

Parks-McClellan 알고리즘을 이용한 이차원 최적 근사화 FIR 디지털 필터의 설계

(A Design of 2-D Optimal Approximation FIR Digital Filter using Parks-McClellan Algorithm)

尹 馨 泰*, 李 根 泳**

(Hyung Tae Yoon and Keun Young Lee)

要 約

본 논문은 최적화기법을 이용한 2차원 FIR 디지털 필터의 설계방법에 대하여 기술하였다. 제안된 설계 방법은 Parks-McClellan이 제안한 1차원 최적 필터 설계 알고리즘을 2차원으로 확장한 것으로써 1차원 설계방법을 2차원으로 확장할때 발생하는 몇가지 문제들은 최소자승에러법과 2차원 Lagrange 보간법, 그리고 변형된 변경이론을 이용하여 해결하였으며, 이 경우 기존방법에 비해 설계조건에 최적인 결과를 얻을 수 있는 Equi-Ripple 필터를 설계할 수 있었다.

Abstract

This paper presents the design method for two-dimensional FIR digital filter using optimization scheme. The proposed design method is to extend the optimal one-dimensional filter design algorithm proposed by Parks and McClellan to two-dimensional case. When extending one-dimensional design scheme to two-dimensional one, some problems occur. In this paper we solved the problems by using the least square error model, the two-dimensional Lagrange interpolation, and the modified alternation theory. As a result, the equi-ripple FIR filter is obtained that is more optimal and more specific than the conventional methods.

1. 서론

최근 소자와 컴퓨터의 발달은 아날로그 시스템을 디지털화시켰으며, 화상 데이터와 같이 다차원 배열로 표현되는 신호의 다양성은 2차원 디지털 신호 처

리를 발전시켰다. 특히 화상, 레이더, 인공위성 사진 처리등은 2차원 FIR 필터와 같은 선형위상과 안정성을 필요로하며 이러한 신호처리는 2차원 인수분해와 같은 수학적 어려움으로 직접적인 접근이 어렵지만, 일반적으로 기존의 1차원 신호처리의 기본개념을 2차원으로 확장 해석하는 방법을 사용하고 있다. 1차원 신호처리가 2차원 신호처리로 확장 해석된 FIR 디지털 필터의 설계방법은 장방법^[1], 주파수샘플링방법^[5,6] 등이 있다. 그러나 기존의 방법인 경우 천이대역의 폭이 0 인 이상적인 필터를 천이대역의 폭이 가능한 좁고 각 대역에서 에러가 가능한 작은 응답으로

* 正會員, 仁德專門大學 事務自動化科
(Dept. of O.A. Eng., Induk Ins. of Design)

**正會員, 成均館大學校 電子工學科
(Dept. of Elec Eng., Sungkyunkwan Univ.)

接受日字: 1992年 9月 8日

설계하는 경우 천이대역 부근에서 에러의 에너지 분포가 제일 크게 된다. 따라서 주어진 설계조건에 대하여 최적의 주파수응답을 얻기 위해서는 천이대역 부근의 에러 에너지를 전 주파수 대역내에 균등하게 재분배하여야 하며, 1차원인 경우 가장 좋은 특성의 필터를 얻을 수 있는 설계방법은 Parks와 McClellan이 제안한 최적근사화방법^[2,3]으로 알려져 있다. 본 논문에서는 이 설계방법을 2차원으로 확장함으로써 최적인 2차원 FIR 디지털 필터를 설계할 수 있는 방법을 제시하였다.

II. 1차원 최적근사화 FIR 디지털 필터

기수(odd)인 $N = 2 \cdot M + 1$ 차수를 갖는 FIR 필터의 주파수응답은 식(1)과 같이 쓸 수 있으며

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M h(n) e^{-j\omega n} \quad (1)$$

영위상과 양대칭(Positive Symmetry)을 갖는 주파수응답은 $h(n)=h(-n)$ 의 조건을 만족하므로 식(2)와 같이 쓸 수 있다.^[2]

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M \hat{a}(n) \cdot \cos(\omega n) \quad (2)$$

$$\hat{a}(n) = \begin{cases} h(n) & \text{for } n = 0 \\ 2 \cdot h(n) & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$

McClellan과 Parks^[2]는 고정된 차수 N 과 차단 주파수 ω_p , ω_s 에 대하여 각 대역에서 최소의 최대허용리플값 δ_p , δ_s 를 갖는 equi-ripple 필터를 설계하기 위하여 식(2)를 체비셰프 다항식 근사화 문제로 재구성화하였다. 따라서 $\cos(\omega n)$ 을 $\cos(\omega)$ 의 지수승으로 표현하면 식(3)과 같이 쓸 수 있다.

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^M a(n) \cdot \cos(\omega)^n \quad (3)$$

최적근사화문제는 식(4)와 같은 에러함수의 최대절대값을 최소화시키는 계수값을 구하는 것으로 해석할 수 있다. 여기서 $W(\omega)$ 는 각 대역의 리플 크기를 조절할 수 있는 가중함수이며 $D(\omega)$ 는 통과대역에서는 1, 차단대역에서는 0의 진폭값을 갖는 이상적인 응답을 의미한다.

$$E(\omega) = W(\omega) \cdot |D(\omega) - P(\omega)| \quad (4)$$

$$\|E(\omega)\| = \min [\max |E(\omega)|]$$

식(4)가 유일한 해를 갖는 필요, 충분 조건은 다음

과 같은 변경 이론(Alternation Theorem)을 만족하여야 한다.

< 변경이론 > : $P(\omega)$ 가 유일하고 최적인 가중 체비셰프 근사화가 되기 위한 필요, 충분조건은 $E(\omega)$ 가 $[0, \pi]$ 구간에서 적어도 $M+2$ 개의 극점주파수를 가져야 하며 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다.

$$\left[\begin{array}{l} \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{M+1} \\ E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1}) \\ |E(\omega_i)| = \max |E(\omega)| \quad i = 0, 1, \dots, M+1 \end{array} \right.$$

극점주파수(Extrema Frequency)는 $E(\omega)$ 가 최대 또는 최소가 되는 주파수로서 극점의 위치와 수에 따라 수렴성과 수렴속도가 결정되며 설계절차는 다음과 같다.

- 단계 1 : 균등한 간격의 $M + 2$ 개 극점을 초기 설정.
- 단계 2 : 각 극점에서 변경이론에 따른 최대 허용 에러값 δ 계산.
 $E(\omega_i) = W(\omega_i) \cdot (D(\omega_i) - P(\omega_i))$
 $= (-1)^i \delta$
- 단계 3 : 극점 에러값의 부호들이 변경이론에 따라 교대로 변화되면서 극점의 수가 $M + 2$ 개가 되도록 보간. (1차원 Lagrange 보간법 이용)
- 단계 4 : 변경이론을 만족하는 $M + 2$ 개 새 후보 극점 선정.
- 단계 5 : 각 후보극점에서 $|E(\omega)| \leq |\delta|$ 이면 단계 δ 으로 가지만 그렇지 않는 경우 새 후보극점을 가지고 단계 2 로 반복계산 수행.
- 단계 6 : 역 푸우리에 변환을 이용하여 필터계수값 구함.

III. 2차원 최적 근사화 FIR 디지털 필터

기수(odd)인 $N \times N$ 차의 2차원 주파수응답은 식(5)와 같이 쓸 수 있으며

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-M}^M \sum_{n_2=-M}^M h(n_1, n_2) e^{-j\omega_1 n_1} e^{-j\omega_2 n_2} \quad (5)$$

영위상과 4방 대칭조건을 만족하는 주파수응답은 ω_1 과 ω_2 가 분리가능(separable)하다는 가정하에 식(6)과 같이 쓸 수 있다.^[5,6]

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=0}^M \sum_{n_2=0}^M \hat{a}(n_1, n_2) \cdot \cos(\omega_1 n_1) \cdot \cos(\omega_2 n_2) \quad (6)$$

$$\hat{a}(n_1, n_2) = \begin{cases} h(n_1, n_2) & \text{for } n_1 = 0, n_2 = 0 \\ 2 \cdot h(n_1, n_2) & \text{for } n_1 \neq 0, n_2 = 0 \\ 2 \cdot h(n_1, n_2) & \text{for } n_1 = 0, n_2 \neq 0 \\ 4 \cdot h(n_1, n_2) & \text{for } n_1 \neq 0, n_2 \neq 0 \end{cases}$$

2차원 최적근사화문제는 1차원 Parks-McClellan 알고리즘을 2차원으로 확장 해석한 반복계산 알고리즘으로써 식(7)과 같은 최대 에러함수 $E(\Omega)$ 가 최소가 되는 계수값을 결정하는 것으로서 해석할 수 있다. 여기서 (Ω) 는 2차원 주파수좌표 (ω_1, ω_2) 를 의미하여 (Ω_i) 는 극점주파수에서의 좌표 $(\omega_{1i}, \omega_{2i})$ 를 의미한다.

$$E(\Omega) = W(\Omega) [D(\Omega) - P(\Omega)] \quad (7)$$

식(7)을 체비셰프 다항식 문제로 재공식화하기 위하여 $\cos(\omega n)$ 를 $\cos(\omega)$ 의 지수승으로 표현하면 식(8)와 같이 쓸 수 있으며

$$P(\Omega) = \sum_{n_1=0}^M \sum_{n_2=0}^M a(n_1, n_2) \cdot \cos(\omega_1)^{n_1} \cdot \cos(\omega_2)^{n_2} \quad (8)$$

식(8)을 극점주파수에 대한 $L=(M+1) \cdot (M+1)$ 개의 함수 $\Phi(\Omega_i)$ 의 선형조합으로써 표현하면 식(9)와 같이 1차원적 주파수응답으로 표현할 수 있다. 여기서 a_i 는 $a(n_1, n_2)$ 를 나타내며 $\Phi(\Omega_i)$ 는 $\cos(\omega_{1i})^{n_1} \cdot \cos(\omega_{2i})^{n_2}$ 를 나타낸다.

$$P(\Omega_i) = \sum_{i=1}^L a_i \cdot \phi(\Omega_i) \quad (9)$$

본 논문에서 제안한 설계절차는 1차원의 경우와 유사하며 식(10)은 최대허용리플값을 고려하여 재조정된 극점주파수에서의 진폭값을 의미한다.

- 단계 1 : 초기 후보극점주파수 선정.
- 단계 2 : 최대 허용 리플값 δ 구함. (최소자승법 이용)
- 단계 3 : 2차원 진폭응답으로 보간. (2차원 Lagrange 보간법 이용)

$$P(\Omega_i) = \begin{cases} 1 + \text{sgn}(\Omega_i) \cdot \delta & \text{for 통과대역} \\ \text{sgn}(\Omega_i) \cdot \delta & \text{for 차단대역} \end{cases} \quad (10)$$

$\text{sgn}(\Omega_i)$: 변경이론에 따른 부호값 (+1, -1)

- 단계 4 : 일정한 부호특성과 변경이론을 만족하는 후보극점 선택.

단계 5 : 최적적인 진폭특성을 가지면 종료, 아니면 반복계산 수행.

1차원인 경우 변경이론에 따라 극점주파수의 수는 $M + 2$ 개이지만 2차원인 경우는 극점의 수를 해석하기에는 어려운 점이 있다. 본 논문에서는 ω_1 과 ω_2 가 분해가능하다는 가정하에서 각 축상에서 $P(\Omega_i)$ 를 미분하여 전체 극점의 수를 해석하였다.^[2] 이 경우 각 축상에서 1차원적인 변경이론을 적용하면 $M + 2$ 개를 가지므로 2차원 평면에서 가질 수 있는 전체 극점의 수는 두 ω_1, ω_2 축이 교차되는 점으로써 $(M + 2)(M + 2)$ 개를 갖는다고 할 수 있다. 그러나 2차원의 응답은 다양한 공간적인 분포를 가지므로 1차원 변경이론을 2차원의 경우에 그대로 적용할 수 없고 많은 가능한 해를 가질 수 있다. 실제의 경우 극점의 수는 축상에서 $M + 3$ 개를 갖는 Extra-Ripple 필터인 경우보다 적은 식(11)의 극점 수를 갖는다. 본 논문에서는 이러한 2차원 최적 근사화의 문제점을 해결할 수 있는 방법을 제시하였다.

$$(M+2)(M+2) \leq L1 \leq (M+3)(M+3) \quad (11)$$

IV. 제안 설계 방법

1. 초기 후보극점 설정

그림 1과 같은 2차원 저역통과 필터를 설계하는 경우 최적 근사화 문제는 고정된 필터 차수 N 과 차단주파수 ω_p, ω_s 를 가지며 δ_p 와 δ_s 가 최소가 되는 계수값 a_i 를 결정하는 것으로서 해석할 수 있다.

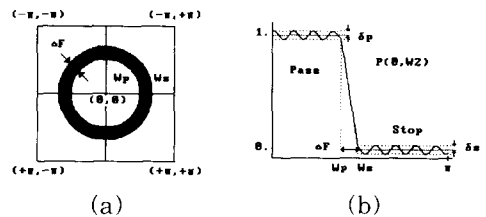


그림 1. 2차원 저역통과 필터의 주파수응답
(a) 주파수응답의 단면
(b) $\omega_1=0$ 인 주파수응답의 단면

Fig. 1. The Frequency response of the 2-D Lowpass filter.
(a) the Cross section of the frequency response.
(b) the Cross section of the frequency response at $\omega_1 = 0$.

그림 1의 (a)와 같은 2차원 평면에서 초기 극점들의 선택은 각 축을 $M + 2$ 개로 균등한 간격으로 나누었을때 교차되는 점이며 그림 2와 같이 $(M + 2)$ $(M + 2)$ 개가 되도록 설정한다.

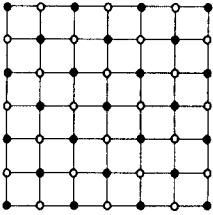


그림 2. 초기극점주파수 위치
 (○ : - 부호의 δ , ● : + 부호의 δ)
 Fig. 2. The position of initial extrema
 (○ : - sign of δ , ● : + sign of δ).

일반적으로 2차원 주파수응답의 모양은 $(0, 0)$ 과 (π, π) 를 중심으로하는 환모양의 물결을 가지므로 초기 극점에서의 에러함수 부호값은 그림 2와 같이 부여한다.

2. 최대 허용 리플값

최대허용리플인 δ 는 후보극점들에서 최적적인 진폭 응답을 갖는다는 가정하에서 계산된 값으로써 각 극점주파수에서의 에러함수는 식(12)와 같이 쓸 수 있다. 여기서 $\text{sgn}(\Omega_i)$ 는 각 극점주파수에서의 에러함수 부호값으로써 +1 과 -1 값을 갖는다.

$$E(\Omega_i) = W(\Omega_i) [D(\Omega_i) - P(\Omega_i)] = \text{sgn}(\Omega_i) \cdot \delta \tag{12}$$

그러나 2차원 주파수응답은 다양하게 변화하므로 $\text{sgn}(\Omega_i)$ 값은 1차원 변형이론을 그대로 적용할 수 없다. 초기 후보극점인 경우에는 그림 2처럼 원점을 기준으로 대각선으로 에러값의 부호를 교대로 줄 수 있지만, 반복계산중에 발생하는 극점들의 위치는 다양하게 변화하므로 일정한 규칙에 따라 부호값을 부여하기 어렵다. 따라서 본 논문에서 각 극점의 부호값을 다음과 같은 방법을 이용하여 각 극점의 에러함수 부호값을 부여하였다.

- 1) 주파수영역에서 가능한 후보극점들을 찾음.
- 2) 각 극점들에서의 부호를 다음과 같이 부여.
 $\text{sgn}(\Omega_i) = \begin{cases} -1 & \text{for } E(\Omega_i) > 0 \\ +1 & \text{for } E(\Omega_i) < 0 \end{cases}$
- 3) 변형이론을 만족하며 환모양을 이루는 극점들만 선택.

선정된 후보극점에서 최대허용리플값 δ 를 계산하기 위하여 식(12)를 다시 쓰면 식(13)과 같이 쓸 수 있지만

$$P(\Omega_i) + \text{sgn}(\Omega_i) \cdot \delta / W(\Omega_i) = D(\Omega_i) \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} P(\Omega_1) & \text{sgn}(\Omega_1) / W(\Omega_1) \\ P(\Omega_2) & \text{sgn}(\Omega_2) / W(\Omega_2) \\ \vdots & \vdots \\ P(\Omega_L) & \text{sgn}(\Omega_L) / W(\Omega_L) \\ P(\Omega_{L+1}) & \text{sgn}(\Omega_{L+1}) / W(\Omega_{L+1}) \\ \vdots & \vdots \\ P(\Omega_{L1}) & \text{sgn}(\Omega_{L1}) / W(\Omega_{L1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_L \\ \delta \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(\Omega_1) \\ D(\Omega_2) \\ \vdots \\ D(\Omega_L) \\ D(\Omega_{L+1}) \\ \vdots \\ D(\Omega_{L1}) \end{bmatrix}$$

식(13)의 좌변 행렬의 행과 열의 수가 같지 않으므로 유일한 해를 갖지 않는다. 그러므로 본 논문에서는 최소자승법(Least Square Method)을 이용하여 미지수와 방정식의 수를 같게 만들어 리플값을 구하는 방법을 사용하였다. 최소자승법을 이용하여 에러함수 $E(\Omega_i)$ 를 쓰면 식(14)와 같이 쓸 수 있다.

$$LE(\Omega_i) = \sum_{i=1}^{L1} \{ F(\Omega_i) - D(\Omega_i) \}^2 \tag{14}$$

$$F(\Omega_i) = P(\Omega_i) + \text{sgn}(\Omega_i) \cdot \delta / W(\Omega_i)$$

식(14)가 최소가 되는 조건은 각 a_i , δ 계수에 대하여 일차 미분한 값이 영이 되는 계수 a_i 와 δ 를 구하는 것이므로 식(14)를 각 변수에 대하여 미분하면 다음과 같은 식이 되며

$$\partial E / \partial a_{pq} = 2 \sum_{i=1}^{L1} \cos(\omega_{1i})^p \cdot \cos(\omega_{2i})^q \cdot \{ F(\Omega_i) - D(\Omega_i) \} = 0$$

$$\partial E / \partial \delta = 2 \sum_{i=1}^{L1} \text{sgn}(\Omega_i) / W(\Omega_i) \cdot \{ F(\Omega_i) - D(\Omega_i) \} = 0$$

$(p = 0, 1, \dots, M, \quad q = 0, 1, \dots, M)$

행렬식으로 표현하면 식(15)와 같다. 따라서 식(15)을 풀면 최대허용리플값을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x(0,0,0,0) & \dots & x(0,0,M,M) & y(0,0) \\ x(0,1,0,0) & \dots & x(0,1,M,M) & y(0,1) \\ x(0,2,0,0) & \dots & x(0,2,M,M) & y(0,2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x(M,M,0,0) & \dots & x(M,M,M,M) & y(M,M) \\ y(0,0) & \dots & y(M,M) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_L \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(0,0) \\ z(0,1) \\ z(0,2) \\ \vdots \\ z(M,M) \\ w \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{cases} x(p, q, p_1, q_1) = \sum_{i=0}^{L_1} \cos(\omega_{1i})^{p+p_1} \cdot \cos(\omega_{2i})^{q+q_1} \\ y(p, q) = \sum_{i=0}^{L_1} \cos(\omega_{1i})^p \cdot \cos(\omega_{2i})^q \cdot \text{sgn}(\Omega_i) / W(\Omega_i) \\ z(p, q) = \sum_{i=0}^{L_1} \cos(\omega_{1i})^p \cdot \cos(\omega_{2i})^q \cdot D(\Omega_i) \\ w = \sum_{i=0}^{L_1} \text{sgn}(\Omega_i) \cdot W(\Omega_i) \cdot D(\Omega_i) \\ u = \sum_{i=0}^{L_1} (\text{sgn}(\Omega_i) / W(\Omega_i))^2 \end{cases}$$

3. 전 주파수 영역의 보간

알고리즘의 3단계는 최대 허용 리플값 δ 와 식(13)을 이용하여 각 극점에서의 진폭값을 재조정된 후 새 후보극점을 찾기위하여 전체 주파수응답을 보간하여야 한다. 본 논문에서는 1차원 Lagrange 보간법을 확장 해석한 식(16)의 2차원 Lagrange 보간법을 이용하여 보간시켰다.

$$P_{nm}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m LX_k(x) \cdot LY_l(y) \cdot Z_{k,l} \quad (16)$$

$$LX_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad LY_l(y) = \prod_{i=0, i \neq l}^m \frac{y - y_i}{y_l - y_i}$$

그러나 식(16)은 그림 3의 (a)처럼 X, Y 축을 각 n+1, m+1 개로 나누어 교차되는 좌표들에서 유도된 보간법이므로 그림 3의 (b)처럼 임의의 좌표들에 대해서는 적용할 수가 없다. 본 논문에서는 임의의 좌표에 대해서도 적용할 수 있는 일반적인 2차원 일차 Lagrange 보간법을 유도하여 그림 3의 (c)처럼 기존의 보간법에 필요한 좌표를 국부 보간시킨 후 기존의 보간법을 이용하여 전체를 보간시키는 방법을 사용하였다.

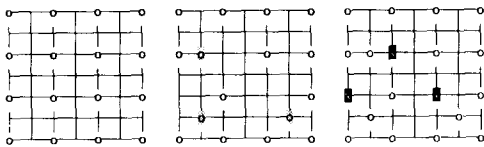


그림 3. 극점들의 위치
(a)초기 극점 (b)임의의 극점
(c)국부보간할 극점

Fig. 3. The position of extrema.
(a) the position of initial extrema.
(b) the position of arbitrary extrema.
(c) the position of extrema for local interpolation.

일반적인 2차원 일차 방정식을 행렬식으로 표현하면 식(17)과 같이 쓸 수 있다.

$$Z(x, y) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 \cdot y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 \cdot y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 \cdot y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 \cdot y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Cramer 공식을 이용하여 계수값 a_1, a_2, a_3, a_4 를 구한 후 식(17)에 대입하여 z_i 항으로 재정리하면 식(18)과 같은 일반적인 2차원 일차 Lagrange 보간 공식을 유도할 수 있다.

$$Z(X, Y) = L_1 \cdot z_1 + L_2 \cdot z_2 + L_3 \cdot z_3 + L_4 \cdot z_4 \quad (18)$$

$$L_1 = \frac{\begin{bmatrix} (x_2 \cdot X - x_3 \cdot x_4)(y_3 - Y)(y_3 - y_4) \\ + (x_3 \cdot X - x_2 \cdot x_4)(y_3 - Y)(y_4 - y_2) \\ + (x_4 \cdot X - x_2 \cdot x_3)(y_4 - Y)(y_2 - y_3) \end{bmatrix}}{\Delta}$$

$$L_2 = \frac{\begin{bmatrix} (x_1 \cdot X - x_3 \cdot x_4)(y_1 - Y)(y_4 - y_3) \\ + (x_3 \cdot X - x_1 \cdot x_4)(y_3 - Y)(y_1 - y_4) \\ + (x_4 \cdot X - x_1 \cdot x_3)(y_4 - Y)(y_3 - y_1) \end{bmatrix}}{\Delta}$$

$$L_3 = \frac{\begin{bmatrix} (x_1 \cdot X - x_2 \cdot x_4)(y_1 - Y)(y_2 - y_4) \\ + (x_2 \cdot X - x_1 \cdot x_4)(y_2 - Y)(y_4 - y_1) \\ + (x_4 \cdot X - x_1 \cdot x_2)(y_4 - Y)(y_1 - y_2) \end{bmatrix}}{\Delta}$$

$$L_4 = \frac{\begin{bmatrix} (x_1 \cdot X - x_2 \cdot x_3)(y_1 - Y)(y_3 - y_2) \\ + (x_2 \cdot X - x_1 \cdot x_3)(y_2 - Y)(y_1 - y_3) \\ + (x_3 \cdot X - x_1 \cdot x_2)(y_3 - Y)(y_2 - y_1) \end{bmatrix}}{\Delta}$$

4. 국부극점 선정방법

보간된 2차원 주파수응답에서 다음 반복계산을 위하여 새로운 후보극점들을 선정하여야 한다. 2차원 주파수응답은 다양한 분포의 환모양 물질을 가지므로 후보극점을 선택하는데는 다소 어려운 점이 있다. 본 논문에서는 주파수 영역을 네모서리, 4변, 그리고 내부영역으로 나누어 후보극점을 선정하였다.

1) 4 모서리인 경우 : 각 모서리의 절대 에러값이 이웃점의 절대 에러값보다 크고 최대허용리플값보다 큰 경우에만 후보극점으로 선정.

0, 0	0, 1	0, $\pi-1$	0, π
1, 0	1, 1	1, $\pi-1$	1, π

$\pi-1, 0$	$\pi-1, 1$	$\pi-1, \pi-1$	$\pi-1, \pi$
$\pi, 0$	$\pi, 1$	$\pi, \pi-1$	π, π

그림 4. (0, 0), (0, π), (π , 0), (π , π) 에서의 후보극점 선택

Fig. 4. The decision of new extrema at (0, 0), (0, π), (π , 0), (π , π).

2) 4 변인 경우 : 각 변의 i 점의 절대 에러값이 이웃점의 절대에러값보다 크고 최대허용리플값보다 큰 경우에만 후보극점으로 선정. ($i = 1, \dots, \pi-1$)

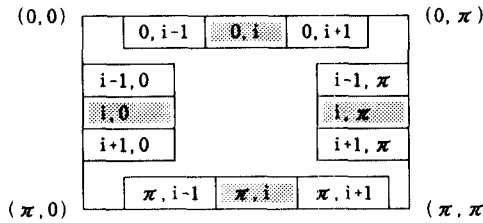


그림 5. $(0, i), (i, 0), (\pi, i), (i, \pi)$ 에서의 후보극점 선택

Fig. 5. The decision of new extrema at $(0, i), (i, 0), (\pi, i), (i, \pi)$.

3) 내부 영역인 경우 : 각 변의 (i, j) 점의 절대 에러값이 이웃점의 절대에러값 보다 큰 경우에만 후보극점으로 선정. ($i=1, \dots, \pi-1, j=1, \dots, \pi-1$)

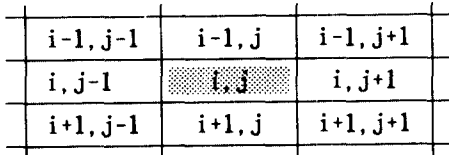


그림 6. 내부영역에서의 후보극점 선택
Fig. 6. The decision of new extrema at inside.

선정된 후보극점에서 최적인 주파수응답을 갖는 조건은 모든 후보극점에서의 절대 에러값이 최대허용리

플값 δ 보다 작거나 같아야 하므로 최대 에러값과 최소 에러값의 차를 백분율로 표현한 식(19)를 이용하여 알고리즘의 종결조건을 결정하였다. Q 값이 1% 보다 작거나 같으면 최적상태이므로 2차원 역 푸우리에 변환을 함으로써 계수값을 구하지만 그렇지 않으면 새로 선정된 후보극점을 이용하여 반복계산을 수행하여 최적 근사화가 될때까지 반복 수행한다.

$$Q = \frac{Max|E(\Omega_s)| - Min|E(\Omega_s)|}{Max|E(\Omega_s)|} \times 100\% \quad (19)$$

V. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서 시뮬레이션한 필터의 설계조건은 ω_p 가 0.4π 이고, ω_s 가 0.5π 인 7×7 차 지역통과필터를 설계하였으며 그림 7은 진폭응답이고, 그림 8은 원점을 기준으로 1도씩 회전하여 자른 단면들을 겹쳐 그린 그림이며 그림 9는 등고선 응답을 나타낸 그림이다. 창방법과 주파수샘플링방법은 천이대역폭이 넓고 환이 아닌 마름모 모양을 가지며 제안방법은 천이대역 특성이 기존방법보다 좁고 환모양을 가짐을 알 수 있다.

그림 10은 환대칭특성을 나타낸 그림으로써 좌측 Y 좌표는 2차원 평면에서 원점을 기준으로 동일 반지름을 갖는 주파수들에서 최대값과 최소값의 차를 백분율로 표시한 좌표이며 실선으로 표시하였다. 우측 Y 좌표는 이때의 편차값을 점선으로 나타내었으며 X 축은 주파수축으로써 반지름을 의미한다.

창방법과 주파수샘플링방법에서는 전 주파수에서 에러율과 편차가 매우 크므로 매우 나쁜 환대칭특성을 가지지만 제안방법은 비교적 양호한 특성을 가짐

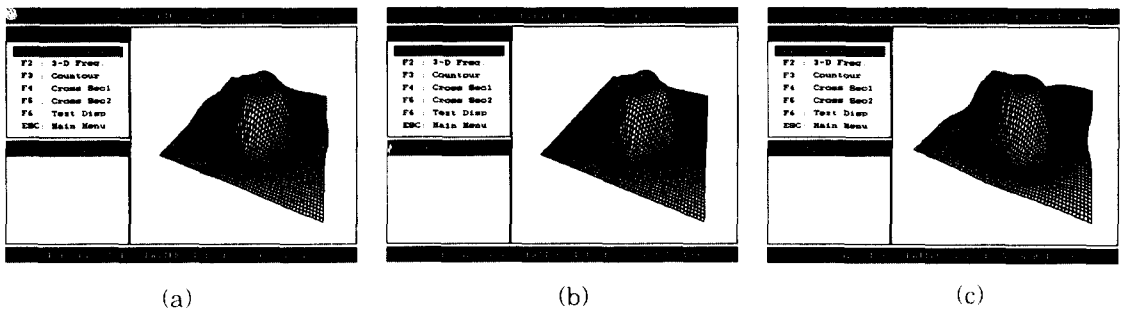
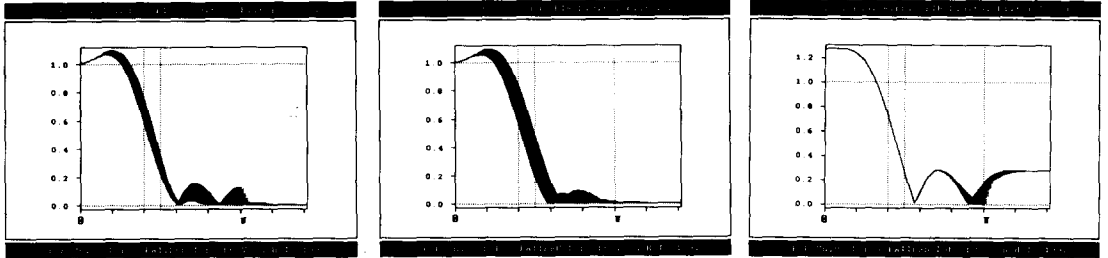


그림 7. 진폭 응답
(a) Kaiser 창방법 (b) 주파수 샘플링 방법 (c) 제안 방법

Fig. 7. The Amplitude response.
(a) Kaiser window method, (b) Frequency sampling method, (c) Proposed method.



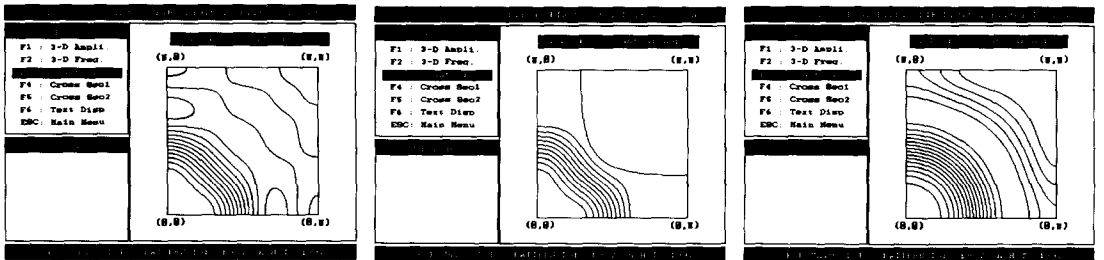
(a) (b) (c)

그림 8. 단면 응답

(a) Kaiser 창방법 (b) 주파수샘플링방법 (c) 제안 방법

Fig. 8. The cross section response.

(a) Kaiser window method, (b) Frequency sampling method, (c) Proposed method.



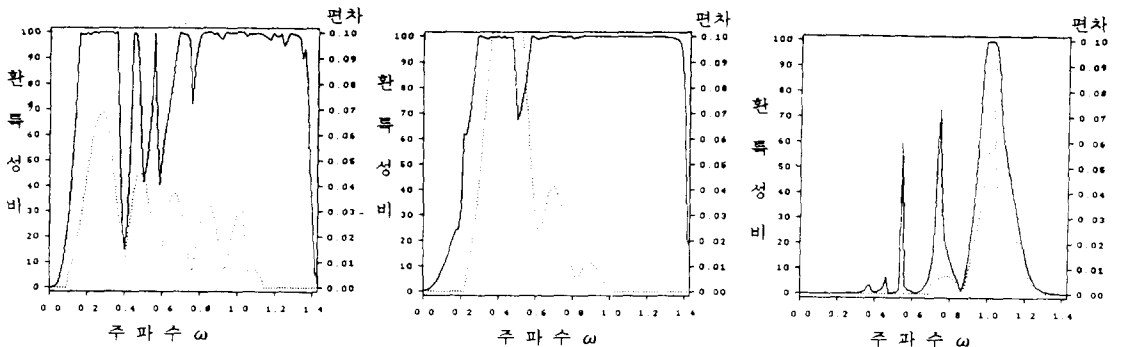
(a) (b) (c)

그림 9. 등고선 지도.

(a) Kaiser 창방법 (b) 주파수 샘플링 방법 (c) 제안 방법

Fig. 9. The contour map.

(a) Kaiser window method, (b) Frequency sampling method, (c) Proposed method.



(a) (b) (c)

그림 10. 환대칭 특성

(a) Kaiser 창방법 (b) 주파수 샘플링 방법 (c) 제안 방법

Fig. 10. The circular symmetry feature.

(a) Kaiser window method, (b) Frequency sampling method, (c) Proposed method.

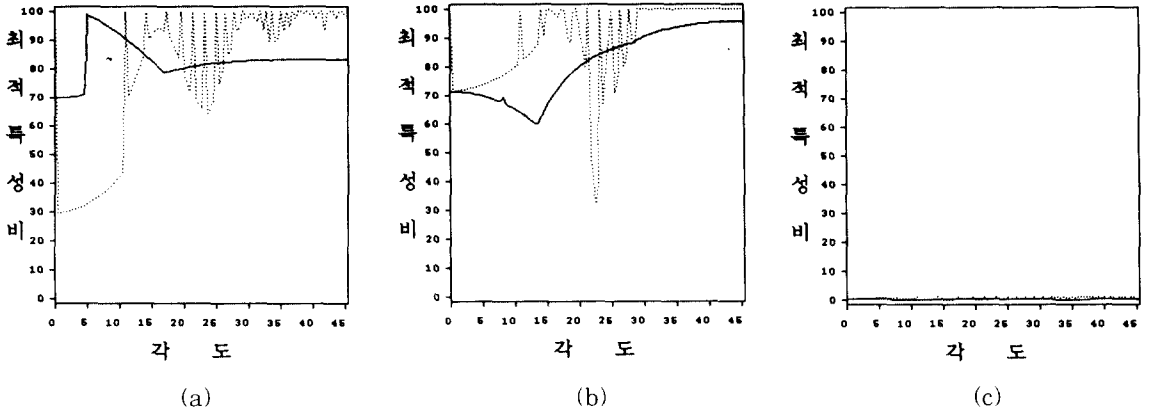


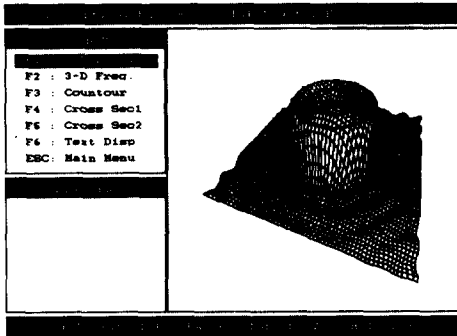
그림 11. 최적 응답 특성

(a) Kaiser 창방법 (b) 주파수 샘플링 방법 (c) 제안 방법

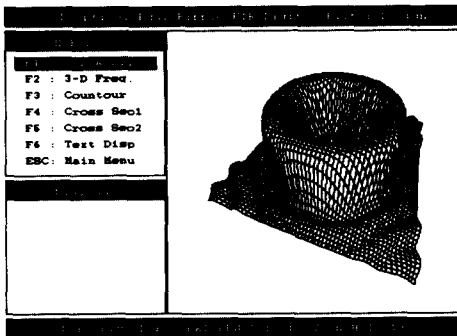
Fig. 11. The optimal response feature.

(a) Kaiser window method, (b) Frequency sampling method, (c) Proposed method.

을 알 수 있다.



(a)



(b)

그림 12. 고차필터의 진폭 응답

(a) 저역통과필터 (b) 대역통과필터

Fig. 12. The Amplitude response of high order filter.

(a) lowpass filter, (b) bandpass filter.

그림 11은 equi-ripple 특성을 나타낸 그림으로써 원점에서 π 방향으로 1 도씩 회전하여 차른 응답의 단면에서 리플들의 최대값과 최소값의 차에 대한 백분율을 나타낸 그림이다. 실선은 통과대역을, 점선은 차단대역을 나타내며 X 축은 각도를 나타내었다. 창방법과 주파수샘플링방법은 70 퍼센트 이상의 에러율을 가지며 제안방법은 거의 0 값에 가까움을 알 수 있다.

그림 12는 ω_p 가 0.4π 이고, ω_s 가 0.5π 인 21 x 21 차 저역통과필터와 $\omega_{p1}=0.35\pi$, $\omega_{s1}=0.45\pi$, $\omega_{p2}=0.65\pi$, $\omega_{s2}=0.75\pi$ 인 21 x 21 차 대역통과 필터의 진폭응답을 보여주고 있다.

VI. 결론

본 논문은 Parks-McClellan이 제안한 1차원 최적 근사화 알고리즘을 2차원으로 확장 해석한 2차원 최적 근사화 FIR 필터 설계 알고리즘을 제안하였다. 기존의 방법들은 주어진 설계규격에 최적인 특성을 갖지 못하였지만 제안된 방법은 설계 규격에 최적으로 접근하며 리플 크기가 일정한 특성을 갖는 양호한 필터설계를 할 수 있었다.

參考文獻

[1] T.S.Huang, "Two-dimensional window", *IEEE trans. Audio Electroacoust.*, vol AU-20, pp 88-90, March 1972.

[2] T.W.Parks, J.H.McClellan, "Chebyshev

approximation for nonrecursive digital filters with linear phase", *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol CT-19, No.2, March 1972.

- [3] J.H.McClellan, T.W.Parks, L.R. Rabiner, "A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustic*, vol AU-21, No.6, Dec 1973.
- [4] Y.Kamp and J.P.Thiran, "Chebychev

approximation for two dimensional non-recursive digital filters", *IEEE Trans. Circuits and System*, vol.CAS-22, pp 208-218, March 1975.

- [5] D.E.Dugeon and R.M.Mercereau, *Multidimensional Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, N.J : Prentice Hall, 1984.
- [6] J.Lim, *Two-Dimensional Signal and image processing*, Prentice Hall, Edition, 1980.

— 著 者 紹 介 —



尹 馨 泰(正會員)

1962年 4月 15日生. 1984年 성균관대학교 전자공학과 졸업. 1986년 성균관대학교 대학원(석사). 1993년 성균관대학교 대학원(박사). 1991년 ~ 현재 인덕전문대학 사무자동화과 조교수. 주관심분야는 이

차원신호처리, 화상처리 등임.



李 根 泳(正會員)

1947年 12月 30日生. 1973년 전남대학교 전기공학과 졸업. 1975년 한양대학교 대학원 전자공학과(석사). 1978년 한양대학교 대학원 전자공학과 (박사). 1979년 3월 ~ 1980년 2월 Denmark 공과대학(연구). 1987년 9월 ~ 1988년 8월 영국 Loughborough 대학(연구). 1977년 3월 ~ 1981년 8월 광운공대 조교수. 1981년 9월 ~ 현재 성균관대학교 전자공학과 교수. 주관심분야는 영상처리, 신경회로망, 패턴인식 등임.