하여 정식화한 식이 된다.

$$\text{IV} : \phi^- + \lambda \frac{\partial \phi^-}{\partial n} = 1 \tag{19}$$

(내부 유동의 Robin 경계조건)
 내부유동의 관점에서 다시 정리하면, 경우 I의 유동은 Dirichlet 경계조건으로 볼 수 있으며, 경우 II는 Neumann 경계조건, 경우 IV는 내부 유동 포텐셜 ϕ^- 의 결정을 위한 Robin 경계조건으로 볼 수 있다. 위 식 (15)를 유동장 변수 \vec{x} 에 대하여(제어점 위치에서 법선 방향으로 미분을 취하면, 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n_p} & = \int_{S_v} \left[(\phi^+ - \phi^-) \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial G}{\partial n_p} \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi^-}{\partial n_q} \right) \right] dS \tag{20}
 \end{aligned}$$

여기서 하첨자 p, q 는 각각 유동장점과 특이점과 관련된 양을 표시하기 위하여 사용되었다. 임의의 유동장점 \vec{x}_p 에 대하여, (20)에 임의의 양수 λ 를 곱하여 (15)와 더하면,

$$\begin{aligned}
 \phi_p + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n_p} & = \int_{S_v} \left[-\phi^+ \left\{ \frac{\partial G}{\partial n_q} + \lambda \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} \right\} + \frac{\partial \phi^+}{\partial n_q} \left\{ G + \lambda \frac{\partial G}{\partial n_p} \right\} \right] dS \\
 & + \int_{S_v} \left[\phi^- \left\{ \frac{\partial G}{\partial n_q} + \lambda \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} \right\} - \frac{\partial \phi^-}{\partial n_q} \left\{ G + \lambda \frac{\partial G}{\partial n_p} \right\} \right] dS \tag{21}
 \end{aligned}$$

위 식 우변의 두번째 적분의 피적분함수를 영으로 놓으면, 이는 내부 포텐셜 ϕ^- 에 대하여 다음과 같은 조건을 부과하는 것과 동일하다. 즉,

$$\phi^-_q + \left[\frac{-(G + \lambda \frac{\partial G}{\partial n_p})}{\frac{\partial G}{\partial n_q} + \lambda \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q}} \right] \frac{\partial \phi^-}{\partial n_q} = 0 \tag{22}$$

위 식 (22)가 식(19)의 Robin 경계조건이 됨을 보이기 위하여는, 위 식 (22)의 [] 내의 값이 λ 와 같다고 가정하여 다음 식 (23)을 얻은 후에, 이 등식을 만족시킬 조건을 찾을 필요가 있다.

$$-(G+\lambda \frac{\partial G}{\partial n_p}) = \lambda \left(-\frac{\partial G}{\partial n_q} + \lambda \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} \right) \quad (23)$$

위 식을 다시 정리하면,

$$(G+\lambda \frac{\partial G}{\partial n_q}) + \lambda \frac{\partial}{\partial n_p} (G+\lambda \frac{\partial G}{\partial n_q}) = 0 \quad (24)$$

여기서 만일 내부 유동장의 경계면에서의 포텐셜을 다음과 같이 취하면,

$$\phi^-_q = G+\lambda \frac{\partial G}{\partial n_q} \quad (25)$$

식 (25)를 (24)에 대입하여, 다음과 같은 관계식을 얻는다. 즉,

$$\phi^- + \lambda \frac{\partial \phi^-}{\partial n_p} = 0 \quad (26)$$

위 식은 Robin 경계조건 (19)에 의하여 자동적으로 만족되나, 식 (22)의 []내의 값이 λ 가 되기 위한 조건은 내부 유동의 포텐셜을 식 (25)에 보는 바와 같이 택함으로써 만족될 수 있음을 알 수 있다. $\lambda = \beta/(1-\beta)$, $0 \leq \beta \leq 1$ 로 치환하여, 식 (21)를 다시 정리하면,

$$(1-\beta)\phi_p + \beta \frac{\partial \phi}{\partial n_p} = \int_{S_2} \left[-\phi^+ \left\{ (1-\beta) \frac{\partial G}{\partial n_q} + \beta \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n_q} \right\} + \frac{\partial \phi^+}{\partial n_q} \left\{ (1-\beta)G + \beta \frac{\partial G}{\partial n_p} \right\} \right] dS \quad (27)$$

경계면 S_B 에서의 비침투 경계조건으로 부터

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\hat{n} \cdot \vec{U}_\infty \quad (28)$$

의 값을 알고 있으므로, 식 (22)는 $\beta \neq 0$ 일 때, 경계면에서의 포텐셜 ϕ 를 미지함수로 하는 제2종 Fredholm 적분방정식이 된다. 식 (22)에서 $\lambda = 0$ 이면 $\phi^- = 0$ 에 해당하는 포텐셜을 기저로 한 적분방정식이 되며, 이를 사용하여 얻어지는 행렬식은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 대각선 요소의 값이 자기유기 포텐셜인 $a^s(0.5 \text{ 또는 } \pi)$, 반대각선 요소의 값은 $a_s - \epsilon$ 이 된다.(여기에서 ϵ 은 날개 두께의 영향을 받는 아주 작은 양으로 두께가 영으로 접근할 때 ϵ 도 영에 접근한다. 또한, ω 는 후연 다이폴에 의한 영향을 의미한다.) 따라서 (22)를 날개 표면 위의 제어점에 적용하여 구하는 행렬식은 ill-condition이 되고, 특히, 날개 뒷날의 내각이 $\tau \leq 5^\circ$ 인 경우에는 해석 결과가 대각선 요소에 크게 영향을 받는다. 따라서 이와 같은 ill-condition 상태를 완화하기 위하여 β 의 값을 0이 아닌 값을 택함으로써, 다이폴에 의해 유기되는 범선방향속도 v 가 Fig. 3에서 보는 바와 같이 행렬의 대각선 및 반대각선에 거의 반대의 부호를 갖고 더해지도록 하여, 행렬의 성질을 바꿀 수 있다. 그러나, $\beta = 1$ 이면, 포텐셜 ϕ 를 결정하기 위한 제1종 Fredholm 적분방정식이 되어, 행렬이 ill-condition이 되므로, β 값은 0과 1 사이의 적절한 값을 취하도록 하여야 한다.

본 연구에서는 행렬식의 condition 수를 조사하여 β 의 값을 취하였으며 Kutta 조건은 저차의 특이점

$$\begin{bmatrix} a_s - w & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_s - \epsilon + w \\ \cdot & a_s & \cdot & \cdot & a_s - \epsilon & \cdot \\ \cdot & \cdot & \backslash & / & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & / & \backslash & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_s - \epsilon & \cdot & \cdot & a_s & \cdot \\ a_s - \epsilon - w & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_s - \epsilon + w \end{bmatrix}$$

Fig. 2 Influence coefficient matrix obtained by potential-based formulation

$$\begin{bmatrix} a_s - w + v & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_s - \epsilon + w - v \\ \cdot & a_s + v & \cdot & \cdot & a_s - \epsilon - v & \cdot \\ \cdot & \cdot & \backslash & / & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & / & \backslash & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_s - \epsilon - v & \cdot & \cdot & a_s + v & \cdot \\ a_s - \epsilon - w - v & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_s - \epsilon + w + v \end{bmatrix}$$

Fig. 3 Influence coefficient matrix obtained by applying the Robin boundary condition.

분포에 의한 패널법과 같은 방법을 취하였다. 이때의 압력계수 C_p 는 $1 - \frac{V^2}{U_\infty^2}$ 로 정의한다.

4. 수치해석 방법

경계치 문제를 해석하기 위해 수중익 표면의 쏘오스 또는 다이폴을 분포하기로 한다. 쏘오스나 법선다이폴은 특이함수의 특성에 의해 특이함수가 분포된 수중익 표면을 벗어나면 제어방정식, 식(3),과 무한원방 교란속도 정지조건, 식(4),를 자동적으로 만족한다. 따라서 앞으로의 수치해석은 식(5)의 수중익표면에서의 운동학적 경계조건과 식(6)의 Kutta 조건을 만족하도록 함으로써, 앞서의 경계치 문제들은 유일한 해를 가지게 된다.

4.1 특이점 분포법

속도 포텐셜을 기저로 한 패널법으로 경계치문제 해석을 수행하는데 있어서 특이점 분포법을 다음과 같이 표현할 수 있다. 첫째는 각각의 판요소에 일정한 세기를 가지는 법선다이폴이나 쏘오스를 분포하고 제어점을 각 판요소의 중간을 취하는 것으로 이 방법은 2차원 뿐만 아니라 3차원 형상에서도 그 적용이 간단하다.

수중익 표면에서 길이가 l 인 j 번째 판요소에 분포되어 있는 법선 다이폴 또는 쏘오스에 의해 제어점 p 에 유기되는 속도 포텐셜은 다음과 같이 표현된다. 즉,

$$\phi_u = \int_{l_j} \frac{\mu_q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_q} \ln R(p; q) dS$$

$$\phi_o = \int_{l_j} \frac{\sigma_q}{2\pi} \ln R(p; q) dS$$

여기서 μ_q 와 σ_q 는 각각 법선 다이폴과 쏘오스의 세기를 나타낸다.

둘째로 각 요소에 선형적으로 변하는 다이폴과 일정세기의 쏘오스를 분포시키는 방법으로 이는 법선다이폴과 쏘오스의 세기가 각 판요소에서 선형적으로 변화하는 특이 함수를 분포시키고 제어점을 각 판요소의 끝점을 취하는 것으로 이방법은 3차원 형상에서의 적용이 복잡하지만 위의 일정 상수 세기의 특이 함수 분포법 보다는 보다 정확한 특이항의 거동을 결정할 수 있는 장점이 있다.

4.2 해석 대상 날개

본 연구에서는 해석해가 존재하는 Karman-

Trefftz단면(이하 KT단면 이라고 칭함)에 대해 해석 하였다. Karman-Trefftz 단면은 뒷날의 두께를 지정해 줄 수 있을 뿐 아니라 본 논문에서 문제시 되고 있는 캠버를 가지는 단면에 대해서도 해석해를 구할 수 있는 장점이 있다. 중심이 $z_c = x_c + iy_c$ 인 원을 복소변환에 의해 뒷날각 τ 를 가지는 KT단면으로 변환하고 이때의 받음각을 α 라고 하자. 뒷날의 각을 1로 하였을 때 뒷날의 두께가 거의 0에 가까운 것으로 이는 Kinnas & Hsin[4]과 Yon, Katz & Plokin [5]이 제시한 문제를 내포하고 있는 단면형상과 같다.

5. 해석결과 및 고찰

5.1 수렴성 시험

수렴성을 조사하기 위해 날개 표면에 분포된 패널수가 20, 40, 60, 80, 100 일때 특이함수 분포 방법에 따른 수렴성 시험을 수행하였다. 각 패널에서 포텐셜을 기저로하여 특이점의 세기를 일정상수로 가정한 저차의 패널법에 대한 해석결과는 Fig. 4에 나타나 있다. 이것은 KT단면 ($\tau = 1, x_c = 0.2, y_c = 0.0, \alpha = 5$)에 대한 결과로써 $y_c = 0.0$ 으로 하여 캠버가 0인 단면이다. 이때에는 패널수 60일때 해석해와 잘 일치 하는것을 볼 수 있다. Fig. 5는 KT단면 ($\tau = 1, x_c = 0.15, y_c = 0.2, \alpha = 5$)에 대한 결과로써 이는 뒷날의 두께가 얇고 캠버가 있는 단면으로 특이점의 세기를 선형으로 가정한 패널법으로 해석하였으며 패널수가 100개 일때 해석해와 거의 일치하고 있다. 따라서 이후의 모든 해석에서 패널수가 100일때 충분

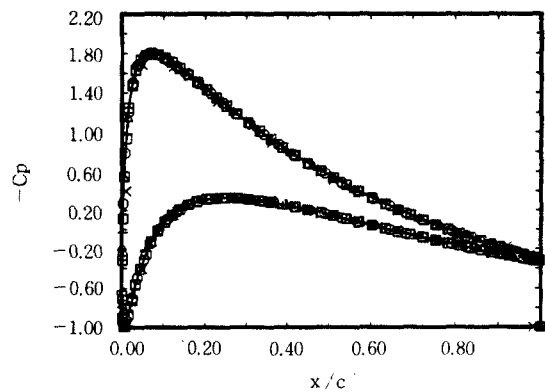


Fig. 4 Convergence test with $N_p = 20(\times), 40(+), 60(\Delta), 80(O), 100(\square)$ using constant-strength singularity panel for a symmetrical KT section($\tau = 1, x_c = 0.2, y_c = 0.0, \alpha = 5$)

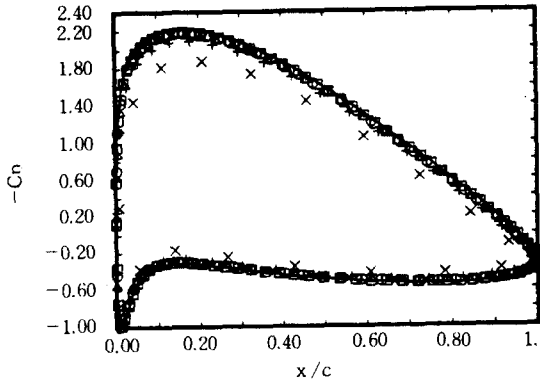


Fig. 5 Convergence test with $N_p = 20(\times)$, $40(+)$, $60(\Delta)$, $80(\circ)$, $100(\square)$ using linear dipole panel method for a cambered KT section ($\tau = 1$, $x_c = 0.15$, $y_c = 0.2$, $\alpha = 5$)

히 수렴된다고 가정하고 해석을 수행하였다.

5.2 해석결과 및 고찰

Kinnas & Hsin[4]와 Yon, Katz & Plokin[5]이 제시한 뒷날의 두께가 얇고 캠버를 가지는 단면에 대하여 해석을 수행하기 위해 KT단면을 해석대상 단면으로 사용하였다.

KT단면 ($\tau = 10$, $x_c = 0.1$, $y_c = 0.3$, $\alpha = 5^\circ$) 은 뒷날의 두께가 두껍고 캠버가 있는 단면이다. 이는 포텐셜을 기저로 하여 일정상수 세기의 특이점을 분포시킨 방법에 의해 해석할 수 있으며 이 방법의 적용은 식(12)에 나타나 있다. 이때에 압력계수 분포는 Fig. 6에서 처럼 뒷날 부근에서의 특이현상이 나타나

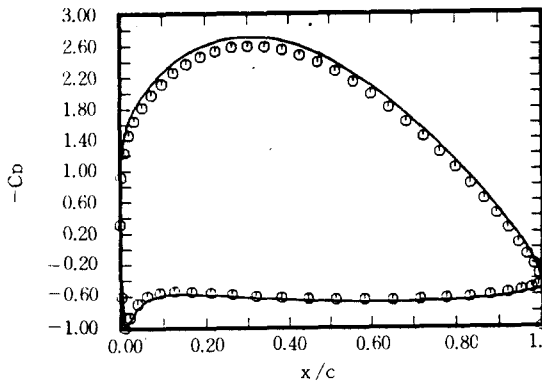


Fig. 6 Calculated(\circ) and analytical(-) pressure distribution on a KT section($\tau = 10$, $x_c = 0.1$, $y_c = 0.3$, $\alpha = 5$) with large T. E. angle using LOPM. $N_{panel} = 60$.

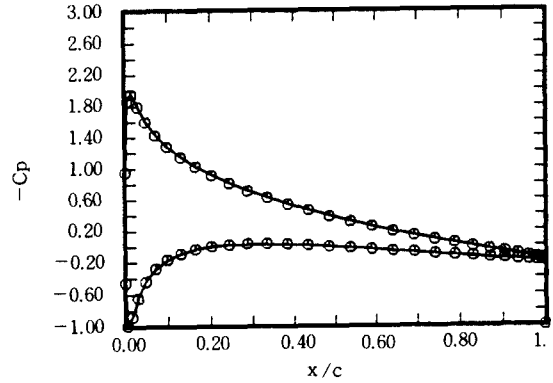


Fig. 7 Calculated(\circ) and analytical(-) pressure distribution on a symmetrical KT section ($\tau = 0.001$, $x_c = 0.1$, $y_c = 0.0$, $\alpha = 5$) using LOPM. $N_{panel} = 60$.

지 않았다. 또다른 KT단면 ($\tau = 0.001$, $x_c = 0.1$, $y_c = 0.0$, $\alpha = 5^\circ$)에 대해서도 같은 방법으로 해석하였다. 이 단면은 뒷날의 두께가 0에 가깝고 캠버가 없는 단면으로 이때에도 뒷날 부근에서의 특이현상은 나타나지 않았다(Fig. 7).

Fig. 8은 위와 같은 해석방법을 뒷날의 두께가 비교적 얇고 캠버를 가지는 KT단면 ($\tau = 1$, $x_c = 0.15$, $y_c = 0.2$, $\alpha = 5^\circ$)에 적용한 결과로써 패널수 100일때에 뒷날에서 압력계수 분포는 해석해와 일치하지 않는 것을 볼 수 있다. 이러한 현상은 특이점의 세기가 선형적으로 변한다고 가정하여 해결할 수 있다(Fig. 9). 하지만 이러한 방법은 3차원 현상으로서의

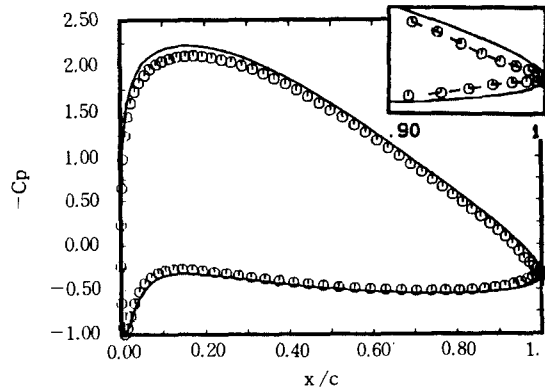


Fig. 8 Calculated(\circ) and analytical(-) pressure distribution on a cambered KT section($\tau = 1$, $x_c = 0.15$, $y_c = 0.2$, $\alpha = 5$) with small T. E. angle using LOPM. $N_{panel} = 100$.

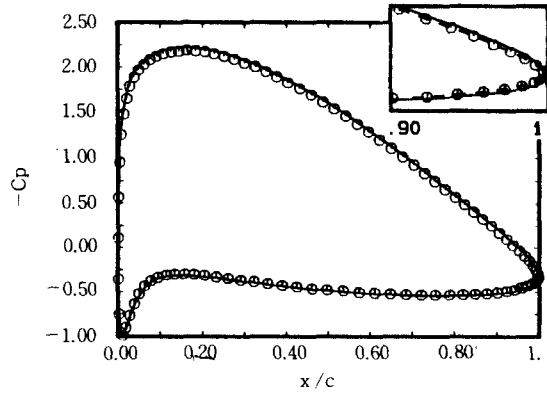


Fig. 9 Calculated(○) and analytical(-) pressure distribution on a KT section($\tau = 1, x_c = 0.15, y_c = 0.2, \alpha = 5^\circ$) using linear dipole panel, Npanel = 100.

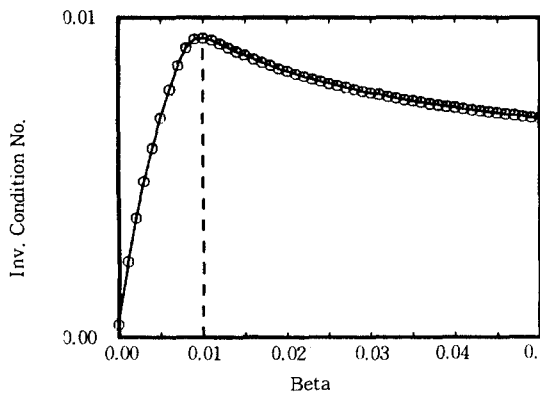


Fig. 10 Inverse condition number.

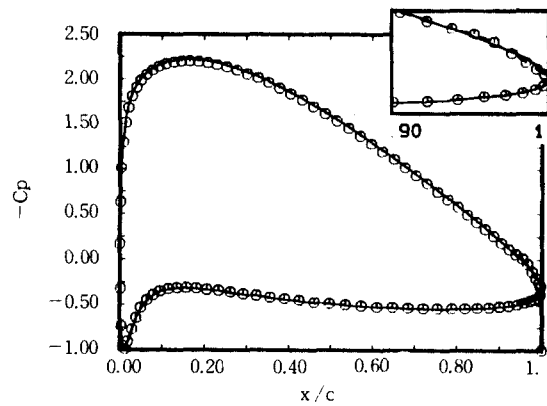


Fig. 11 Calculated(○) and analytical(-) pressure distribution on a KT section($\tau = 1, x_c = 0.15, y_c = 0.2, \alpha = 5^\circ$) using robin boundary condition, Npanel = 100.

적용이 용이하지 않을 뿐만 아니라 계산시간의 증가를 가져오므로 저차의 패널법을 사용한 해석법을 이용하는 것이 필요하다. 이러한 해결방법중에서 KT단면에 대해 혼합경계조건을 적용하는 것으로 이를 위해 같은 단면에 대해 Condition수를 조사하였다. Fig. 10를 보면 β 가 0.008-0.01일 때 Condition수의 역수가 가장 크게 나타났다.

KT단면($\tau = 1, x_c = 0.15, y_c = 0.2, \alpha = 5^\circ$)에 대해 혼합경계조건을 적용하고 이때 $\beta = 0.008$ 로 하여 해석 하였을 경우 압력분포가 Fig. 11에 나타나 있다. 이때의 압력분포는 해석해와 잘 일치 하고 있다. 따라서 뒷날의 두께가 얇고 캠버를 가지는 단면에 대하여 혼합경계조건의 사용은 적절한 β 를 선택함으로써 수렴성이 빠르고 정확한 해를 구할 수 있다. 한편 저차의 패널법과 선형패널법 그리고 혼합경계조건을 사용하여 KT단면 ($\tau = 1, x_c = 0.15, y_c = 0.2, \alpha = 5^\circ$)에 대한 수렴시험결과를 Fig. 12에 비교하였다. Fig. 12는 패널수를 10에서 210까지 증가시켰을 경우 이때의 양력계수를 비교한 것으로 이를 보면 혼합경계조건을 사용한 해석법이 해석해로 가장 빨리 접근함을 볼 수 있다.

반면에 지금까지 일반적으로 프로펠러에 이용되어 온 형상과 유사한 KT단면 ($\tau = 10.5, x_c = 0.2, y_c = 0.0, \alpha = 5^\circ$)에 대하여는 각각의 해석방법에 대한 양력계수의 차이가 아주 근소함을 알 수 있으며, 이 중에서도 선형특이점 분포에 따른 해석법이 가장 수렴성이 좋음을 관찰할 수 있다.

따라서 지금까지 행하여 온 일반적인 단면에 대해

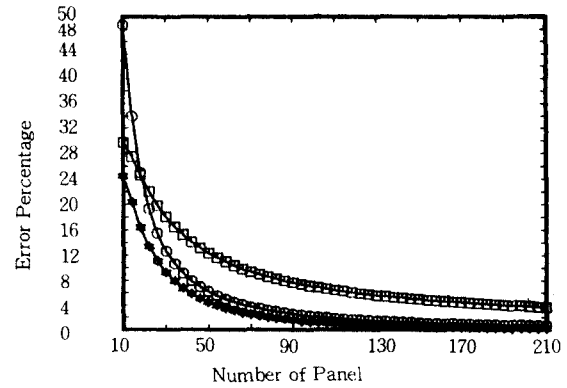


Fig. 12 Comparison of error in lift coefficient for constant(□), linear(○), robin(☆) formulations for a KT section($\tau = 1, x_c = 0.15, y_c = 0.2, \alpha = 5^\circ$)

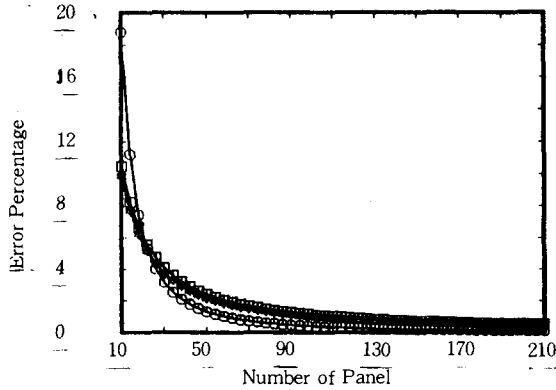


Fig. 13 Comparison of error in lift coefficient for constant(\square), linear(\circ), robin(\star) formulations for a KT section($\tau = 10.5$, $x_c = 0.2$, $y_c = 0.0$, $\alpha = 5$) similar to typical propeller section.

여서는 저차의 패널법으로도 만족한 해를 얻을 수 있으나, 뒷날의 두께가 얇고 캠버를 가지는 KT단면 같은 단면에서는 혼합경계조건의 사용이 요구되어 진다.

6. 결 언

- ① 2차원 수중익에 대하여 특이점의 세기가 각각의 판 요소에서 일정한 포텐셜을 기저로한 해석 방법이 뒷날의 두께가 얇고 캠버가 있을 경우 뒷날부근에서 발생하는 문제점을 보였다.
- ② 특이점의 세기가 선형적으로 변화할 경우 ①의 해석대상 단면에 대해 발생하는 문제점을 해결할 수 있으나 이러한 방법은 3차원 형상으로의 확장이 용이하지 않다.
- ③ 혼합 경계조건을 사용하여 문제를 정식화하였고 이를 2차원 수중익에 적용하여 ①에서 발생한 문제점을 해결하였으며 이 방법은 3차원 형상으로의 확장이 용이하다.
- ④ 혼합경계조건의 사용에 있어서 β 의 적절한 선택을 위한 다른 접근 방법이 검토되어야 할 것이다.

7. 후 기

본 연구는 한국과학재단 '93 목적기초 과제의 일부로 수행되었으며, 그 지원에 심심한 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

- [1] Lee, C. -S. , "Prediction of Steady and Unsteady Performance of Marine Propeller with or without Cavitation by Numerical Lifting Surface Theory," Ph. D. Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., Cambridge, 1979.
- [2] Hess, J.L., & Valarezo, W.O., "Calculation of Steady Flow about Propellers using a Surface Panel Method," J. Propulsion, M.I.T., Cambridge, Mass., 1979.
- [3] Moran, J., "An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics," John Wiley and Sons, 1984.
- [4] Kinnas & Hsin, C.Y., "On the Local Error of a Low-Order Boundary element method at the Trailing Edge of a Hydrofoil and its Effect on the Global solution," 1991.
- [5] Yon, Katz and Plotkin, "Effect of Airfoil (Trailing-Edge) Thickness on the Numerical Solution of Panel Method Based on the Dirichlet Boundary Condition," AIAA Journal, Vol. 30, No. 3, 1992, pp 697-702.
- [6] James, R.M., "On the Remarkable Accuracy of the Vortex Lattice Method," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 1, 1972.
- [7] Kerwin J.E. and Lee, C.S., "Prediction of Steady and Unsteady Marine Propeller Performance by Numerical Lifting-Surface Theory," Trans. SNAME, Vol. 86, 1978.
- [8] Morino, L., and Kuo, C.C., "Subsonic Potential Aerodynamics for Complex Configurations : A General Theory," AIAA Journal, Vol. 12, No. 2, 1974, pp. 191-197.
- [9] Lee, J. -T., "A potential-based Panel Method for the Analysis of Marine Propellers in Steady Flow," Ph. D. Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., Cambridge, Mass., 1987