

Chaos 현상은 제어시스템에 유해한가?

李均景

慶北大學校 工科大學 電子工學科

I. 서론

우리는 수학을 이용하여 주위의 다양하고 변화무쌍한 삼라만상을 단순화시켜서 모델링하는데 익숙해져 있다. 지평선, 산, 태양 등을 바라보고 직선, 삼각형, 원이라는 추상적 개념을 형성시킨다. 지구 주위를 공전하는 달을 바라보고 주기함수 해를 가지는 미분방정식을 고안해낸다. 또한 이러한 단순화가 복잡한 자연현상을 나타내기에 충분한가 점검한다.

태양의 사진을 찍었을 때 테두리가 왜인가? 확대시켰을 때 1차원의 직선구조를 가지는 원주와는 달리 태양의 테두리는 확대하면 할수록 미세한 형상이 나타나고 결국은 분자 및 원자의 단계까지 확대해야 할 것이다. 이러한 집합을 fractal 집합이라 한다.

지구의 기상상태는 주기함수인가? 만약 그러하다면 일기예보가 아주 쉬울 것이다. 우리는 기상상태가 대체로 주기성을 가지나 예측하기 힘든 무질서한 성질도 가지는 것을 안다. Chaos 이론에서는 이러한 무질서하게 보이는 현상 속에서도 질서가 존재하는 것을 설명하며, chaos 현상을 나타내는 미분방정식의 해가 fractal 집합으로 수렴하게 된다고 이야기한다.^[1]

70년대에 chaos 시스템에 대한 관심이 배가되면서 이의 연구는 비선형이론의 중요한 부분이 되었다. Chaos 현상은 천체물리학, 생물학, 화학, 공학, 지학, 수학, 의학, 기상학, 사회학 등을 포함한 과학의 전분야에 걸쳐 존재하며 이에 관한 많은 연구 결과가 보고되고 있다.^[2]

과연 이러한 fractal 집합과 chaos 현상은 우리 공학자에게 무엇을 제시하는가? Chaos 현상이 제어시스템에 존재하면 제어시스템이 예측 불가능한 응답을

하고 불안정하여지는가? 아니면 chaos 현상이 제어시스템에 도움을 줄 수 있을까? 본 고에서는 이러한 질문들에 대한 해답을 제시하기 위하여 fractal 집합과 chaos 현상의 기본개념을 설명하고, 적응제어시스템의 예제를 이용하여 제어시스템에서 chaos 현상의 기능을 논의한다.

II. Fractal 집합

원주의 작은 부분을 확대하면 선분과 유사하고 원주의 차원은 선분과 마찬가지로 1차원이다. 원주의 길이가 얼마인가에 관심이 있다고 하자. 원주 위의 세점을 지나는 정삼각형의 둘레의 길이는 원주의 길이보다 작다. 원주 위의 네점을 지나는 정사각형의 둘레의 길이는 정삼각형의 둘레의 길이보다는 크고 원주의 길이보다는 작다. 각의 수를 늘려가면서 이러한 과정을 반복하여 그 값이 수렴하면 원주의 길이라고 정의할 수 있을 것이다. 위의 과정은 다각형의 각변의 길이, 즉 길이를 재는 잣대의 크기를 줄여가면서 값을 수렴시키는 우리가 일반적으로 사용하는 극한의 개념이다.

우리나라 해안선의 길이는 얼마인가? 10km의 잣대로 그보다 작은 굴곡을 무시하면서 재면 어떤 길이가 나올 것이다. 잣대의 길이를 줄여가면서 이 과정을 반복하면 실제 길이로 수렴할 것으로 기대한다. 그러나 이 극한값은 유한한 값으로 수렴하지 않고 무한대로 발산하게 된다. 그 이유는 해안선이 단순한 곡선이 아니고 확대해도 계속 미세한 형상을 나타내는 구조를 가지기 때문이다. 즉 해안선 사진의 일부

분을 확대하여 보면 원래의 사진과 유사한 형상을 가지는 것을 알 수 있고 이것을 자기유사성(self similarity)이라 한다. 해안선은 평면상에 존재하므로 2차원 평면보다는 낮은 차원이나 1차원 직선보다는 복잡한 구조를 가진다. 이러한 집합을 fractal 집합이라 한다.

Fractal 집합을 수학적으로 모델링한 가장 간단한 예제가 Cantor 집합이다. Cantor 집합은 그림 1과 같이 구성된다. 단위선분(0, 1)을 세부분으로 나눈 뒤 중간부분 (1/3, 2/3)를 제거한다. 남은 부분(0, 1/3)과 (2/3, 1)에 대해서도 같은 과정을 무한히 반복하였을 때 남은 부분을 Cantor 집합이라 한다. Cantor 집합의 일부분을 확대하면 원래 Cantor 집합과 똑같은 형태를 가지므로 집합내에 어떠한 법칙이 숨어있음을 알 수 있다.

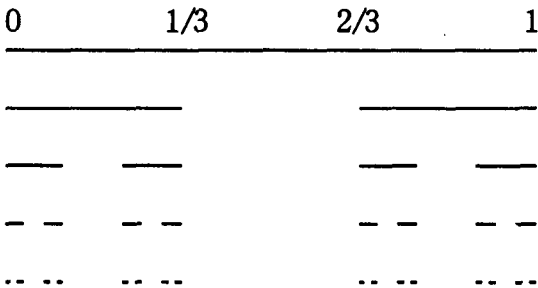


그림 1. Cantor 집합의 구성

점은 0차원이고 길이는 0이다. 실수론에 의한 Cantor 집합의 길이도 0이다. 그러나 Cantor 집합은 하나의 점과는 구조가 다르고 이러한 집합의 차원을 논의하기 위해 fractal 차원, 정보(information) 차원, 상관관계(correlation) 차원, Lyapunov 차원 등의 정의가 사용된다.^[3] 예로서 fractal 차원은 다음 식 (1)과 같이 정의된다.

$$D_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln 1/\epsilon} \quad (1)$$

여기서 $N(\epsilon)$ 은 주어진 집합을 둘러싸기 위해 필요한 직경이 ϵ 인 체적요소(예제에서는 길이 ϵ 인 선분)의 개수이며, 길이 1인 선분을 둘러싸기 위해서는 $1/\epsilon$ 개의 체적요소가 필요하다. 이것을 Cantor 집합에 적용하여 보면 $D_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309 \dots$ 임을 알 수 있다. 이 숫자는 집합내의 원소들이 산재되어 있

는 정도를 나타낸다.

우리 주위의 자연속에는 이러한 fractal 집합이 무수하다. 그러면 정수가 아닌 차원을 가지는 이러한 fractal 집합들이 우리 공학자에게 무엇을 제시하는가?

첫째, 간단한 자기유사성 규칙으로부터 그림 2와 같이 복잡한 fractal 집합을 형성시킬 수 있다. 또한 지구의 등그스름한 산보다 훨씬 날카롭고 험한, 즉 fractal 차원이 높은 외계 혹성의 산맥들을 컴퓨터 그래픽으로 실감나게 그려내어 우주영화 등에 이용할 수 있다.^[4]

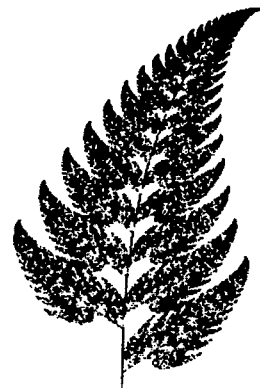


그림 2. Fractal 집합의 예

둘째, fractal 집합의 형상을 기억할 때 그 자체를 기억하지 않고 자기유사성 규칙을 찾아내어 기억한다면 굉장한 자료압축(data compression)효과를 기대할 수 있다.^[5] 예로서 우리 신체 각 부분에 혈액을 수송하기에 효과적으로 배치되어 있는 혈관을 생각할 수 있다. 큰 혈관에서 작은 혈관으로 갈라져서 모세혈관에 이르기까지 그 혈관들의 위치를 일일이 기억하여 만들어 낸다면 DNA의 기억용량은 충분하지 못할 것이다. 아마도 DNA속에는 큰 혈관에서 작은 혈관으로 나뉘어지는 규칙이 기억되어 있고 그 규칙이 점점 미세한 혈관에 반복되어 적용될 것이다.

III. Chaos 현상

다음의 간단한 2차 선형 자율 동역학시스템(autonomous dynamical system)을 논의한다.

$$\ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + x = 0 \tag{2}$$

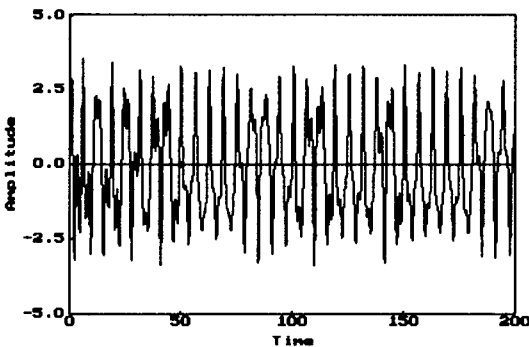
위의 미분방정식은 감쇠상수 ζ 가 0일 때, 주기함수 해를 가지며 이것은 $x - \dot{x}$ 위상평면 상에 원으로 나타난다. 이것을 제한궤도(limit cycle)라 한다. 감쇠상수 ζ 가 $0 < \zeta < 1$ 이면 위의 미분방정식은 감쇠진동 해를 가지고, 시간이 지남에 따라 $x = 0, \dot{x} = 0$ 으로 수렴하며 이는 $x - \dot{x}$ 위상평면 상의 원점에 해당한다. 이것을 평형점(equilibrium point)이라 한다. 평형점이나 제한궤도와 같이 해의 궤적이 수렴하는 집합을 흡인집합(attractor)이라 한다.

위의 미분방정식은 시간이 많이 지나면 정지하게 되는 단진자나 지구주위를 계속 공전하는 달의 방정식을 모델링한다. Poincare-Bendixson 정리는 이를 일반화하여, 2차 비선형 자율 동역학시스템의 궤적이 무한대로 발산하지 않으면 결국 평형점이나 제한궤도로 수렴하게 됨을 설명하고 흡인집합이 단순함을 나타낸다.^[6] 우리는 이 결과가 3차 이상의 시스템으로도 일반화되기를 바라나 다음의 간단한 비선형 비자율 Duffing 방정식은 그렇지 않음을 보여준다.^[7]

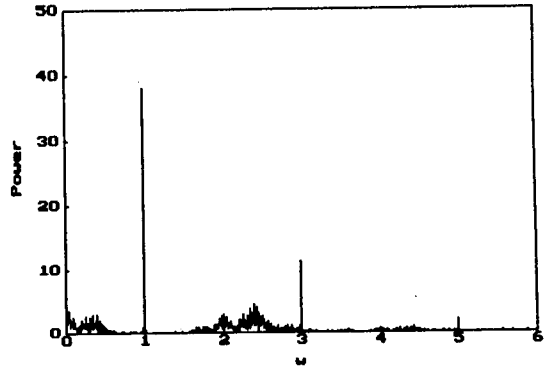
$$\ddot{x} + 0.05 \dot{x} + x^3 = 7.5 \cos t \tag{3}$$

식 (3)의 컴퓨터 시뮬레이션 결과가 그림 3에 정리되어 있다. 그림 3(a)는 초기조건 $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$ 에 대한 시간응답을 나타낸 것이다. 과도기응답이 지난 후의 응답을 살펴보면 어떤 주기성이 있는 것 같으면서도 비슷한 상황 후에 전혀 다른 응답이 이어지는 것을 발견할 수 있다. 즉 초기조건에 민감한 예측 불가능성을 나타낸다.

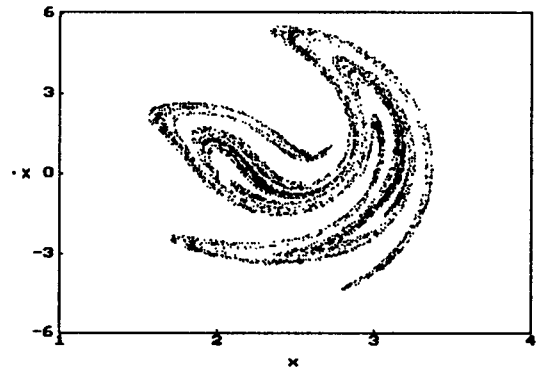
그림 3(b)는 시간응답의 전력스펙트럼이다. 이 전



(a) 시간 파형



(b) 전력 스펙트럼



(c) Poincare 단면도

그림 3. Duffing 방정식의 응답

력스펙트럼은 외부입력 여기주파수의 고조파성분뿐만 아니라 넓은 범위에 퍼져있는 주파수 성분도 포함한다. 우리가 일반적으로 사용하는 무작위잡음(random noise)의 전력스펙트럼은 넓게 퍼져있는 연속스펙트럼의 형태를 가지므로 식 (3)의 시스템은 결정론적 시스템(deterministic system)이면서도 확률론적 시스템(stochastic system)과 같은 예측 불가능성을 내포한다.

식 (3)을 외부여기주파수에 동기시켜서 관찰하면 시간 t 가 $(0, 2\pi)$ 의 값을 가지는 것으로 생각할 수 있고 상태공간은 $R^2 \times (0, 2\pi)$ 의 3차원이 된다. t 가 2π 의 정수배가 될 때마다 식 (3)의 해를 표본 추출하여 평면상에 그리면 3차원상 궤적의 2차원 단면도를 얻을 수 있고 이것을 Poincare 단면도라 한다. 주기함수 해의 Poincare 단면도는 한개 또는 여러개의

점으로 나타나나 식 (3)의 Poincare 단면도는 그림 3(c)와 같은 미세한 구조를 가진다. 식 (3)의 해는 초기조건에 민감하여 시간과형을 예측하기 힘들지만, 초기조건에 무관하게 정상상태에 그림 3(c)와 같은 단면을 가지는 3차원 공간내의 흡인집합으로 수렴하게 된다. 이는 chaos 시스템에서 무질서 속의 질서를 나타낸다. 이 흡인집합은 더이상 위상기하학적으로 점이나 원에 해당하는 평형점이나 제한궤도가 아닌 기묘한 흡인집합(strange attractor)이다. 이 흡인집합은 fractal 집합이며 chaotic 흡인집합이라고도 부른다.

이러한 chaos현상은 과학의 전분야에 걸쳐 널리 보고되고 있다. 그러면 흡인집합이 fractal 집합인 chaos 동역학시스템은 우리 공학자에게 무엇을 제시하는가?

첫째, 자연에는 chaos 현상이 산재하여 있으며 chaos 동역학시스템은 초기의 작은 오차가 차후에 큰 영향을 끼쳐서 미래를 예측하기 힘들다는 것과, 복잡하고 변화무쌍한 현상이 간단한 chaos 비선형시스템에 근거할 수 있다는 사실을 인식하는 것이다. 이것은 삼라만상의 다양성을 주관하는 법칙이 단순하기를 바라며 모델링하는 우리의 철학에 합당하다.

둘째, chaos 현상을 나타내는 심장박동, 뇌파 등으로부터 정보를 추출하여 질환의 진단 및 예방에 응용할 수 있다. Poincare 단면도 및 그의 fractal 차원은 우리가 일반적으로 사용하는 시간과형 및 주파수분석 기법과 더불어 어떠한 현상으로부터 유용한 정보를 추출하기 위한 도구로 사용될 수 있다. 그러나 이에 대해서는 앞으로 많은 연구가 필요하다. 예로서 심장박동의 chaos 현상을 분석하기 위하여 10,000개의 점으로 구성된 Poincare 단면도를 그리려면 심장이 1분에 80번 박동한다는 가정하에 2시간 이상이 소요될 것이다. 2시간 동안에 심장의 박동수가 일정하리라는 가정은 현실성이 없으며, 여기주파수가 일정하도록 시간축의 축척을 조정하면 동역학시스템의 계수들이 시간에 따라 변화하는 시변시스템이 된다. 그러므로 시변 동역학시스템의 흡인집합에 대한 고찰이 필요하다.^[6]

IV. 제어시스템에 존재하는 chaos 현상

제어시스템은 안정하여야 하며 변화하는 외부상황에 적용할 수 있어야 한다. Chaos 현상이 제어시스

템에 존재하면 이러한 안정성 및 적응성에 어떠한 영향을 미치는가? 이에 관한 논의를 위해 Mareels 등의 논문을 인용한다.^[9] 다음과 같은 2차 이산치시간 시스템을 고려하자(이산치시간 시스템은 3차 이하의 낮은 차수의 시스템에서도 chaos 현상이 존재 가능하다).

$$y_k = ay_{k-1} + by_{k-2} + u_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (4)$$

여기서 a와 b는 미지의 계수이다. 위의 시스템을 설계자가 다음과 같이 1차시스템으로 모델링하였다.

$$y_k = \hat{a}y_{k-1} + u_{k-1} \quad (5)$$

제어의 목적은 출력 y_k 가 0이 되도록 입력 u_k 를 가하는 것이며 매개변수 \hat{a} 의 인식(identification)이 필요하다. 이를 위하여 신속한 응답특성을 가지는 식 (6)의 dead-beat 인식기와 식 (7)의 dead-beat 제어기를 사용한다.^[10]

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} + \frac{1}{y_{k-1}}(y_k - \hat{a}_{k-1}y_{k-1} - u_{k-1}), \quad y_{k-1} \neq 0 \quad (6)$$

$$u_{k-1} = -\hat{a}_{k-1}y_{k-1} \quad (7)$$

여기서 \hat{a}_k 는 시간 k에서 \hat{a} 의 추정치이다. 식 (4), (6), (7)은 적응제어 페루프 시스템을 구성한다.

식 (6)은 y_k/y_{k-1} 항을 포함하므로 출력 y_k 가 0으로 수렴할 때 계산상의 문제가 발생한다. 그러므로 다음과 같이 계산과정을 변형한다. 식 (7)을 식 (4)와 식 (6)에 대입하면 다음과 같다.

$$y_k = (a - \hat{a}_{k-1})y_{k-1} + by_{k-2} \quad (8)$$

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} + \frac{y_k}{y_{k-1}} \quad (9)$$

식 (8)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 다음식을 얻는다.

$$a - \hat{a}_k = -b \frac{y_{k-2}}{y_{k-1}} \quad (10)$$

즉 $a - \hat{a}_{k-1} = -b \frac{y_{k-3}}{y_{k-2}}$ 이다. 이것을 식 (8)에 대입하여 정리하면 인식기와 제어기를 포함한 페루프 방정식을 얻는다.

$$\frac{y_k}{y_{k-1}} = -b \frac{y_{k-3}}{y_{k-2}} + b \frac{y_{k-2}}{y_{k-1}} \quad (11)$$

새로운 변수 $r_k = \frac{y_k}{y_{k-1}}$ 을 이용하여 식 (11)을 간단히 표시하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$r_k = b \left\{ \frac{1}{r_{k-1}} - \frac{1}{r_{k-2}} \right\} \quad (12)$$

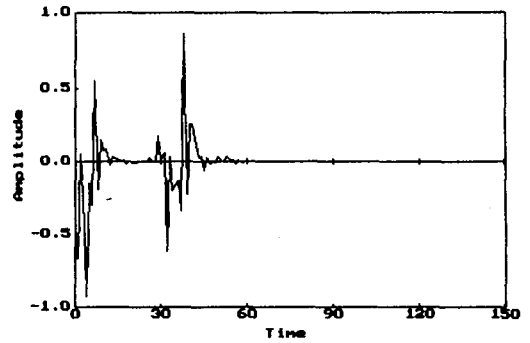
$$y_k = \prod_{i=0}^k r_i y_{-1} \quad (13)$$

$$\hat{a}_k = a + b \frac{1}{r_{k-1}} \quad (14)$$

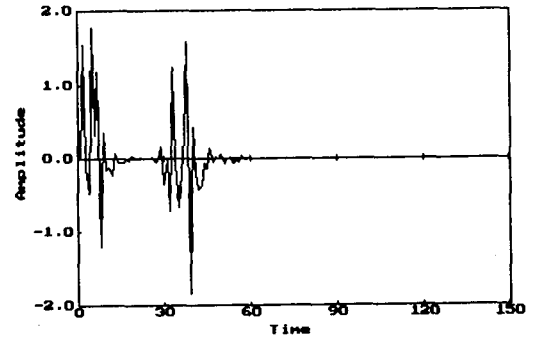
예로서 $a=2, b=0.3333, y_{-2}=1.5, y_{-1}=-0.5, \hat{a}_{-1}=0$ 인 경우 위 시스템의 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 그림 4와 같다. 그림 4(a)와 그림 4(b)는 제어기의 출력 y_k 와 입력 u_k 를 나타내며 영으로 수렴하고 제어기가 안정함을 나타낸다. 그러나 제어기의 이득 또는 매개변수의 예측치 \hat{a}_k 는 그림 4(c)와 같으며 불규칙하게 변화하는 현상을 나타낸다. 이것이 실제로 chaos 현상임을 증명할 수 있다. ^[11] \hat{a}_k 와 r_k 는 식 (14)의 관계식에 따라 연관되어 있으므로 r_k 를 이용하여 제어기 이득의 chaos 현상을 좀 더 자세히 관찰하고자 한다. 또한 $\frac{x}{1+|x|}$ 는 단조증가 연속함수로 위상기하학적 특성을 변화시키지 않으므로 정규화된 $\frac{r_k}{1+|r_k|}$ 를 분석한다. $(\frac{r_{k-1}}{1+|r_{k-1}|}, \frac{r_k}{1+|r_k|})$ 를 20,000번 계산하여 위상평면상에 나타내면 그림 5와 같으며 위상평면상의 흡인극한 집합이 fractal 집합임을 알 수 있다.

위의 시뮬레이션 결과를 적응제어이론의 관점에서 해석하면 다음과 같다. 시스템의 매개변수가 알려져 있지 않은 시스템의 최적제어에서, 매개변수의 추정치가 정확할수록 최적제어를 위해 더욱 적합한 제어 입력을 인가할 수 있다. 그러므로 제어입력은 시스템의 출력을 원하는 값으로 구동하여야 하는 동시에 시스템의 매개변수를 탐지하기 위한 기능도 가져야 한다. 이를 이중제어(dual control)라 한다. 또한 시스템의 매개변수를 정확히 추정하기 위하여서는 시스템을 모든 가능한 방향으로 구동시켜 보아야 하며, 이를 제어입력의 지속적 여기(persistent excitation) 조건이라 한다. ^[12]

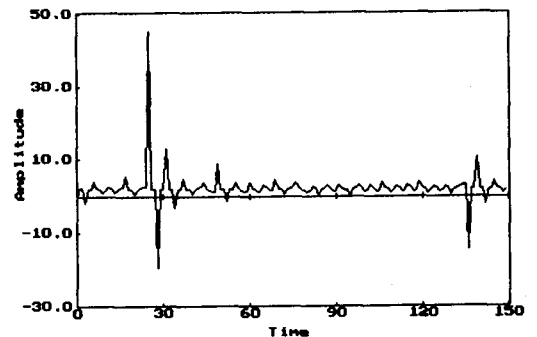
이러한 관점에서 앞의 예제를 바라볼 때 제어이득의 chaos 현상은 지속적 여기조건을 만족시키기 위하여 결정론적 시스템이 확률론적 시스템처럼 무작위 입력을 발생시키는 과정이라고 해석할 수 있다. 이에 따라 불확실한 시스템에 대한 안정성과 적응성이 보장되는 것이다. 테니스선수가 예측할 수 없는 상대방의 서비스를 받기 위해 몸을 불규칙적으로 움직이듯이,



(a) 출력신호



(b) 입력신호



(c) 제환이득

그림 4. 적응제어기의 응답

우리 인간을 포함한 생물들은 chaos 동역학을 이용하는 비선형 제어법칙에 따라 다양한 환경에 잘 적응하며 생활하는 것이 아닐까?

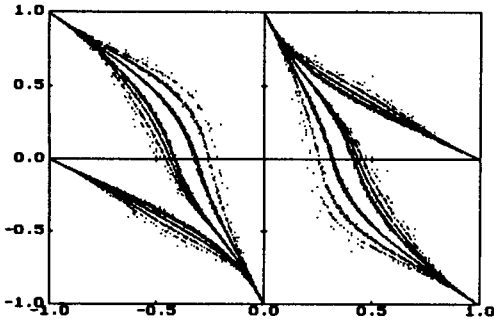


그림 5. 정규화된 케환이득의 위상평면 궤적

V. 결론

시스템의 연구는 해석과 설계의 과정으로 구분된다. 현재 대부분의 chaos 연구는 chaos 현상의 해석 단계에 머물러 있다. Chaos 현상을 적극적으로 설계 과정에 이용하여 불확실한 시스템의 안정성과 적응성을 개선하기 위하여서는, 무작위성을 chaos 현상으로 단순히 대치시키는 것 이상의 근본적인 연구가 필요하다. 이러한 연구의 결과를 쉽게 얻을 수 있는 것은 아닐지라도, 과학의 각 분야에서 널리 보고되고 있는 chaos 현상의 해석과 설계에 대한 지속적인 연구는 다양성에 내재된 질서의 본질에 대한 해답을 제시할 수 있을 것이다.

參考文獻

[1] J. Gleick, Chaos Making a New Science, Viking Penguin Inc., New York, 1987.

[2] B.-L. Hao, Chaos II, World Scientific Publishing Co., New Jersey, 1990.

[3] T.S. Parker and L.O. Chua, "Chaos: a tutorial for engineers," *IEEE Proc.*, vol. 75, no. 8, pp. 982-1008, Aug. 1987.

[4] M.F. Barnsley, et al., The Science of Fractal Images, Springer-Verlag Inc., New York, 1988.

[5] G. Zorpette, "Fractals: not just another pretty picture," *IEEE Spectrum*, pp. 29-31, Oct. 1988.

[6] J.-J.E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1991.

[7] J.M.T. Thompson and H.B. Stewart, Nonlinear Dynamics and Chaos, John Wiley & Sons Ltd., New York, 1986.

[8] 이 균 경, "신경회로망에서의 발진 및 CHAOS 현상의 가능성에 관한 연구," 한국과학재단, KOSEF 903-0803-014-1, 1991.

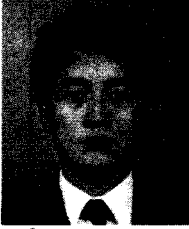
[9] I.M.Y. Mareels and R.R. Bitmead, "Non-linear dynamics in adaptive control: chaotic and periodic stabilization," *Automatica*, vol. 22, no. 6, pp. 641-655, 1986.

[10] K.J. Astrom and B. Wittenmark, Computer Controlled Systems, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1990.

[11] I.M.Y. Mareels and R.R. Bitmead, "Non-linear dynamics in adaptive control: periodic and chaotic stabilization-II. Analysis," *Automatica*, vol. 24, no. 4, pp. 485-497, 1988.

[12] K.J. Astrom and B. Wittenmark, Adaptive Control, Addison-Wesley Publishing Co., New York, 1989.

筆者紹介



李均景

1955年 3月 18日生

1977年 2月 서강대학교 전자공학과(학사)

1984年 5月 The University of Texas at Austin 전기 및 컴퓨터공학과(석사)

1987年 8月 The University of Texas at Austin 전기 및 컴퓨터공학과(박사)

1977年 3月 ~ 1982年 8月 국방과학연구소 연구원

1987年 8月 ~ 1989年 6月 Oklahoma State University 전기 및 컴퓨터공학과 조교수

1989年 6月 ~ 현재 경북대학교 전자공학과 조교수

주관심분야 : 비선형 시스템 이론, 수중음향 표적추적