論文93-30B-6-1

Perceptron 알고리듬을 이용한 가중 순서 통계 필터의 설계

(A Design Method for Weighted Order Statistic Filters Based on the Perceptron Algorithm)

鄭 炳 章*, 李 勇 勳*

(Byeong Jang Jeong and Yong Hoon Lee)

要 約

가중 순서 통계 (weighted order statistic, WOS) 필터는 미디언, 순서 통계, 가중 미디언 필터등을 포함하는 비선형 디지틀 필터의 일종이다. 본 논문에서는 평균 절대 오차를 최소화하는 최적 WOS 필터를 설계하는 문제가 two- class 선형 분류 문제로 생각될 수 있음을 관측한 후 선형분류에서 널리 쓰이는 perceptron 알고리듬을 적용하여 WOS 필터를 설계하였다. 또한 perceptron 알고리듬이 대부분의 실제적인 상황에서 최적 또는 최적에 가까운 WOS 필터를 구할 수 있음을 실험을 통하여 보였다.

Abstract

In this paper, we observe that the design of optimal weighted order statistic(WOS) filters minimizing the mean absolute error criterion can be thought of as a two-class linear classification problem. Based on this observation, the perceptron algorithm is applied to design WOS filters. It is shown, through experiments, that the perceptron algorithm can find optimal or near optimal WOS filters in practical situations.

I. 서론

Weighted order statistic (WOS) 필터는 비선형 디지틀 필터의 일종이다.[1] 이 필터는 입력 데이터 위를 움직여 가는 윈도우(window)를 가지고 있으며 윈도우 크기와 같은 갯수의 가중치(weight)및 하나의 문턱값(threshold value)을 필터 계수로 가지고 있는데, 이 필터의 출력 값은 윈도우 내의 각 입력값을 대응되는 가중치만큼 반복하며 늘어놓은 다음 얻어진 데이터 중 T번째 큰 값을 골라냄으로써 구해진다. 여기에서 T는 문턱값이다. 문턱값이 가중치들의 합의 절반일 때, 즉 중앙값(median)을 골라낼 때, WOS 필터는 weighted median (WM) 필터[1]-[3]가 된다. 또한 weight가 모두 같은 값을 가지는 WM 필터는 미디언 필터이다. 따라서 WOS 필터는 영상처리등에 많이 사용되어온 WM 및 미디언 필터를 특수한 경우로 포함하며 이 외에도 rank order 필터[4] 등을 포함한다.

WOS 필터는 국부 최대 최소(local MAX/MIN)의 합성으로 표현되는 스택(stack)필터의 특수한 경우로 생각할 수 있다.[5] 스택 필터는 선형 계획법(linear programming)을 사용하여 평균 절대 오차(mean absolute error, MAE)를 최소화하는 최적 설계[6]·[7]가 가능한 반면에, WOS 필터는 스택 필

*正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)
接受日字: 1993年 1月 21日

터의 특수한 경우임에도 불구하고 선형 계획법을 사용하여서는 설계가 불가능하다. WOS 필터의 설계를 위하여 Neuvo등[8]은 MAE를 선형 근사화한 후 steepest descent 알고리듬을 응용하는 방식을 제안하였다. 이 방식은 그 구현이 간단하나 어떠한 경우에도 MAE를 최소화시키는 최적 WOS 필터를 설계할 수는 없다.

본 논문에서는 WOS 필터의 최적 설계문제가 패턴 인식에서의 two-class 선형 분류기(linear classifier) 설계 문제[9]와 긴밀한 관계가 있음을 관측하고, 이로부터 perceptron 알고리듬을 응용하여 WOS 필터를 설계하는 방법을 제안하였다. 제안된 방식은 특수한 경우들에 있어서 최적 WOS 필터를 구할 수 있으며 많은 실제적인 경우에 최적 WOS 필터와 유사한 필터를 찾아낼 수 있다. 또한 perceptron 알고리듬을 사용하고 있으므로 그 구현이 간단하다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. Ⅱ장에서는 WOS 필터, 스택 필터의 정의와 성질등에 대해 간단히 살펴 본다. Ⅲ장에서는 perceptron 알고리듬을 이용한 WOS 필터 설계 방법을 제안한다. 제안한 방법의 타당성을 보이기 위하여 실험을 수행하고 기존의 방식과 비교하였는데 이 결과는 Ⅳ장에서 서술되었다.

Ⅱ. 스택 필터와 WOS 필터에 대한 고찰

입력 신호를 X(n), 필터의 출력 신호를 Y(n) 이라 하고 윈도우의 크기가 b 라고 할 때, 시간 계수 n 에 위치한 윈도우내의 입력들은 X(n)과 같은 벡터(vector)로 나타낸다. $X(n) = [X(n-b_1), \dots, X(n), \dots, X(n+b_2)]^t = [X_1(n), \dots, X_j(n), \dots, X_b(n)]^t$, 여기서 $b=b_1+b_2+1$, $X_j(n)=X(n-b_1-1+j)$이며 t는 'transposition'을 나타낸다. $X_j(n)$에서 $j = b_1+1$인 경우 즉, 윈도우내에서 기준점에 위치한 입력값을 특별히 $X_r(n)$으로 나타내겠다. 수식 표현을 간단히 하기 위하여 앞으로 X(n), $X_j(n)$ 및 Y(n)은 그냥 X, X_j 및 Y로 표시한다.

1. 스택 필터의 정의[1],[5]

스택 필터는 윈도우내의 입력값 $X_1, \dots, X_b$ 의 최대/최소 연산의 합성으로 나타내어지는 모든 필터를 포함한다. 한 예로 b = 3 일 때 Y = MAX{MIN(X1, X2), MIN(X_2, X_3)}는 스택 필터이다. 스택 필터의 출력이 Y = F(X)로 나타내어지고 입력값 X_i가, $1 \le i \le b$, 0에서 M-1 사이의 정수값을 가진다고 하자. 여기에서 F(X) 는 최대/최소 연산들의 합성함수이다. 그러면

$$Y=\sum_{m=1}^{M-1} T_m[F(X)] = \sum_{m=1}^{M-1} F[T_m(X_1),\cdots,T_m(X_b)] \tag{1}$$

여기서 $T_m(X_i)$ 는 $X_i \ge m$ 인 경우 그 값이 1, 그렇지 않은 경우 그 값이 0이 되는 함수이다. 두번째 등식은 최대/최소 연산의 합성함수가 임의의 비감소 함수와 교환(commute)한다는 사실에 근거한다.[10] 위에서와 같이 multilevel 입력을 가진 어떤 필터가 이진 입력 필터들의 합으로 나타내어질 때 이 필터는 threshold decomposition 성질을 가진다고 말하며 $T_m(X_i)$는 0 또는 1의 값을 가지는 이진수이므로 F $[T_m(X_1), \cdots, T_m(X_m)]$ 도 0 또는 1 의 값을 가지게 되어 이 함수는 Boolean 함수가 된다. 그런데 이진 입력에 대한 최대/최소 연산은 각각 논리 OR 및 AND 연산이므로 이 Boolean 함수는 논리 negation 연산이 없는 positive Boolean function (PBF)이다. Threshold decomposition 성질은 스택 필터가 이진영역에서 PBF만을 사용하여 간단히 표현될 수 있게 하여준다. 한 예로 이진 입력 값들을 $x_1, \dots, x_3$ 로 표현할 때 앞에서의 스택 필터는 $y = x_1x_2 + x_2x_3$ 로 간단히 나타내어진다. 여기에서 곱과 합은 각각 논리 AND와 OR 연산이다. 스택 필터는 이진 영역에서 PBF로 나타내어지며 threshold decomposition 성질을 갖는 모든 필터를 포함한다.

2. WOS 필터

WOS 필터의 출력 Y 는 윈도우 내의 각 성분 X_i를 가중치 W_i개 만큼 반복하여 늘어놓은 다음 $\sum_{i=1}^{b} W_i$개의 성분들 중 T번째 큰 값을 골라냄으로써 구해진다. 이는 아래의 식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$Y = T^{th}\text{Largest}\left\{\overbrace{x_1,\cdots,x_1}^{W_1}\overbrace{x_2,\cdots,x_2}^{W_2},\cdots,\overbrace{x_b,\cdots,x_b}^{W_b}\right\} \tag{2}$$

이 식에서 W_i, $1 \le i \le b$, 는 양의 정수이다. 윈도우내의 입력값 $X_1, \dots, X_b$중 i번째 큰 값을 $X_{(i)}$, 그에 대응되는 가중치를 $W_{(i)}$로 나타내자. 이 때 1과 b 사이의 임의의 정수 k 에 대하여 $X_{(k)}$가 WOS 필터 출력값이 될 필요 충분 조건은

$$k = \min\left\{ j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{j} W_{(i)} \ge T \right\} \tag{3}$$

이 된다. WOS필터는 식 (3)을 사용하여 직접 정의가 되기도 하는데 이 경우에는 가중치 W_i와 문턱값 T 가 양의 정수에 국한될 필요가 없이 임의의 비음수(nonnegative real)값을 가질 수 있다. 이와 같이 정의된 WOS 필터에 대해서는 항상 그에 대응되는

(2)식과 같은 필터 표현을 찾을 수 있다.

입력이 0 또는 1 만을 가지는 이진 신호일 때 식 (3)을 사용하여 출력을 쉽게 표현할 수 있다. 구체적으로 이진 입력을 x_i , $1 \le i \le b$, 출력을 f(x)로 표현할 때

$$f(x) = \begin{cases} 1, & if \sum_{i=1}^{b} W_i x_i \ge T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$
$$= U(a^t z)$$

이 식에서 $a = [W_1, W_2, \ldots, W_b, T]^t$, $z = [x_1, x_2, \ldots, x_b, -1]^t$ 이며 U(.)는 단위 계단(unit step) 함수이다. (4) 식과 같이 나타내어지는 함수는 threshold 함수[11]라 불리우는데 WOS 필터의 경우는 위에서 언급된대로 $W_i \ge 0$, $T \ge 0$ 이므로 (4) 식의 threshold 함수는 PBF가 된다. 또한 WOS 필터는 threshold decomposition 성질을 가지고 있으므로 이 필터는 스택 필터의 특수한 경우이고, 이진 영역에서 threshold 함수 또는 PBF를 사용하여 완전히 정의될 수 있다.

Ⅲ. WOS 필터의 설계

이 장에서 우리는 우선 MAE를 최소화시키는 최적 WOS 필터가, 스택 필터의 경우와는 달리, 선형계획법을 통하여는 설계될 수 없음을 본다. M - valued multilevel 입력 벡터 $X = [X_1, \ldots, X_b]^t$ 에 대하여 F(X) 로 표현되는 스택 필터를 생각하자. F(X)가 어떤 신호값 S 에 대한 추정(estimation)이라면 S 와 F(X) 사이의 MAE(mean absolute error)는 $MAE = E\{|S - F(X)|\} = \sum_{m=1}^{M-1} E\{|T_m(S) - F[T_m(X_1), \cdots, T_m(X_b)]|\}$ 와 같이 되며, 이 식은 몇 단계 유도과정을 거쳐 MAE $= \sum_{j=0}^{2^b-1} c_j f(x^j) + C$ 로 표현된다.[6] [7] 여기서 $f(x^j)$는 이진 입력 벡터 x^j 에 대한 필터 출력이며, c_j와 C는 입력의 통계적 특성에 따라 다음과 같이 결정되는 상수이다.

$$c_j = \sum_{m=1}^{M-1} \left\{ \mathrm{Prob}\left[s_m = 0, x_m = x^j\right] - \mathrm{Prob}\left[s_m = 1, x_m = x^j\right] \right\}, \tag{5}$$

$$C = \sum_{j=0}^{2^b-1} \sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{Prob}\left\{s_m = 1, x_m = x^j\right\}$$

여기서 $s_m = T_m(S)$ 이며 $x_m = [T_m(X_1), \ldots, T_m(X_b)]^t$이다. f(.)가 스택 필터를 의미한다면, 최적 스택 필터를 구하는 것은 아래의 목적함수 J(f) 를 최소화시키는 문제가 된다.

find out $f(.)$ minimizing

$$J(f) = \sum_{j=0}^{2^b-1} c_j f(x^j) \tag{6}$$

subject to the constraints

$$f(x^j) \ge f(x^i) \text{ if } x_j \ge x^i \tag{7}$$

이 문제에서 식 (7)의 부등식은 stacking constraints로서 f(.)를 PBF로 제한하기위한 조건이다. 이 최적화 문제는 O(b 2^b) 변수를 가진 선형 계획법(linear programming)을 사용하여 풀 수 있다. 그러나 선형 계획법의 변수의 갯수가 b의 증가에 따라 너무 급속히 증가하여 실제적으로 사용하는데 어려움이 있다.

최소의 MAE를 가지는 최적 WOS 필터를 구하기 위하여는 식 (6)의 목적함수를 최소화시키는 WOS 필터를 찾아야되는데 이 때 제한조건은 필터 f(.)가 식 (4)의 threshold 함수 형태가 되어야 한다는 것이다. 식 (4)와 식 (6)을 사용하면 최적 WOS 필터의 설계 문제는 아래와 같이 써진다.

find out a vector $a = \left[W_1, \cdots, W_b, T\right]^t$ minimizing

$$J(a) = \sum_{j=0}^{2^b-1} c_j U(a^t z^j) \tag{8}$$

subject to the constraints

$$W_i \ge 0 \;\; for\ all\ i,\ 1 \le i \le b, \quad T \ge 0 \tag{9}$$

위의 최적화 문제는 최적 스택 필터 설계 때와는 달리 선형 계획법으로 풀 수 없다. 이는 식 (8)에서의 단위 계단 함수 U(.) 가 비선형이기 때문이다. 또한 단위 계단 함수의 불연속성 때문에 gradient 방법등의 잘 알려진 최적화 기법을 직접 적용할 수 없다. 다음에서 우리는 식 (8)의 목적 함수를 최소화시키는 문제는 two-class 선형 분류 문제로 생각할 수 있음을 보인다. 식 (8)에서 cost c_j 는 양 또는 음의 실수값을 가지고 단위 계단 함수는 항상 1 또는 0의 값을 가지므로 c_j 가 음수일 때마다 단위 계단 함수값이 1이 되도록하면 목적 함수 J(a)가 최소로 된다. 즉 각 j, $0 \le j \le 2^b - 1$, 에 대하여 단위 계단 함수값은 다음과 같이 주어져야 한다.

$$U(a^t z^j) = \begin{cases} 1 & if\ c_j < 0 \\ 0 & if\ c_j > 0 \end{cases} \tag{10}$$

이 식은 아래의 부등식과 동일하다. 모든 j에 대하여

$$\begin{cases} a^t z^j \ge 0 & if\ c_j < 0 \\ a^t z^j < 0 & if\ c_j > 0 \end{cases} \tag{11}$$

식 (11)을 만족시키는 WOS 필터가 존재한다고 가정했을 때, 이 식을 만족시키는 벡터 a를 찾는 문제는 two-class 선형 분류 문제이다. 좀 더 자세히 설명하기 위해 벡터들의 집합인 $Z^+ \equiv \{z^j \mid c_j < 0\}$와 $Z^- \equiv \{z^j \mid c_j > 0\}$를 정의하자. 이 때 $\{z^j \mid 0 \le j \le 2^b - 1\}$ 중에서 $c_j = 0$ 인 cost를 갖는 벡터들은 무시된다. 식 (10)의 벡터 a를 찾는 문제는 Z^+와 Z^-를 분류하는 선형 분류 함수를 찾는 문제와 동일하다. 만일 Z^+와 Z^-가 선형 분리 가능하다면 식 (11)를 만족하는 벡터는 존재하고 그와 같은 벡터는 널리 알려진 perceptron 알고리듬을 사용하여 찾을 수 있다. [9] 필터 입력 신호 X(n) 이 바로 원하는 신호 S(n)이 될 때는(잡음이 없는 경우) 당연히 최적 필터는 identity 필터가 되는데 이 필터는 WOS 필터이다. 여기에서 우리는 이 경우에 Z^+와 Z^-가 선형 분리됨을 유추할 수 있다. 아래의 관측은 이를 증명한다.

관측 1 : S = X인 경우 Z^+와 Z^-를 선형 분리하는 벡터 a 는 항상 존재한다.

증명: 이진 벡터 $x^j = [x^j_1, \ldots, x^j_r, \ldots, x^j_b]^t$ 에서 X = S 이라면 모든 j 에 대하여 $x^j_r = s_m$ 이 되므로 어떤 x^j, $0 \le j \le 2^b-1$, 에 대하여 $x^j_r = 1$ 이었다면 $\mathrm{Prob}\{ s_m = 1, x_m = x^j \} = \mathrm{Prob}\{ x_m = x^j \} \ge 0$, $\mathrm{Prob}\{ s_m = 0, x_m = x^j \} = 0$. 따라서 $x^j_r = 1$인 모든 j에 대하여 $c_j = \sum_{m=1}^{M-1}\left\{-\mathrm{Prob}\left[x_m = x^j\right]\right\} \le 0$ 이 되며 이와 같은 방법으로 $x^j_r = 0$ 인 모든 j에 대하여 $c_j \ge 0$ 이 됨을 알 수 있다. 즉 잡음이 없는 경우 $Z^+ = \{ z^j \mid c_j < 0 \} \subset \{ z^j \mid x^j_r = 1 \}$, $Z^- = \{ z^j \mid c_j \ge 0 \} \subset \{ z^j \mid x^j_r = 0 \}$으로 되며 이를 분리시키는 벡터 a 는 항상 존재한다. 한 예로 $a = [W_1, \ldots, W_r, \ldots, W_b, T]^t$ 에서 x^j_r 에 대응되는 가중치 W_r와 문턱값 T가 1이고 다른 모든 가중치들이 0인 identity 필터는 Z^+ 와 Z^-를 선형 분리한다. 그러나 입력 신호 X에 잡음 성분이 증가하게되면 선형 분리되지않는 경우가 많아진다. 이 사실은 Ⅳ장의 실험을 통하여 입증한다.

식 (11)을 만족시키는 벡터 a 가 식 (9)의 조건들을 만족한다면 이 벡터는 최적 WOS 필터의 필터계수가 된다. 이와 같이 구해진 WOS 필터는 J(a)가 가질 수 있는 가장 작은 값을 가지며, 식 (6)의 최적화를 통하여 얻어진 최적 스택 필터와 동일하다. 그러나 많은 실제적인 경우에 Z^+와 Z^-는 선형 분리 가능하지 않으며 또한 선형 분리 가능하더라도 식 (9)의 조건을 만족하지 않는 경우가 생길 수 있다. 아래의 예는 이러한 경우들을 설명한다.

예 1: 윈도우 크기 b = 2일 때 2^2 개의 이진 벡터들이 2차원 공간영역에서 cost의 부호에 따라 그림 1의 세가지 분포중 한분포를 가진다고 하자. 여기서 $c_j > 0$인 벡터들은 ●, $c_j < 0$인 벡터들은 ■로 나타내었다. 그림 1.(a)의 경우는 비음수인 W_1, W_2, T 로써 이진 벡터들을 선형 분리할 수 있는 경우로서 perceptron 알고리듬을 이용하여 최적 WOS필터를 구할 수 있다. 즉 (11) 식을 만족하는 WOS 필터 계수를 찾을 수 있는데, 한 예로 $[W_1, W_2, T] = [0, 1, 1]$ 를 계수로 갖는 WOS 필터는 최적 WOS 필터이다. 물론 이 경우에 최적 WOS 필터는 최적 스택 필터와 동일하다. 그림 1.(b)의 경우는 perceptron 알고리듬으로 이진벡터들을 선형 분리시켜주는 $[W_1, W_2, T]$ 를 찾을 수는 있으나 이 값들이 모두 비음수가 될 수는 없는 경우이다. 이 때 얻어지는 최적 계수중 한 예는 [-1, 0, 0] 인데 이 계수를 가지는 필터는 WOS 필터가 아니며 스택 필터 또한 아니다. 이 경우에 최적 WOS 필터는 cost를 점검하여 찾을 수 있는데, 한 예로 2^2개의 cost들이 $\{c_0, c_1, c_2, c_3\} = \{-0.2, -0.3, 0.3, 0.1\}$이었다고 할 때 식 (9)를 만족하는 식 (8)의 최소값은 -0.1 이며 이 때의 WOS 필터 계수의 한 예는 [1, 1, 0] 이다. 즉 모든 이진 벡터에 대해 출력이 1이 되는 필터이다. 그림 1.(c)의 경우는 이진벡터들이 선형 분리될 수 없는 경우로서 perceptron 알고리듬으로는 최적 WOS 필터의 계수를 구할 수 없으며 그림 1.(b)에서와 마찬가지로 cost들을 점검하여 exhaustive search를 통하여 최적 필터를 찾아야 한다. 예를 들면 $\{c_0, c_1, c_2, c_3\} = \{0.2, -0.3, -0.3, 0.1\}$일 때 $x = x^0$에 대해서만 필터 출력이 0, 나머지 이진 벡터들에 대한 출력은 1이 될 때 그 필터는 최적 WOS 필터가 된다. $[W_1, W_2, T] = [1, 1, 1]$ 인 WOS 필터는 이러한 최적 WOS 필터이다.

우리는 식 (10)을 성립시키는 WOS 필터가 존재한다고 가정하고, 선형 분류기 방법중 널리 알려진 perceptron 방법을 적용하여 WOS 필터를 설계하겠다. 우리가 사용할 perceptron criterion 함수 $J_p(a)$는

$$J_p(a) = \sum_{z_j \in Z_m} c_j z^t a^j \tag{12}$$

여기에서 $Z_m = \left\{z^j \middle| c_j a^t z^j > 0\right\}$인데, 이는 a에 의해 잘못 분류된(misclassified) 벡터 z^j들의 집합으로 볼 수 있다. 왜냐하면 식 (10)이 만족될 때는, 다시 말해서 제대로 분류될 때는, 식 (11)로부터 $c_j a^t z^j \le 0$이 성립되기 때문이다. 이 criterion 함수 $J_p(a)$가 항상 비음수인 것은 자명하다. 식 (10)에서 c_j가 주어진 상수이므로 $J_p(a)$를 최소화시키는 것은 일반적인

perceptron 알고리듬에서와 똑같이 수행될 수 있다. 단 여기에서 가중치 벡터 a의 비음수 조건이 고려되어야 한다. 식 (12)를 최소화시키는 알고리듬은 아래에 요약된다.

제안된 알고리듬.

a(k)가 k번째 반복(iteration)에서 구해진 가중치 벡터(weight vector)라 하자.

1단계. 원소가 임의의 비음수 값을 가지는 (b+1) × 1 벡터 a(1)을 정한다. 또한 k=1로 놓는다.

2단계. $a(k+1) = a(k) - \rho_k \sum_{z_j \in Z_m(a(k))} c_j z^j$

이 때 a(k+1)의 원소중 음수값을 가지는 것들은 모두 0으로 바꾼다. 여기에서 $Z_m(a(k)) = \{z^j \mid c_j a^t(k) z^j > 0\}$이며, ρ_k는 [9, p. 146] 의 극한 조건을 만족하는 sequence 이다.

3단계. 만일 $\sum_{i=1}^{b+1} |a_i(k+1) - a_i(k)| < \varepsilon$ 이면 멈춘다. 아니면 k를 1만큼 증가시키고 2단계로 간다. 여기에서 ε은 충분히 작은 양수이며, $a_i(k)$는 a(k)의 i번째 원소이다.

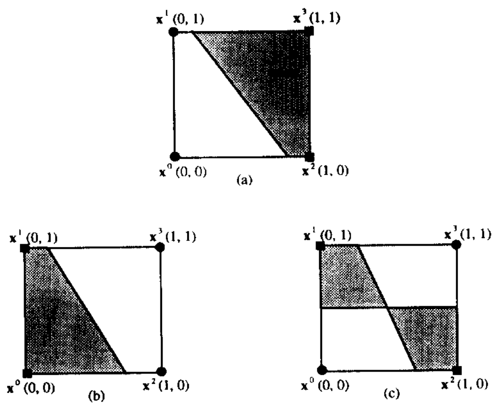


그림 1. 이진 벡터들이 2차원 공간에서 가질 수 있는 세가지 분포. ● 및 ■들은 각각 c_j>0 및 c_j<0인 벡터들을 나타낸다.
(a) 비음수인 W_1, W_2, T로 선형분리할 수 있는 경우
(b)선형 불리는 되나 가 모두 비음수가 될 수 없는 경우
(c) 선형 분리될 수 없는 경우

Fig. 1. Distribution of binary input vectors in 2-dimensional space. ● and ■ repesent vectors for which c_j 〉 0 and c_j 〈 0, respectively.
(a) A distribution which can be linearly separated by nonegative W_1, W_2, T.
(b) A distribution which can be linearly separated, but for non-negative W_1, W_2, T.
(c)A distribution which cannot be linearly separated.

위의 알고리듬에서 만약 모든 이진 벡터들이 선형분리가능하다면 파라미터 벡터 a(k) 는 최적 값으로 수렴하게 된다.

Ⅳ. 실험 결과

제안된 알고리듬의 성능을 보이기 위하여 영상 신호를 대상으로 실험을 수행하였는데 우리의 목적은 impulsive 잡음에 오염된 영상을 복원하기 위한 2차원 3×3 WOS필터를 설계하는 것이다. 식 (5)의 cost cj들을 추정하기 위하여 우리는 [12], [13] 등에서 행한바와 같이, 원 영상과 잡음에 오염된 영상의 일부분이 주어졌다고 가정하였다. 원 영상은 그림 2 에 나타낸 boat 영상으로서 각 pixel 이 8 bit로 표현되는 256×256 크기의 영상이다. 잡음은 양과 음의 impulse로서 양의 impulse는 gray level값이 200, 음의 impulse는 gray level 값을 50으로 하였으며 impulse 발생확률, P_e, 을 변화시켜가며 실험을 수행하였다. Cost c_j들은 원 영상과 오염된 영상의 좌측 상단의 1/4 로부터 다음 식을 사용하여 추정되었다. $\hat{c}_j = \sum_{m=1}^{M-1} (N^j_{m,0} - N^j_{m,1}) / (I \times J)$. 여기서 I×J는 좌측 상단 1/4부분의 영상 크기로서 128×128이며 M은 영상의 gray level을 나타냄으로 256이 된다. 또한 $N^j_{m,0}$ ($N^j_{m,1}$)는 잡음에 오염된 영상의 level m에서 이진 벡터 x^j가 관측되고, 원 영상의 level m에서 원래의 신호값 s_m 이 0(1)인 경우가 발생한 횟수이다. 제안된 알고리듬을 이용하여 WOS 필터의 파라미터 벡터 a를 구하였으며 이 벡터에 의하여 선형분리되지않는, 즉 잘못 분류된 벡터의 수를 계산하였다. 이 실험 결과는 표 1에 요약되었다. P_e = 0.0인 경우 설계된 WOS 필터는 예상과 같이 identity 필터이며 P_e 가 증가함에 따라 미디언 필터에 가까워짐을 관측할 수 있다. 또한 P_e 의 증가에 따라 선형 분리되지않는 벡터의 수가 증가하는 것을 볼 수 있다. 이 실험에서 $P_e \le 0.025$ 에 대하여 선형 분리되지않는 벡터의 수는 0이며 따라서 설계된 WOS 필터가 최적 WOS 필터이며 또한 최적 스택 필터임을 알 수 있다. 설계된 필터의 잡음 억제 특성을 살펴보기 위하여 잡음에 오염된 영상을 인가하고 그 출력 영상과 원 영상과의

MAE를 계산하였다. 또한 성능 비교를 위하여 3×3 미디언 필터와 최적 스택 필터의 출력 결과를 구했는데 이들을 표 2에 같이 나타내었다. 제안된 WOS 필터가 미디언 필터에 비해 훨씬 우수한 결과를 나타내고 있으며 최적 스택 필터에 아주 근사한 결과를 보임을 알 수 있다. 표 2에서 P_e = 0.05인 경우에 해당되는 영상들을 그림 3에 나타내었다. 시각적으로 볼 때 제안된 WOS 필터와 최적 스택 필터의 결과는 매우 흡사하다. 미디언 필터는 impulse를 제거하는데 있어서는 다소 양호한 결과를 보이나, 출력 영상이 (특히 경계부근에서) 많이 몽롱화되었음을 알 수 있다. 알고리듬에서 $\epsilon=10^{-5}$, $\rho_k = 1/(1+0.1k)$로 주었으며, 이 때 ρ_k는 [9, p.146] 의 조건을 만족하고 있다. 실제 상황에서 구현 측면에서 간단한 WOS 필터가 스택 필터를 대신하여 많이 사용되리라 사려된다.

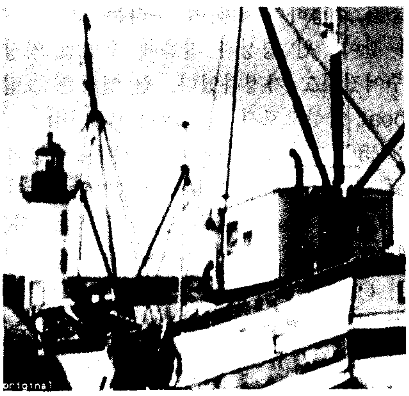


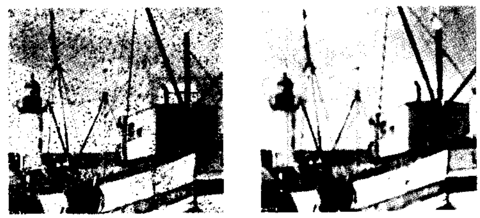
그림 2. 원 영상: Boat
Fig. 2. Original image: Boat.

표 1. 제안한 알고리듬을 이용하여 구한 피라미터 벡터들과 이 때 이에 의해 선형 분리되지 않는 벡터의 수(모든 경우에 문턱값 T는 1로 놓았음)
Table 1. The parameter vectors of WOS filte the number of vectors which cannot be separated linearly by the vector a (for all a, T is set at 1).

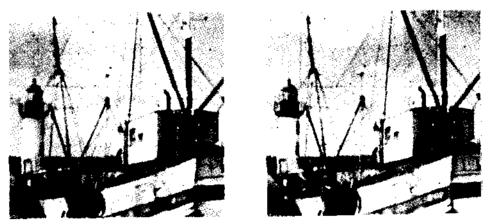
Pe	0.0	0.0125	0.025	0.05	0.1	0.2
가중치 벡터	$\begin{bmatrix} 0.060 & 0.228 & 0.044 \\ 0.048 & 1.053 & 0.040 \\ 0.095 & 0.308 & 0.100 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.459 & 0.404 & 0.057 \\ 0.003 & 0.997 & 0.001 \\ 0.006 & 0.065 & 0.005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.061 & 0.240 & 0.112 \\ 0.058 & 0.895 & 0.047 \\ 0.113 & 0.321 & 0.104 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.124 & 0.259 & 0.125 \\ 0.124 & 0.754 & 0.123 \\ 0.123 & 0.246 & 0.123 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.173 & 0.276 & 0.174 \\ 0.102 & 0.624 & 0.101 \\ 0.101 & 0.275 & 0.174 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.180 & 0.274 & 0.182 \\ 0.181 & 0.456 & 0.182 \\ 0.183 & 0.274 & 0.182 \end{bmatrix}$
선형 분리되지않는 벡터의 수	0	0	0	5	24	38

표 2. 원영상과 각각의 경우들에 해당되는 출력 영상과의 평균 절대 오차
Table 2. MAE's between the original and filtered images.

Pe	MAE		
	Median filter	WOS filters designed by proposed algorithm	Optimal stack filters
0.0	3.1962	0.0000	0.0000
0.0125	3.2549	0.4090	0.4090
0.025	3.3314	0.6458	0.6458
0.05	3.4742	1.0443	1.0435
0.1	3.7833	1.9120	1.8878
0.2	4.5890	3.3674	3.3613



(a) (b)



(c) (d)

그림 3. Pe=0.05인 경우의 영상들 (a)잡음에 오염된 영상 (b)미디언 필터 출력영상 (c)제안된 WOS필터 출력영상 (d)최적 스택 필터 출력 영상
Fig. 3. Images for Pe=0.05. (a) Noisy image. (b) Median filtered image. (c) Designed WoS filtered image. (d) Optimal stack filtered image.

V. 결 론

이진 영역에서 WOS 필터 설계 문제가 패턴 인식에서의 two-class 선형 분류기 설계 문제와 같아진다는 사실을 관측하고 이로부터 perceptron 알고리듬

을 응용한 WOS 필터 설계 방법을 제안하였다. 제안된 알고리듬은 이진 벡터들이 선형 분리 가능한 분포를 갖는 경우 최적 WOS 필터를 찾을 수 있으며, 이때 이 필터는 또한 최적 스택 필터이다. 우리는 이 알고리듬이 선형 분리 불가능한 경우에도 대부분의 실제적인 상황에서 최적 WOS 필터에 근사한 WOS 필터를 찾을 수 있음을 보았다. 또한 이 알고리듬은 근본적으로 perceptron 알고리듬과 동일하므로 그 구현이 간단하다. 실험을 통하여 미디언 필터 및 최적 스택 필터와 제안된 알고리듬으로 설계한 WOS 필터를 적용한 결과를 비교하였으며 그 결과 제안된 설계 방법의 타당성을 확인할 수 있었다.

參考文獻

[1] O. Yli-Harja, J. Astola, and Y. Neuvo, "Analysis of the properties of median and weighted median filters using threshold logic and stack filter representation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-39, pp. 395-410, Feb. 1991.

[2] D. R. K. Brownrigg, "The weighted median filter," *Comm. ACM*, vol. 27, no. 8, pp. 807-818, Aug. 1984.

[3] M. K. Prasad and Y. H. Lee, "Analysis of weighted median filters based on inequalities relating the weights," *Circuits Systems Signal Process*, vol. 11, no. 1, pp. 115-136, Jan. 1992.

[4] T. K. Nodes and N. C. Gallagher Jr., "Median filters : Some modifications and their properties," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 739-746, Oct. 1982.

[5] P. D. Wendt, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Stack filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 898-911, Aug. 1986.

[6] E. J. Coyle and J. H. Lin, "Stack filters and the mean absolute criterion," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-36, pp. 1244-1254, Aug. 1988.

[7] E. J. Coyle and J. H. Lin, and M. Gabbouj, "Optimal stack filtering and structural approches to image processing," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-37, pp. 2037-2066, Dec. 1989.

[8] L. Yin, J. Astola, and Y. Neuvo, "Optimal weighted order statistic filters under the mean absolute error criterion," *Proc. of IEEE ICASSP*, pp. 2529-2532, Toronto, Canada, May 1991.

[9] R. O. Duda and P. E. Hart, *Pattern Classification and Scene Analysis*, John Wiely and Sons, New York, 1973.

[10] A. T. Fam and Y. H. Lee, "Selection filters and commutativity with memoryless nonlinearities," *Proc. of IEEE ISCAS*, pp. 1743-1746, New Orleans, Louisiana, May 1990.

[11] S. Muroga, *Threshold Logic and Its Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1971.

[12] B. Zeng, M. Gabbouj, and Y. Neuvo, "A unified design method for rank order, stack and generalized stack filters based on classical Bayes decision," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-38, pp. 1003-1020, Sep. 1991.

[13] B. Zeng, H.Zhou, and Y. Neuvo, "Synthesis of optimal detail-restoring stack filters for image processing," *Proc. of IEEE ICASSP*, pp. 2533-2536, Toronto, Canada, May 1991.

著者紹介

鄭 炳 章(正會員)
1965年 12月 5日生. 1988年 2月 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1990年 2月 경북대학교 대학원 졸업(공학석사). 1992年 2月 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학석사). 1992年 3月 ~ 현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정 재학중. 주관심 분야는 신호처리 및 통신임.

李 勇 勳(正會員)
1955年 7月 12日生. 1978年 2月 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1980年 2月 서울대학교 대학원 졸업(공학석사). 1984年 8月 Pennsylvania 대학 박사학위 취득. 1984 ~ 1989年 버팔로 소재 뉴욕 주립대학 조교수로 근무. 1989年 이후 한국과학기술원 부교수로 재직. 주관심분야는 일차원 및 이차원 신호처리등임.