論 文

效率的인 適應 필터 設計를 위한 第3次 필터化 傾斜度 알고리즘과 構造

正會員 金 海 正* 正會員 李 斗 秀*

The Cubically Filtered Gradient Algorithm and Structure for Efficient Adaptive Filter Design

Hae Jung Kim*, Doo Soo Lee*, *Regular Members*

要 約

本 論文에서는 스칼라 인수 α_1, α_2, α_3를 媒介變數化하여 갱신항을 첨가한 비선형 적응 알고리즘의 특성을 解析하고 그 構造를 나타낸다. 수렴 특성의 해석에서 평균 필터계수 벡터에 대하여 전이행열의 固有값이 기술된다. 그 알고리즘이 안정하기위한 범위도 증명된다. 또한 본 알고리즘의 時定數도 유도되고, Sign 알고리즘, 기존의 LMS 알고리즘, LFG 알고리즘, QFG 알고리즘의 計算量도 비교해 본다. 평균자승의 수렴특성을 해석하고 평균자승 순환식과 초과 평균자승 오차(excess mean square error) 표현식을 유도하고 본 알고리즘이 안정하기 위한 조건도 정한다. 컴퓨터 모의실험(simulation)에서 CFG 알고리즘이 LMS, LFG 및 QFG 알고리즘보다 계산량이 증가하는 반면 수렴속도에서 현저한 향상을 보여준다.

ABSTRACT

This paper analyzes the properties of such algorithm that corresponds to the nonlinear adaptive algorithm with additional update terms, parameterized by the scalar factors α_1, α_2, α_3 and presents its structure. The analysis of convergence leads to eigenvalues of the transition matrix for the mean weight vector. Regions in which the algorithm becomes stable are demonstrated. The time constant is derived and the computational complexities of MLMS algorithms are compared with those of the conventional LMS, sign, LFG, and QFG algorithms. The properties of convergence in the mean square are analyzed and the expressions of the mean square recursion and the excess mean square error are derived. The necessary condition for the CFG algorithm to be stable is attained. In the computer simulation applied to the system identification the CFG algorithm has the more computation complexities but the faster convergence speed than LMS, LFG and QFG algorithms.

*漢陽大學校 工科大學 電子工學科
Department of Electronic Engineering, Hanyang University
論文番號 : 93-173

Ⅰ. 序 論

本 論文에서 제안된 第3次 필터化 傾斜度 알고리즘(cubically filtered gradient algorithm : CFG)을 연구하게 된 동기는 기존의 최소평균자승 알고리즘(least mean squares algorithm : LMS)[1]이나 線形 필터化 傾斜度 알고리즘(linearly filtered gradient algorithm : LFG)보다 빠른 수렴 속도에 대한 요구에서 비롯되었다. 선형 필터화 경사도(LFG) 알고리즘은 디지틀 통신 선로에 대한 고속 적응 등화기에 처음 도입되었다[2][3][4]. 제3차 필터화 경사도(CFG) 알고리즘은 갱신된 필터계수 벡터를 얻기 위하여 매번 반복시 4개의 전필터계수 벡터가 결합되는 제4차 적응 알고리즘이다. 최근 선형 필터화 경사도 알고리즘의 비선형 형태를 사용하여 다층 순방향궤환 신경망(multilayer feed-forward neural network)의 역전파 학습(back-propagation training) 알고리즘에서 수렴 특성을 향상시켰다[5].

제3차 필터화 경사도 알고리즘은 선형 필터화 경사도 알고리즘[6]으로부터 미소량 $\sum_{i=2}^{3} \alpha_i [W(n-i+1) - W(n-i)]$을 부가하여 유도된다. 필터계수의 변화량을 계산할때 그 이전의 변화량의 일부를 부가하여 필터계수 변화량을 같은 방향으로 유지시킨다. 이 부가항이 수렴시 모멘텀 효과를 나타낸다. 전필터계수 변화량을 현재의 갱신량에 더하기 때문에 필터계수 벡터에 대하여 보다 빠르고 스무딩한 수렴특성을 나타낸다. 과거의 필터계수 벡터 W(n−1), W(n−2), W(n−3) 등의 기억공간과 부가적인 곱셈으로 인하여 그 특성이 개선된다. 그러나 알고리즘이 최소값(global minimum)에 접근할 때 모멘텀 항이 성능을 저하시켜 誤調停量(misadjustment)을 증가시킬 수 있다. 이런 문제를 극복하기 위하여 필터계수 벡터의 변화량이 충분히 작을 경우 모멘텀 항을 제거하여 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$로 둘 수 있다.

본 논문에서는 [7][8][9]에서 기술된 방법을 이용하여 제3차 필터화 경사도 알고리즘의 수렴 특성을 해석하고, 시스템 identification에 응용하여 [2][3][4][6]에서 제기된 성능상의 문제점을 해결한다. II 장에서는 제3차 필터화 경사도 알고리즘을 기술하고 이를 수렴특성의 해석에 적합한 형태로 나타낸다. III 장에서는 평균수렴 안정도 조건을 살펴보고, 평균 필터계수 순환식에서 복소수 고유값의 발생에 대하여 새로운 결과를 記述한다. 또한 시정수에 관한 근사적인 결과식을 보여주고, 제3차 필터화 경사도 알고리즘의 산술적 역산량이 LMS 알고리즘, LFG 알고리즘, 第2次 필터化 傾斜度 알고리즘(quadratically filtered gradient algorithm : QFG)의 연산량과 비교된다. IV 장에서 평균자승의 수렴특성을 분석하고 초과 평균자승오차 표현식을 유도하고 본 알고리즘이 안정한 제한범위를 정한다. V 장에서는 컴퓨터 모의실험(simulation)을 실시하여 시스템 identification에 적용한 결과 CFG 알고리즘이 LMS, LFG 및 QFG 알고리즘보다 계산량이 증가하는 반면 수렴속도에서 현저한 향상을 나타내는 것을 보여준다. VI 장에서는 지금까지의 내용과 앞으로의 과제가 요약된다.

Ⅱ. CFG 알고리즘과 構造

평균자승오차에 관한 傾斜度(gradient)를 구할 수 있다면, 傾斜度 探索(gradient search) 알고리즘의 일종인 第3次 필터化 傾斜度 알고리즘(CFG algorithm)은 다음과 같은 第3次 필터係數 更新式으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} W(n+1) = W(n) - \mu\nabla(n) &+ \alpha_1[W(n)-W(n-1)] \\ &+ \alpha_2[W(n-1)-W(n-2)] \\ &+ \alpha_3[W(n-2)-W(n-3)], \\ &|\alpha_1|<1,\ |\alpha_2|<1,\ |\alpha_3|<1. \end{aligned} \tag{2-1}$$

최소평균자승(LMS)[10]의 경사도의 추정값을 적용하면 위 경사도는 다음과 같다.

$$\nabla(n) \approx \begin{bmatrix} \partial e^2(n)/\partial w_0 \\ \partial e^2(n)/\partial w_1 \\ \vdots \\ \partial e^2(n)/\partial w_{N-1} \end{bmatrix} = -2e(n)X(n) \tag{2-2}$$

위식에서 $W(n) = [w_0(n), \cdots, w_{N-1}(n)]^T$이다. 출력오차는 다음 식으로 주어진다.

$$e(n) = d(n) - X^T(n)X(n) \tag{2-3}$$

위식에서 $X(n) = [x(n), \cdots, x(n-N+1)]^T$은 입력신호 벡터이고, d(n)은 理想應答이고 $y(n) = W^T(n)$

X(n)은 d(n)의 추정값이다. 스텝 크기 μ는 수렴 속도를 제어하고, 매개변수 α_1, α_2, α_3는 경사도에 부가된 모멘텀 항의 계수이다.

$\alpha_1=0$ 이고 $\alpha_2=0$ 이고 $\alpha_3=0$이면 LMS 알고리즘이 되고, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ 이면 LFG 알고리즘이 된다. 또한 $\alpha_3=0$ 이면 QFG 알고리즘으로 명명된다. 알고리즘 특성상 $\alpha_1\to 1$, $\alpha_2\to 1$, $\alpha_3\to 1$ 일 때 저역통과 필터의 구조를 가지고, $\alpha_1\to -1$, $\alpha_2\to -1$, $\alpha_3\to -1$ 일 때 고역통과 필터의 구조를 가진다. 식(2.1)에서 경사도를 알아내기가 어렵기 때문에 식(2.2)에서는 유한한 입력 신호를 이용하여 각 반복순환에서 경사도가 불완전하게 추정되고 있으며 이로 인하여 경사도 잡음이 발생한다[11]. 그림 1에서는 위 CFG 알고리즘의 구조가 제시되어 있다.

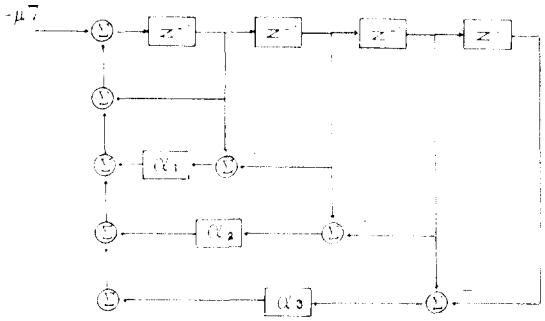

그림 1. CFG 알고리즘의 구조
Fig 1. The structure of the CFG algorithm

필터계수오차 벡터를 $V(n)=W(n)-W_o$ 라고 할 때, $W_o=R^{-1}P$은 최적 필터계수 벡터가 되고, 다음 식이 성립한다.

$$\Gamma(n+1)-\Gamma(n)=2\mu e_o(n)X(n)-2\mu X(n)X^T(n)\Gamma(n)$$
$$+\alpha_1[\Gamma(n)-\Gamma(n-1)]+\alpha_2[\Gamma(n-1)-\Gamma(n-2)]$$
$$+\alpha_3[\Gamma(n-2)-\Gamma(n-3)] \quad (2.4)$$

위식에서 최적 출력오차는 $e_o(n)=d(n)-W_o^TX(n)$ 이다.

회전 필터계수 오차벡터를 $\tilde{\Gamma}(n)=Q^T\Gamma(n)$이라고 두고, 식(2.4)에 Q^T를 곱하면 다음 식이 성립한다.

$$\tilde{\Gamma}(n+1))-\tilde{\Gamma}(n)=2\mu e_o(n)\tilde{X}(n)-2\mu\tilde{X}(n)\tilde{X}^T(n)\tilde{\Gamma}(n)$$
$$+\alpha_1[\tilde{\Gamma}(n)-\tilde{\Gamma}(n-1)]+\alpha_2[\tilde{\Gamma}(n-1)-\tilde{\Gamma}(n-2)]$$
$$+\alpha_3[\tilde{\Gamma}(n-2)-\tilde{\Gamma}(n-3)] \quad (2.5)$$

위식에서 $\tilde{X}(n)$은 회전입력 벡터 $\tilde{X}(n)=Q^TX(n)$이다.

입력신호 상관행렬은 $R=E[X(n)X^T(n)]$로 정의하고, 고유벡터 분해 $R=Q\Lambda Q^T$가 성립하고, 대각선 행렬 $\Lambda=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N]$에서 위 입력신호 상관행렬의 고유벡터는 $0<\lambda_{min}\le\lambda_i\le\lambda_{max}$로 배열되어 있다. 행렬 Q의 열은 $QQ^T=I$인 특성이 성립하는 직교 고유벡터이고, I는 단위 행렬이다. 교차상관 벡터 P는 $P=E[X(n)d(n)]$로 정의한다.

적응 매개변수 공간에서 위 알고리즘의 최소값에 도달하면 학습을 끝낸다. 그러나 局所(local) 最少값에 도달하면, 출력 오차는 許容될 수 없을 정도로 크다. 위 알고리즘이 용인될 수 있는 최적값에 도달하기 전에 학습을 중지하거나, 위 매개변수를 변화시키거나 필터계수의 초기값을 바꿈으로써 그 문제를 해결할 수 있다. 다행히도 이런 문제는 실제로 큰 어려움을 일으키지는 않을 것으로 보인다.

Ⅲ. 收檢 特性

1. 安定度 條件

식 (2.5)의 평균을 취하면, 다음 식이 성립한다.

$$E[\tilde{\Gamma}(n+1)-\tilde{\Gamma}(n)]=-2\mu\Lambda E[\tilde{\Gamma}(n)]$$
$$+\alpha_1E[\tilde{\Gamma}(n)-\tilde{\Gamma}(n-1)]+\alpha_2E[\tilde{\Gamma}(n-1)-\tilde{\Gamma}(n-2)]$$
$$+\alpha_3E[\tilde{\Gamma}(n-2)-\tilde{\Gamma}(n-3)] \quad (3.1)$$

위 식(3.1)에서 $\Lambda=E[X(n)X^T(n)]$은 고유값의 대각 행렬이다. 직교성 원리[1]에 따라서 $E[e_o(n)\tilde{X}(n)]=0$이 된다. 또한 W(n)과 X(n)은 독립적이라고 가정한다[1]. 다음의 4N 차원 상태 벡터

$$\tilde{\Gamma}(n+1)=\begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}(n+1)\\ \tilde{\Gamma}(n)\\ \tilde{\Gamma}(n-1)\\ \tilde{\Gamma}(n-2)\end{bmatrix} \quad (3.2)$$

을 정의할 때, 다음의 순환식이 성립한다.

$$E[\tilde{U}(n+1)]=\begin{bmatrix}(1+\alpha_1)I-2\mu\Lambda & (-\alpha_1+\alpha_2)I & (-\alpha_2+\alpha_3)I & -\alpha_3 I\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\end{bmatrix} E[\tilde{U}(n)] \tag{3-3}$$

위 식에서 블럭 전이 행렬(block transition matrix)은 4N 차원을 가진다. 본 알고리즘의 안정도는 다음 행렬식

$$det\begin{bmatrix}(1+\alpha_1-\zeta)I-2\mu\Lambda & (-\alpha_1+\alpha_2)I & (-\alpha_2+\alpha_3)I & -\alpha_3 I\\ I & -\zeta I & 0 & 0\\ 0 & I & -\zeta I & I\\ 0 & 0 & I & -\zeta I\end{bmatrix} = 0 \tag{3-4}$$

의 근 $\{\zeta_i\}$에 따라 영향을 받는다.

위 행렬식을 블럭 행렬로 분할하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$det\begin{bmatrix}-\zeta I & 0 & 0\\ I & -\zeta I & I\\ 0 & I & -\zeta I\end{bmatrix}$$

$$det[[(1+\alpha_1-\zeta)I-2\mu\Lambda]-[(-\alpha_1+\alpha_2)I\ (-\alpha_2+\alpha_3)I-\alpha_3 I]\cdot\begin{bmatrix}-\zeta I & 0 & 0\\ I & -\zeta I & I\\ 0 & I & -\zeta I\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}I\\0\\0\end{bmatrix}]=0 \tag{3-5}$$

위 (3-5)식에서 역행렬이 존재하기 때문에, 다음 특성 방정식을 유도할 수 있다.

$$(-\zeta)^{3N}\,det[(1+\alpha_1-\zeta)I-2\mu\Lambda-[(\alpha_1-\alpha_2)\zeta^{-1}-(\alpha_2-\alpha_3)\zeta^{-2}-\alpha_3\zeta^{-3}]I]=0 \tag{3-6}$$

식 (3-6)에서 4N 개의 근을 결정하기 위하여, 다음의 4차형

$$\zeta_i^4-(1+\alpha_1-2\mu\lambda_1)\zeta_i^3+(\alpha_1-\alpha_2)\zeta_i^2+(\alpha_2-\alpha_3)\zeta_i+\alpha_3=0 \tag{3-7}$$

을 조사할 필요가 있다. 수정된 Schur-Cohn 검정[12]을 이용하여, 식 (3-7)의 안정도를 판정할 수 있으며, 다음의 안정도 조건이 유도된다.

조건 1 : $0<\mu<\dfrac{1+\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3}{\lambda_{max}}$

조건 2 : $-1<\alpha_3<1$

조건 3 : $|-\alpha_2-\alpha_1\alpha_3+2\alpha_3\mu\lambda_i|<1-\alpha_3^2$

조건 4 : $|\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_3-\alpha_1\alpha_3^2+\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2-\alpha_2\alpha_3^3-2(\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3^2+\alpha_3^3)\mu\lambda_i+4\alpha_3\mu^2\lambda_i^2|<|(-1-\alpha_2-\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2+2\alpha_3\mu\lambda_i)(-1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2-2\alpha_3\mu\lambda_i)|$

$\alpha_1\rightarrow 1$, $\alpha_2\rightarrow -1$, $\alpha_3\rightarrow 1$ 일 때, 안정도 한계는 $0<\mu<4/\lambda_{max}$로 증가한다. μ에 관하여 CFG 알고리즘의 안정도 한계는 LMS 알고리즘의 안정도 한계에 비하여 크게 증가한 것을 알 수 있다. $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\rightarrow -1$ 일 때, 안정도 한계는 0으로 감소한다. α_1, α_2, α_3가 음수일 경우 알고리즘이 안정하더라도 그 성능을 저하시킨다. 즉, 전 필터계수 갱신항이 음의 방향에 있거나 $\alpha_i(W_i(n-i+1)-W_i(n-i))<0$ 일 때, 그 필터계수 갱신량의 음의 분수를 그 다음의 필터계수 갱신항에 첨가하기 때문에 수렴 속도가 저하될 수 있다.

$\alpha_2\rightarrow 0$, $\alpha_3\rightarrow 0$ 일 때, 위 4개의 제한조건은 다음과 같은 안정도 조건으로 귀결된다.

조건 1 : $0<\mu<\dfrac{1+\alpha_1}{\lambda_{max}}$

조건 2 : $0<\alpha_1<1$

위 안정도 한계는 선형 필터화 경사도(LFG) 알고리즘의 안정도 조건이 된다[6].

$\alpha_3\rightarrow 0$ 일 때, 위 4개의 조건은 다음과 같은 안정도 조건으로 귀결된다.

조건 1 : $0<\mu<\dfrac{1+\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_{max}}$

조건 2 : $0<\alpha_2<1$

조건 3 : $|\alpha_1+\alpha_1\alpha_2^3-2\alpha_2\mu\lambda_i|<1-\alpha_2^2$

위 안정도 한계는 제2차 필터화 경사도(QFG) 알고리즘의 안정도 조건이 된다.

LMS 알고리즘의 전이행렬은 대칭적이기 때문에 그 고유값은 실수가 된다. 그러나 CFG 알고리즘의 전이 행렬은 위와 같이 대칭적이 아니기 때문에 그 고유값은 복소수가 될 수 있다.

2. 時定數 및 演算量

식(3-3)에서 각 순간값은 기하 수열이 되고, i번째 mode의 기하비(geometric ratio)는 식(3-4)으로 주어진다. 일반적으로 위 기하 수열을 지수 포락선으로 근사화하고, 저속의 적응성과 큰값의 시정수를 가정한다[11]. 식 (3-7)에서 특성방정식의 근 ζ_i가 실수이고 양수의 제곱근만을 유지한다고 가정하면, i번째 mode에서 시정수 τ_i는 다음과 같은 관계식을 가진다.

$$\tau_i \approx 1/(1-\zeta_i)$$

$$\approx \frac{4}{3-\alpha_1-2f+2\mu\lambda_i+\left[-8(-2e+t)+(1-\alpha_1-2f+2\mu\lambda_i)^2\right]^{1/2}} \tag{3-8}$$

위 식(3-8)에서 상수 t는 다음 분해방정식(resolvent)

$$(-a_1^2+4a_0a_2-a_0a_3^2)+(-4a_0+a_1a_3)t-a_2t^2+t^3=0 \tag{3-9}$$

의 해이고, 상수 e 및 f는 다음과 같이 주어진다.

$$e=\sqrt{-a_0+\frac{t^2}{4}}$$

$$f=\frac{-a_1+\frac{a_3t_2}{2}}{2\sqrt{-a_0+\frac{t^2}{4}}} \tag{3-10}$$

표 1에서 CFG 알고리즘의 산술 연산의 수가 sign 알고리즘[13], LMS 알고리즘, LFG 알고리즘, QFG 알고리즘의 연산 수와 비교되어 있다. 여기서 N은 적응필터 계수의 크기(size)를 나타낸다. CFG 알고리즘은 필터 구조에서 곱셈기(multiplier) 및 덧셈기(adder)가 많아지므로 계산량이 증가한다는 것을 표 1로 부터 알 수 있다.

표 1. 여러가지 알고리즘에 대한 계산량의 비교

Table 1. Comparison of the computational complexities for various algorithms

알고리즘	곱셈의 수	덧셈의 수
Sign	N	2N
LMS	2N	2N
LFG	3N	4N
QFG	4N	6N
CFG	5N	8N

Ⅳ. 平均自乘 循環式에서 收檢

1. 平均自乘 循環式과 誤調停量

필터계수 벡터의 공분산 행렬(covariance matrix)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[\tilde{\Gamma}(n+1)] &= E[\tilde{\Gamma}(n+1)\tilde{\Gamma}^T(n+1)]\\ &= (1+\alpha_1)^2E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n)]+4\mu^2[2\Lambda E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n)]\Lambda\\ &+\Lambda\,\mathrm{tr}[\Lambda E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n)]]]-2\mu(1+\alpha_1)[\Lambda E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n)]\\ &+E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n)]\Lambda]+(\alpha_1-\alpha_2)^2E[\tilde{\Gamma}(n-1)\tilde{\Gamma}^T(n-1)]\\ &+(\alpha_2-\alpha_3)^2E[\tilde{\Gamma}(n-2)\tilde{\Gamma}^T(n-2)]\\ &+\alpha_3^2E[\tilde{\Gamma}(n-3)\tilde{\Gamma}^T(n-3)]-(1+\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)\\ &\cdot[E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n-1)]+E[\tilde{\Gamma}(n-1)\tilde{\Gamma}^T(n)]\\ &+2\mu(\alpha_1-\alpha_2)^2[\Lambda E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n-1)]+E[\tilde{\Gamma}(n-1)\tilde{\Gamma}^T(n)]\Lambda]\\ &+(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)[E[\tilde{\Gamma}(n-1)\tilde{\Gamma}^T(n-2)]+E[\tilde{\Gamma}(n-2)\\ &\cdot\tilde{\Gamma}^T(n-1)]]+(\alpha_2-\alpha_3)\alpha_3[E[\tilde{\Gamma}(n-3)\tilde{\Gamma}^T(n-2)]\\ &+E[\tilde{\Gamma}(n-2)\tilde{\Gamma}^T(n-3)]]-(1+\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\\ &[E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n-2)]+E[\tilde{\Gamma}(n-2)\tilde{\Gamma}^T(n)]]\\ &+2\mu(\alpha_2-\alpha_3)[\Lambda E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n-2)]+E[\tilde{\Gamma}(n-2)\tilde{\Gamma}^T(n)]\Lambda]\\ &+(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_3[E[\tilde{\Gamma}(n-3)\tilde{\Gamma}^T(n-1)]+E[\tilde{\Gamma}(n-1)\tilde{\Gamma}^T(n-3)]]\\ &-(1+\alpha_1)\alpha_3[E[\tilde{\Gamma}(n-3)\tilde{\Gamma}^T(n)]+E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n-3)]]\\ &+2\mu\alpha_3[\Lambda E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n-3)]+E[\tilde{\Gamma}(n-2)\tilde{\Gamma}^T(n)]\Lambda]\\ &+4\mu^2\xi_m\Lambda\end{aligned} \tag{4-1}$$

위 식(4-1)에서 tr은 trace 연산자이고, 입력 신호 X(n)은 정규 랜덤 프로세스이다. 최소평균자승은 $\xi_m=E[e_o^2(n)]$으로 정의된다. 또한 위 식과 연계하여 필요한 다음과 같은 공분산 행렬의 순환식을 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[\tilde{\Gamma}(n+1),\tilde{\Gamma}(n)] &= E[\tilde{\Gamma}(n+1)\tilde{\Gamma}^T(n)]\\ &= (1+\alpha_1)E[\tilde{\Gamma}(n)\tilde{\Gamma}^T(n)]-(\alpha_1-\alpha_2)E[\tilde{\Gamma}(n-1)\tilde{\Gamma}^T(n)]\end{aligned}$$

$$-(\alpha_2-\alpha_3)E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n)]-\alpha_3 E[\tilde{V}(n-3)\tilde{V}^T(n)]-2\mu\Lambda E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n)] \quad (4\text{-}2)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[\tilde{V}(n+1),\tilde{V}(n-1)] &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n-1)]\\ &= (1+\alpha_1)E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-1)]-(\alpha_1-\alpha_2)E[\tilde{V}(n-1)\tilde{V}^T(n-1)]-(\alpha_2-\alpha_3)\cdot E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n-1)]\\ &\quad -\alpha_3 E[\tilde{V}(n-3)\tilde{V}^T(n-1)]-2\mu\Lambda E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-1)]\end{aligned} \quad (4\text{-}3)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[\tilde{V}(n+1),\tilde{V}(n-2)] &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n-2)]\\ &= (1+\alpha_1)E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-2)]-(\alpha_1-\alpha_2)E[\tilde{V}(n-1)\tilde{V}^T(n-2)]-(\alpha_2-\alpha_3)E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n-2)]\\ &\quad -\alpha_3 E[\tilde{V}(n-3)\tilde{V}^T(n-2)]-2\mu\Lambda E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-2)]\end{aligned} \quad (4\text{-}4)$$

위 공분산 행렬에서 각 성분에 대한 순환식을 유도하기 위하여 다음과 같은 기호를 도입합니다.

$$\begin{aligned}C_i(n+1) &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n+1)]_{ii}\\ D_i(n+1) &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n)]_{ii}\\ E_i(n+1) &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n-1)]_{ii}\\ F_i(n+1) &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n-2)]_{ii}\end{aligned} \quad (4\text{-}5)$$

위 식(4-5)으로부터 i번째 모드의 성분에 대한 순환식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}C_i(n+1) &= [(1+\alpha_1)^2+8\mu^2\lambda_i^2-4(1+\alpha_1)\mu\lambda_i]C_i(n)+4\mu^2\lambda_i\sum_{j=0}^{N}\lambda_j C_j(n)+(\alpha_1-\alpha_2)^2\\ &\quad \cdot C_i(n-1)+(\alpha_2-\alpha_3)^2 C_i(n-2)+\alpha_3 C_i(n-3)+[-2(1+\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)\\ &\quad +4(\alpha_1-\alpha_2)\mu\lambda_i]D_i(n)+2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)D_i(n-1)+2(\alpha_2-\alpha_3)\alpha_3 D_i(n-2)\\ &\quad +[-2(1+\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)+4(\alpha_2-\alpha_3)\mu\lambda_i]E_i(n)+2(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_3 E_i(n-1)\\ &\quad +[-2(1+\alpha_1)\alpha_3+4\alpha_3\mu\lambda_i]E_i(n)+4\mu^2\xi_m\lambda_i\end{aligned} \quad (4\text{-}6a)$$

$$D_i(n+1) = (1+\alpha_1-2\mu\lambda_i)C_i(n)-(\alpha_1-\alpha_2)D_i(n-1)-(\alpha_2-\alpha_3)E_i(n)-\alpha_3 F_i(n) \quad (4\text{-}6b)$$

$$E_i(n+1) = -(\alpha_1-\alpha_2)C_i(n-1)+(1+\alpha_1-2\mu\lambda_i)D_i(n)-(\alpha_2-\alpha_3)D_i(n-1)-\alpha_3 E_i(n-1) \quad (4\text{-}6c)$$

$$F_i(n+1) = -(\alpha_2-\alpha_3)C_i(n-2)-(\alpha_1-\alpha_2)D_i(n-1)-\alpha_3 D_i(n-2)+(1+\alpha_1-2\mu\lambda_i)E_i(n) \quad (4\text{-}6d)$$

z 영역에서 해석하기 위하여, 위식을 z 변환하면 대응하는 식은 다음과 같다.

$$C_c(z)C_i(z) = C_d(z)D_i(z)+C_e(z)E_i(z)+C_f(z)F_i(z)+C_g(z) \quad (4\text{-}7a)$$

$$D_d(z)D_i(z) = D_c(z)C_i(z)+D_e(z)E_i(z)+D_f(z)F_i(z)+zD_i(0) \quad (4\text{-}7b)$$

$$E_e(z)E_i(z) = E_c(z)C_i(z)+E_d(z)D_i(z)+zE_i(0) \quad (4\text{-}7c)$$

$$F_i(z) = F_c(z)C_i(z)+F_d(z)D_i(z)+F_e(z)E_i(z)+F_i(0) \quad (4\text{-}7d)$$

위 식(4-7)에서 각 계수는 다음과 같다.

$$C_c(z) = z-[(1+\alpha_1)^2+8\mu^2\lambda_i^2-4(1+\alpha_1)\mu\lambda_i]-(\alpha_1-\alpha_2)^2 z^{-1}-(\alpha_2-\alpha_3)^2 z^{-2}-\alpha_3^2 z^{-3}$$

$$C_d(z) = 2[-(1+\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)+2(\alpha_1-\alpha_2)\mu\lambda_i+(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)z^{-1}+(\alpha_2-\alpha_3)\alpha_3 z^{-2}-\alpha_3^2 z^{-3}]$$

$$C_e(z) = 2[-(1+\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)+2(\alpha_2-\alpha_3)\mu\lambda_i+(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_3 z^{-1}]$$

$$C_f(z) = 2[-(1+\alpha_1)\alpha_3+2\alpha_3\mu\lambda_i]$$

$$C_g(z) = \frac{4\mu^2\xi_m\lambda_i}{1-z^{-1}}+4\mu^2\lambda_i\sum_{j=0}^{N}\lambda_j C_j(n)+zC_i(0)$$

$$D_d(z) = z+\alpha_1-\alpha_2, \qquad D_c(z) = 1+\alpha_1-2\mu\lambda_i$$

$$D_e(z) = -[\alpha_2-\alpha_3], \qquad D_f(z) = -\alpha_3$$

$$E_e(z) = z+\alpha_3 z^{-1}, \qquad E_c(z) = -[\alpha_1-\alpha_2]z^{-1}$$

$$E_d(z)=1+\alpha_1-2\mu\lambda_i-[\alpha_2-\alpha_3]z^{-1},$$
$$F_c(z)=-[\alpha_2-\alpha_3]z^{-3}$$
$$F_d(z)=-[[\alpha_1-\alpha_2]z^{-2}+\alpha_3 z^{-3}],$$
$$F_e(z)=-[1+\alpha_1-2\mu\lambda_i]z^{-1} \quad (4\text{-}8)$$

위 식(4-7)로부터 $C_i(z)$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H_i(z)\cdot C_i(z)+I_i(z)$$
$$\begin{aligned}H_i(z)=&C_c(z)[D_d(z)E_e(z)-D_e(z)E_d(z)-D_f(z)\\&[E_e(z)F_d(z)+E_d(z)F_e(z)]]\\&-C_d(z)[D_c(z)E_e(z)+D_e(z)E_c(z)+D_f(z)\\&[E_e(z)F_c(z)+E_c(z)F_e(z)]]\\&C_e(z)[D_c(z)E_d(z)+D_d(z)E_c(z)+D_f(z)\\&[-E_c(z)F_d(z)+E_d(z)F_c(z)]]\\&C_f(z)[[D_d(z)E_e(z)-D_e(z)E_d(z)]F_c(z)\\&+[D_c(z)E_e(z)-D_e(z)E_c(z)]F_d+[D_d(z)E_c(z)\\&-D_c(z)E_d]F_e(z)]\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}I_i(z)=&z[D_d(z)E_e(z)-D_e(z)E_d(z)-D_f(z)\\&[E_d(z)F_e(z)+E_e(z)F_d(z)]]C_i(0)\\&+z[C_d(z)E_e(z)+C_e(z)E_d(z)+C_f(z)\\&[E_d(z)F_e(z)+E_e(z)F_d(z)]]D_i(0)\\&-C_e(z)[D_c(z)E_d(z)+D_d(z)E_c(z)+D_f(z)\\&[-E_c(z)F_d(z)+E_d(z)F_c(z)]]\\&-z[C_d(z)[D_e(z)+D_f(z)F_e(z)]+C_c(z)\\&[D_d-D_f(z)E_d(z)]+C_f(z)\\&\cdot[D_e(z)F_d(z)+D_d(z)F_e(z)]]E_i(0)\\&+[D_f(z)[C_d(z)E_e(z)+C_e(z)E_d(z)]\\&+C_f(z)[D_d(z)E_e(z)-D_e(z)E_d(z)]]F_i(0)\\&+[D_d(z)E_e(z)-D_e(z)E_d(z)-D_f(z)\\&[E_d(z)F_e(z)-E_e(z)F_d(z)]]\\&[\frac{4\mu^2\xi_m\lambda_i}{1-z^{-1}}+4\mu^2\lambda_i\sum_{j=0}^{N}\lambda_j C_j(z)]\end{aligned} \quad (4\text{-}9)$$

초과 평균자승 오차(excess mean square error)는 다음과 같다[7].

$$\xi_x(n)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_i(n) \quad (4\text{-}10)$$

위 식(4-10)에서 $C_i(n)$은 식(4-5)에 정의되어 있고, 식(4-6)에 의하여 계산될 수 있다. 위 식을 z 변환하면 다음 식이 성립한다.

$$\Xi_x(z)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_i(z) \quad (4\text{-}11)$$

위 식(4-11)에 식(4-9)를 대입하여 계산하면 $\Xi_x(z)$는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}\Xi_x(z)=&[\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{H_i(z)}[zI_{c0}(z)C_i(0)+zI_{d0}(z)D_i(0)\\&+zI_{e0}(0)+I_{f0}(z)F_i(0)]\\&+\frac{4\mu^2\xi_m}{1-z^{-1}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{H_i(z)}I_{c0}(z)]/\\&[1-4\mu^2\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{H_i(z)}I_{c0}(z)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{c0}(z)=&D_d(z)E_e(z)-D_e(z)E_d(z)-D_f(z)\\&[E_d(z)F_e(z)+E_e(z)F_d(z)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{d0}(z)=&C_d(z)E_e(z)+C_e(z)E_d(z)+C_f(z)\\&[E_d(z)F_e(z)+E_e(z)F_d(z)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{f0}(z)=&C_d(z)[D_e(z)+D_f(z)F_e(z)]\\&+C_e(z)[D_d(z)-D_f(z)E_d(z)]\\&+C_f(z)[D_e(z)F_d(z)+D_d(z)F_e(z)]]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{f0}(z)=&D_f(z)[C_d(z)E_e(z)+C_e(z)E_d(z)]\\&+C_f(z)[D_d(z)E_e(z)-D_e(z)\cdot E_d(z)]\end{aligned} \quad (4\text{-}12)$$

위 식(4-12)으로부터 정상상태에서의 초과(excess) 평균자승오차는 최종값 정리(final value theorem)[12]를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\xi_x(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{4\mu^2\xi_m\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2 I_{c0}(z)}{1-4\mu^2\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda^2}{H_i(z)}I_{c0}(z)} \quad (4\text{-}13)$$

오조정량(misadjustment)은 $\xi_m(\infty)/\xi_m$으로 정의되므로 다음 식으로 표현된다.

$$M_c=\frac{\lim_{z\to 1} j(Z)}{1-\lim_{z\to 1} j(Z)}$$

$$\lim_{z\to 1} J(1)=4\mu^2\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i^2}{\lim_{z\to 1} H_i(z)}\cdot\lim_{z\to 1} I_{c0}(z). \qquad (4\text{-}14)$$

위 식(4-9)로부터 $\lim_{z\to 1} H_i(z)$를 구하고 이를 위 식(4-14)에 대입하면 $\lim_{z\to 1} J(z)$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1} J(z)=4\mu^2\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2&[D_d(1)E_e(1)-D_e(1)E_d(1)\\&-D_f(1)[E_d(1)F_e(1)+E_e(1)F_d(1)]]/\\&[C_c(1)[D_d(1)E_e(1)-D_e(1)E_d(1)-D_f(1)\\&\cdot[E_d(1)F_d(1)+E_e(1)F_d(1)]]\\&-C_d(1)[D_c(1)E_e(1)+D_e(1)\quad E_c(1)\\&+D_f(1)[E_e(1)F_c(1)+E_c(1)F_e(1)]]\\&-C_e(1)[D_c(1)\quad E_d(1)+D_d(1)E_c(1)\\&+D_f(1)[-E_c(1)F_d(1)+E_d(1)F_c(1)]]\\&-C_f(1)[[D_d(1)E_e(1)-D_e(1)E_d(1)]F_c(1)\\&+[D_c(1)E_e(1)-D_e(1)E_c(1)]F_d(1)\\&+[D_d(1)E_c(1)-D_c(1)E_d(1)]F_e(1)]]\end{aligned} \qquad (4\text{-}15)$$

LMS 알고리즘일 경우에 위 식(4-15)는 다음과 같이 기술된다[7].

$$\lim_{z\to 1} J(z)=\mu\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{1-2\mu\lambda_i} \qquad (4\text{-}16)$$

LFG 알고리즘일 경우에 위 식(4-15)이 다음과 같이 표현된다[6].

$$\lim_{z\to 1} J(z)=\mu\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i(1+\alpha_1)}{1-2\mu\lambda_i-\alpha_1^2} \qquad (4\text{-}17)$$

QFG 알고리즘일 경우에 위 식(4-15)는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1} J(z)=2\mu^2\sum_{i=1}^{N}\lambda^2&[1+\alpha_1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2^2-2\alpha_2\mu\lambda_i]/\\&[[-\alpha_1-\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2^2+2(1+\alpha_1)\mu\lambda_i-4\mu^2\lambda^2]\\&[1+\alpha_1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2^2-2\alpha_2\mu\lambda_i]\\&+[1+\alpha_1-\alpha_2-2\mu\lambda_i][\alpha_1+\alpha_1\alpha_2-2\alpha_2\mu\lambda_i]\\&[1+\alpha_1+(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_2-2\mu\lambda_i]]\end{aligned} \qquad (4\text{-}18)$$

2. 평균 자승에서의 안정도

CFG 알고리즘의 평균자승 순환식은 앞 절에서 유도되었다. 위 시스템이 안정하기위한 필요 충분 조건은 식(4-12)의 극점이 단위원 내부에 존재하기만 하면 된다. 즉, 다음 식의 영점이 단위원 내부에 존재하여야 한다.

$$\begin{aligned}&D_n(z)=P(z)Q(z)\\&P(z)=\prod_{j=1}^{N}H_j(z)\\&Q(z)=1-4\mu^2\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda^2}{H_i(z)}\,I_{c0}(z)\end{aligned} \qquad (4\text{-}19)$$

식(4-12)가 안정하기 위한 조건을 구하기 위하여 [12]에서 기술되어 있는 Schur-Cohn 검정을 조사면 된다. 본 논문에서는 위 검정을 상세히 다루지는 않겠으나, 안정하기 위한 필요조건으로서 $\lim_{z\to 1} D_n(z)>0$이 요구된다.

식 (4-14)으로부터 오조정량은 다음과 같이 표현된다.

$$M_c=\frac{1-Q(1)}{Q(1)} \qquad (4\text{-}20)$$

위 식에서 CFG 알고리즘의 오조정량은 α_1, α_2, α_3에 좌우된다. 또한 오조정량은 양의 실수이기 때문에 Q(1)은 양의 실수가 되지 않으면 안된다. 그러므로 D(1)>0이기 때문에 P(1)>0도 성립하지 않으면 안된다. 따라서 식(4-19)로부터 평균자승에서 안정하기 위한 필요조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&4\mu^2\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2[D_d(1)E_e(1)-D_e(1)E_d(1)-D_f(1)[E_d(1)F_e(1)+E_e(1)F_d(1)]]\\&/[C_c(1)[D_d(1)E_e(1)-D_e(1)E_d(1)-D_f(1)[E_d(1)F_e(1)+E_e(1)F_d(1)]]\\&-C_d(1)[D_c(1)E_e(1)+D_e(1)E_c(1)+D_f(1)[E_e(1)F_c(1)+E_c(1)F_e(1)]]\\&-C_e(1)[D_c(1)E_d(1)+D_d(1)E_c(1)+D_f(1)[-E_c(1)F_d(1)+E_d(1)F_c(1)]]\\&-C_f(1)[D_d(1)E_e(1)-D_e(1)E_d(1)]F_c(1)+[D_c(1)E_e(1)-D_e(1)E_c(1)]\\&\cdot F_d(1)+[D_d(1)E_c(1)-D_c(1)E_d(1)]F_e(1)]]<\frac{1}{4}\end{aligned} \qquad (4\text{-}21)$$

위 제한조건은 Schur-Cohn 검정중의 한개를 이용하였기 때문에 필요조건은 될 수 있으나 충분조건이 되기는 어려우므로 몇가지 필요조건이 각 상황에 따라서 부가적으로 고려되어야 할 것으로 사료된다.

V. 컴퓨터 模擬實驗

CFG 알고리즘을 이용한 시스템 identification의 블럭도가 그림2에 도시되어 있다. CFG 필터를 시스템 identification에 응용할 때, 이상응답 d(n)과 입력신호 x(n)의 관계는

$$d(n)=G(z)x(n)+\nu(n) \tag{5-1}$$

이 된다. 식(4-1)에서 $\nu(n)$은 첨가 잡음(additive noise)이고 x(n)과 상호 상관 관계를 갖지 않고, G(z)는 미지의 시스템(unknown system)이다. 다음의 2차 시스템이 모의실험(simulation)에 사용되었다.

$$G(z)=k\frac{1-1.1z^{-1}+0.3z^{-2}}{1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2}} \tag{5-2}$$

식(5-2)에서 z=0.1, z=0.2에서 극점을 가지고 z=0.5, z=0.6에서 영점을 갖는다. 스칼라 k는 G(z)x(n)이 단위 분산을 가지도록 선택되었다. 입력 x(n)과 잡음 $\nu(n)$은 각각의 평균 0이고 분산이 var(x)=1, var(ν)=0.0001인 백색 가우시안 랜덤 수열(white gaussian random sequence)이었다. 그때 입력신호 상관 행렬 R은 고유값이 1인 단위행렬이 된다.

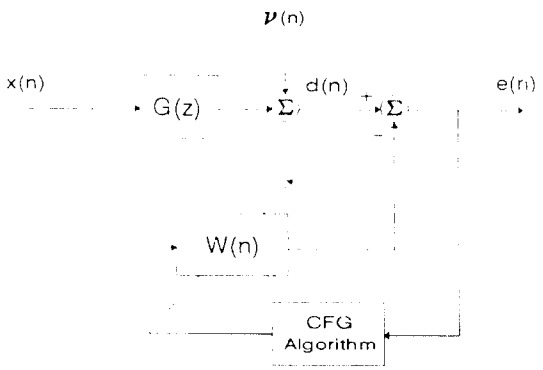

그림 2. CFG 알고리즘을 이용한 시스템 identification
Fig 2. System identification using the CFG algorithm

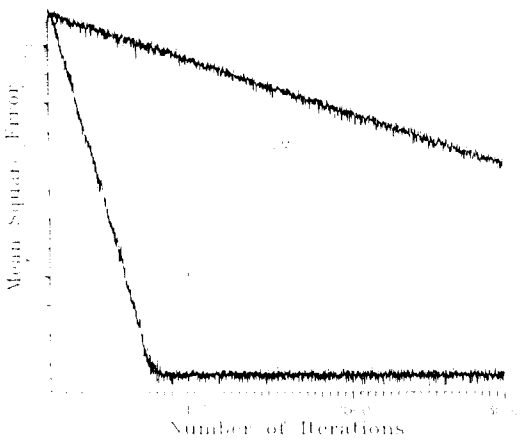

그림 3. LMS 및 $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$, and $\alpha_3=0.2$를 가진 CFG에 대한 MSE 학습 곡선 (I)
Fig 3. MSE learning curves for the LMS and CFG with $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$, and $\alpha_3=0.2$ (I)

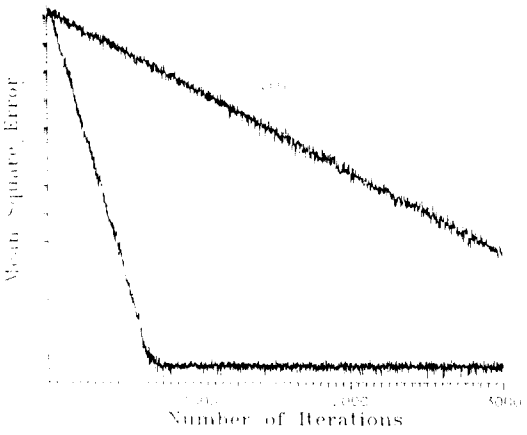

그림 4. $\alpha_1=0.4$를 가진 LFG 및 $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$, $\alpha_3=0.2$를 가진 CFG에 대한 MSE 학습 곡선 (II)
Fig 4. MSF learning curves for the LFG with $\alpha_1=0.4$ and CFG with $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$, and $\alpha_3=0.2$ (II)

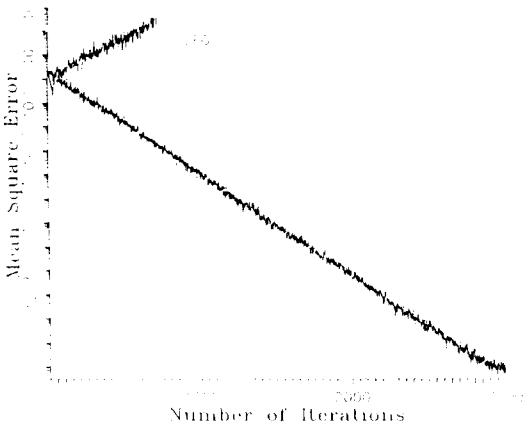

그림 5. $\alpha_1=1$를 가진 LFG 및 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-0.2$, $\alpha_3=-0.2$를 가진 CFG에 대한 MSE 학습 곡선 (III)

Fig 5. MSE learning curves for the LFG with $\alpha_1=1$ and CFG with $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-0.2$, and $\alpha_3=-0.2$ (III)

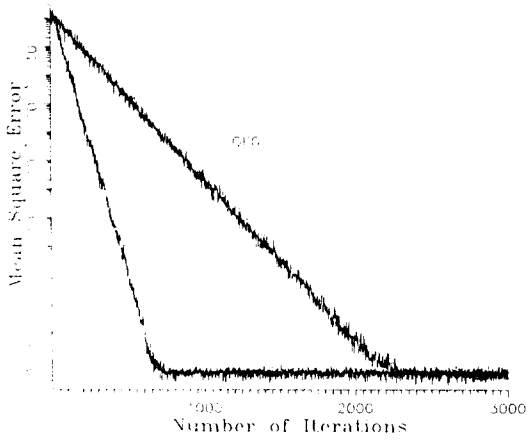

그림 7. $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$를 가진 QFG 및 $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$, $\alpha_3=0.2$를 가진 CFG에 대한 MSE 학습 곡선 (V)

Fig 7. MSE learning curves for the QFG with $\alpha_1=00.4$ and $\alpha_2=0.3$ and CFG with $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$, and $\alpha_3=0.2$ (V)

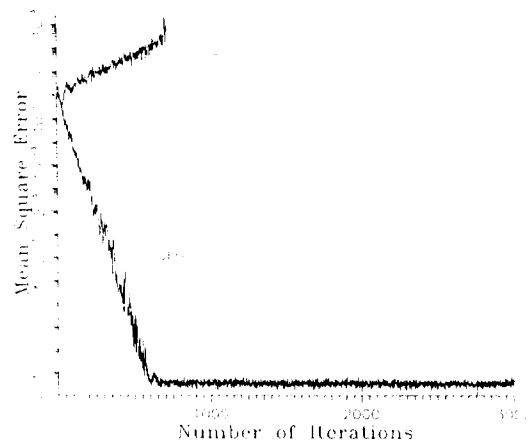

그림 6. $\alpha_1=1$를 가진 LFG 및 $\alpha_1=1$, $\alpha_3=-0.06$를 가진 CFG에 대한 MSE 학습 곡선 (IV)

Fig 6. MSE learning curves for the LFG with $\alpha_1=1$ and CFG with $\alpha_1=1$ and $\alpha_3=-0.06$ (IV)

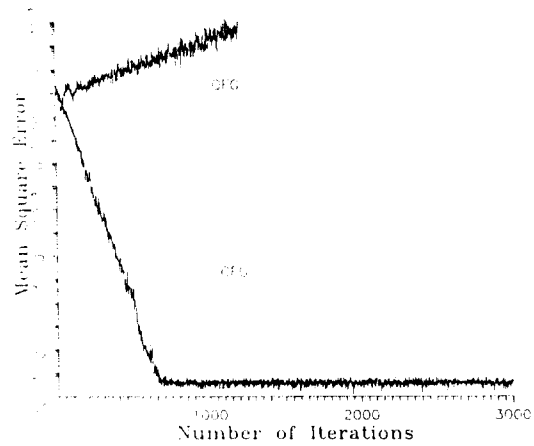

그림 8. $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.5$를 가진 QFG 및 $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.5$, $\alpha_3=-0.1$를 가진 CFG에 대한 MSE 학습 곡선 (VI)

Fig 8. MSE learning curves for the QFG with $\alpha_1=0.5$ and $\alpha_2=0.5$, and CFG with $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.5$, and $\alpha_3=-0.1$ (VI)

그림 3~ 그림 8은 시스템 identification의 모의실험에서 LMS알고리즘, LFG 알고리즘, QFG 알고리즘 및 CFG 알고리즘에 대한 평균자승오차 학습 곡선(MSE learning curve)을 보여준다. 이 곡선은 컴퓨터를 사용하여 200회의 독립 시행을 실시하여 출력오차 e(n)의 자승을 평균하여 얻은 결과이다. 이 경우에 스텝 크기 μ는 0.0005이었고 필터계수의 개수 N은 10개이었다. 미지의 시스템 G(z)에서 상수 k를 99499이라고 가정하였다.

그림 3에서는 매개변수 $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$, $\alpha_3=0.2$인 CFG 알고리즘과 LMS알고리즘이 도시되어 있는데, CFG 알고리즘의 수렴속도가 크게 향상된 것을 알 수 있다. 그림 4에서는 매개변수 $\alpha_1=0.4$인 LFG 알고리즘과 매개변수 $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$, $\alpha_3=0.2$인 CFG 알고리즘을 보여주고 있는데, 같은 조건에서 CFG 알고리즘의 수렴속도가 현저히 향상된 것을 알 수 있다. 그림 5에서 매개변수 $\alpha_1=1$인 LFG 알고리즘이 불안정한 특성을 나타내더라도 매개변수 $\alpha_2=-0.2$ $\alpha_3=-0.2$를 부가한 CFG 알고리즘은 안정한 특성을 보여주고 있다. 그림 6에서는 위와 동일한 조건 아래에서 LFG 알고리즘($\alpha_1=1$)이 불안정할지라도 최적화된 CFG 알고리즘($\alpha_2=0$, $\alpha_3=-0.06$)이 가장 신속한 수렴속도를 나타내고 있다. 그림7에서는 $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$인 QFG 알고리즘에 비하여 동일한 조건에서 $\alpha_3=0.2$를 부가한 CFG 알고리즘이 수렴속도에서 크게 향상되어 있음을 나타내고 있다. 그림 8에서는 $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.5$인 QFG 알고리즘이 불안정하더라도 동일한 조건에서 $\alpha_3=-0.1$을 부가한 CFG알고리즘이 안정하고 수렴속도에서도 현저한 차이를 보여주고 있다. 이와 같이 컴퓨터 모의실험을 통하여 구해진 최적 필터계수는 다음과 같다.

$$W_0=\begin{bmatrix} 0.994987583828 \\ -0.795989830621 \\ 0.039799244437 \\ 0.027859817025 \\ 0.007562252679 \\ 0.001711527260 \\ 0.000362152014 \\ 0.000074439364 \\ 0.000015514809 \\ 0.000002945119 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}3)$$

LFG 알고리즘이 $\alpha_1=1$일 때 불안정하다는 것은 평균 순환 해석에서 알 수 있었다. 또한 α_1의 값이 음수 일때 저하됨을 알 수 있다. 즉, 전 필터계수 갱신항이 음의 방향에 있을 때 그 필터계수 갱신량의 음의 분수를 그 다음의 필터계수 갱신항에 첨가하기 때문에 수렴 속도가 저하될 수 있다. 불안정한 LFG 알고리즘이 수렴할 수 있도록 적절한 α_3의 값을 더하면 그 알고리즘을 안정하게 할 뿐만 아니라 수렴 속도도 현저히 향상시킬 수 있다. $\alpha_1=1$인 불안정한 LFG 알고리즘에 $-0.875<\alpha_3<0$인 CFG 알고리즘을 적용하였을 때 학습곡선이 안정하였으며 $\alpha_3=-0.059$일때 수렴속도가 가장 빨랐다.

앞 장에서 기술된 안정도 조건을 만족하는 CFG 알고리즘에서 최적의 매개변수를 구하는 조직적인 방법은 아직 연구된 바 없으므로 위 안정도 조건을 만족하는 범위내에서 위 최적의 매개변수를 경험적(heuristic) 방법으로 찾아내어야 한다. 즉, III 장과 IV 장에서는 매개변수 α_1, α_2, α_3에 대한 안정도 조건 또는 안정한 범위를 해석적인 방법을 이용하여 기술하였고, 본 모의실험에서는 α_1 혹은 α_2가 주어졌을 때 최적의 α_3를 경험적 방법으로 구하여 보여 주었다.

Ⅳ. 結 論

스칼라 변수 α_1, α_2, α_3에 의하여 매개변수화된 제3차 필터화 경사도 알고리즘에 관하여 수렴 결과 및 구조를 살펴보았다. 평균 수렴 특성을 해석할 때 그 전이 행렬의 고유값이 복소수 혹은 실수가 될 수 있음을 살펴보았다. 수렴 특성을 해석할 때 본 알고리즘이 안정하기 위한 제한조건을 보여주었다. 이때 $\mu>(1+\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)/\lambda_1$에서는 본 알고리즘이 불안정함을 알 수 있었고, 그 결과는 컴퓨터 모의실험에서 증명되었다. α_1가 알고리즘의 수렴속도를 향상시킬 수 있는 반면, 誤調停量(misadjustment)이 증가하는 경우가 발생할 수 있다. 이 경우에는 알고리즘이 수렴상태에서 도달하기 전에 모멘텀 항을 제거하여 오조정량을 감소시킬 수 있다. 평균자승 수렴특성을 해석할 때 평균자승 순환식을 유도하고 초과 평균자승오차 및 오조정량을 살펴보고 본 알고리즘이 안정하기 위하여 고려되어야 할 필요조건에 대하여 알아보았다.

시스템 identification에 적용한 컴퓨터 모의실험에서는 제3차 필터화 경사도 알고리즘이 기존의 LMS 알고리즘, LFG 알고리즘 및 QFG 알고리즘보다 수렴속도에서 현저한 향상을 보여주었다. 그러나 단점

으로서 CFG 알고리즘의 계산량이 LMS, LFG, 및 QFG 알고리즘의 계산량에 비하여 증가함을 알 수 있었다. 또한 LFG 알고리즘이 불안정하거나 발산할 때에도, CFG 알고리즘을 적용할 경우 학습곡선이 안정하였으며 그 수렴속도가 가장 빨랐다. CFG 알고리즘의 탐색 경사도를 알아내기가 어렵기 때문에 유한한 입력 신호를 가진 각 반복순환에서 경사도가 불완전하게 추정되고 있고 이로 인하여 경사도 잡음이 발생하며 필터계수 변동에 기인하는 섭동을 포함하는 제 문제는 앞으로 연구되어야 할 것으로 사료된다.

參 考 文 獻

1. B.Widrow and S.D.Stearns, Adaptive Signal Processing, Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1985.
2. J.G.Proakis, "Channel identification for high speed digital commnications," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, pp.916-922, Dect. 1974.
3. J.R.Glover, Jr., "Comments on Channel identification for high speed digital communications," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-20, pp. 823, Dec. 1975.
4. J.G.Proakis, "Author's Reply," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-20, pp.823-824, Dec. 1975.
5. R.P.Lippmann, "An introduction to computing with neural nets," IEEE ASSP Mag., vol. 4, pp.4-22, Apr. 1987.
6. S.Roy and J.J.Shynk, "Analysis of the momentum LMS algorithm," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-38, pp. 2088-2098, Dec. 1990.
7. L.L.Horowitz and K.D.Senne, "Performance advantage of complex LMS for controlling narrow-band adaptive arrays," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-28, pp.562-576, June 1981.
8. A.Feuer and E.Weinstein, "Covergence analysis of LMS filters with uncorrelated Gaussian data," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-33, pp.222-230, Feb. 1985.
9. W. A. Gardner, "Learning characteristics of stochastic gradiant descent algorithms : A general study, analysis, and critique," Signal Processing, vol. 6, pp.113-133, 1984.
10. B.Widrow, P.E.Mantey, L.J.Griffiths, and B. B.Goode, "Adaptive Antenna Systems," Proc. IEEE vol.55, no.12, pp.2143-2159, Dec.1967.
11. B.Widrow, J.M.McCool, M.G.Larimore, and C.R.Johnson, Jr., "Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter," Proc. IEEE, vol.64, no.8, pp. 1151-1162, Aug. 1976.
12. E.I.Jury, Theory and Application of the Z-Transform Method, New York : Wiley, 1964.
13. S.H.Cho, "Convergence analysis for efficient adaptive digital filtering algorithms and structures," Ph. D. dissertation, University of Utah, August 1989.

金 海 正(Hae Jung Kim) 正會員
1960년 10월 26일생
1984년 : 경북대학교 전자공학과 졸업(학사)
1986년 : 한양대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사)
1990년~현재 : 한양대학교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중
※주관심분야 : 적응 필터, 신경망 이론, 디지틀 및 통계 신호처리, 프랙탈 이론, 의용 공학 등임

李 斗 秀(Doo Soo Lee) 正會員
1946년 7월 3일생
1968년 : 전북대학교 전자공학과 졸업(학사)
1970년 : 전북대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사)
1973년 : 전북대학교 대학원 전자공학과 졸업(박사)
1973년~1979년 : 전북대학교 전자공학과 조교수
1979년~현재 : 한양대학교 전자공학과 부교수
※주관심분야 : 디지틀 신호처리, 인공 지능, fuzzy 제어 이론, 카오스 이론, 원격 제어 시스템 등임