

◎ 論 文

비점성 대류 방정식의 계산을 위한 Hermite 3차 요소의 사용에 대한 고찰*

김진환**

(1993년 2월 9일 접수)

The Use of Hermite Cubic Element for Inviscid Convective Equations*

Jin-Whan Kim**

Key Words : Finite Element(유한요소), Computational Fluid Dynamics(전산 유체역학) Artificial Viscosity(인위적 점성), Shock Wave(충격파), Total Variation Diminishing method(총변위 감소법)

Abstract

The use of Hermite cubic element, as a possible finite element computation of transport equations containing shocks, has been investigated. In the present paper the hermite cubic elements are applied to both linear and nonlinear scalar one and two dimensional equations. In the one dimensional problems, numerical results by the hermite cubic element show better than those by the linear element, and the steady state solution by the hermite cubic element yields result with good resolution. This fact proves the superiority of the hermite cubic element in space differencing. In two dimensional case, the results by the hermite cubic element shows a boundary instability, and the use of higher order time differencing method may be necessary for fixing the problem.

1. 서 론

음속 이상으로 날으는 물체 주위의 운동 현상에 대한 연구는 컴퓨터의 발달과 더불어, 1970년대에 가속화 되었다. 1970년대에 주류를 이루었던

천음속 유동에 대한 유동 현상의 해석은 주로 포텐셜(potential) 방정식의 수치 근사해¹⁾를 기초로 하였으며, 이러한 경험을 토대로 1980년대에는 비점성 오일러(Inviscid Euler) 방정식과 Navier-Stokes 방정식의 계산이 활발하였다. 이러한 유동 계산에서의 어려움은 유동장내에 존재하는 충격

* 본 연구는 1991년도 교육부 지원 한국 학술진흥 재단 자유 공모(지방대학육성) 과제 학술 연구 조성 기금에 의하여 수행되었습.

** 동의대학교 기계 설계 공학과

파(shock wave)의 포착에 있다. 충격파라는 수학적 불 연속선(혹은 면)을 수치 계산에서 적절히 다루어 주지 못하면 잘 알려진 Gibb's 현상을 유발하며, 여기에서 파생되는 오차는 계산 영역 전체로 전파되어 심하면 계산상의 불 안정성을 야기시켜 해의 수렴을 느리게 하거나 수렴시키지 않는다. 이러한 문제의 해결은 전산 유체 역학(CFD) 분야의 주요 당면 과제이며, 거의 대부분 유한 차분법(FDM)을 통하여 연구하고 있다.

유한 요소법(FEM)의 일계 쌍곡선 편미분 방정식(First Order Hyperbolic PDE)에 대한 타당성 연구는 Dendy⁴⁾의 변형 하중 함수(Perturbed Test function) 적용에 대한 L-2 공간에서의 수렴 이론의 확립으로부터 시작되었다고 볼 수 있으며, 실제 적용의 이론 예는 Hughes⁵⁾의 상류 하중 갈러킨 적분법(Streamline Upwind Petrov Galerkin)을 들 수 있다. Lax-Wendroff 방법의 시간항과 공간항의 교환을 이용한 시간차분에 대한 테일러(Taylor) 급수의 전개로부터 Donea⁶⁾는 테일러 급수의 3차항을 갈러킨 적분식(Galerkin Weak Form)에 흡수시킬 수가 있었으며, 이러한 테일러 급수의 전개로부터 Baker와 Kim¹⁻²⁾은 여러 형태의 인위적 점성(Artificial Viscosity) 방법들에 대한 푸리에(Fourier) 안정성을 살펴보았다. 그러나 계산 방법의 안정성 특히 푸리에(Fourier) 안정성은 해의 정확도와 수렴성을 보증하지 않으며, 불연속선 혹은 불연속면이 해의 일부로서 구해져야 한다면 그 주위에 해의 진동(wiggle) 현상이 나타남은 잘 알려진 사실이다. 이의 해결로써 총변위 감소법⁷⁾(Total Variation Diminishing Method 혹은 TVD)을 도입하거나 혹은 격자 구조를 바꾸어 나가는 적응적 체눈 세분화(Adaptive mesh refinement)법을 들 수 있다. 특히 총변위 감소(TVD) 개념의 유한 요소법에의 도입은 요소의 독립적인 성격 때문에 어려움이 있으며, 따라서 적응적 체눈세분화 방법이 주로 사용되고 있다.⁹⁾ 유한 차분법에서 쓰이는 총 변위 감소(TVD) 방법들은 절점 주위의 정보들로서 그 절점에 대한 해의 구배(Slope)를 결정하여 Flux 제한자(Limiter)라는 비선형적 계수를 만들어 인위적으로 점성항을 조절하는 방법으로 이해한다면, 결국 유한

요소법의 관점에서는 국부적으로 C-1 요소를 사용하여 구배(Slope) 변수를 결정한 방법이라 볼 수 있다.

Leonard¹¹⁾에 의하면, 기존의 총변위 감소법에 의한 비점성 대류 방정식의 해는 Flux 제한자의 상류측(Upstream) 정보 의존에 의하여, 궁극적으로 해의 상류 방향으로의 기울어짐(skewness)을 보이며 Sine-squared 혹은 반타원형(semi-ellipse)과 같은 초기조건에 대하여는 상당량의 감쇠 현상까지 보이고 있다. 이에 Leonard는 고차(3차이상)의 차분법과 새로운 Flux 제한자의 고안으로 총변위 감소법의 결점들을 극복할 수 있었다. Demkowicz⁹⁾는 H-P 유한 요소법의 개발로써 고차 요소의 사용으로 계층적(Hierarchical) 요소를 검토하였으며, Demkowicz와 3인¹⁰⁾은 압축성 Euler 방정식의 계산에 계층적 요소의 사용 결과를 보고하였다. 이와같이 고차 요소의 사용에 대한 연구는 활발하며, 필자는 유한 요소를 사용한 충격파 포착 기법의 개발을 위하여 C-1 요소의 사용에 대하여 검토하고자 하며 Serendipity Hermite 3차 요소¹²⁾를 선택하여 계산을 수행하였다.

2. 유한 요소법의 적용

2.1 계산 모델 설정

스칼라(Scalar) u에 대한 보존형의 쌍곡선 편미분 방정식은 아래와 같이 쓸수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

여기서, $a_i = df_i/du$ 이며 Flux vector f_i 의 jacobian이라 한다. $u(x, t)$ 를 시간 t 에 대하여 테일러 급수로 전개하고 식 (1)을 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \dots \\ &= u^n - \Delta t \frac{\partial f_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^n \frac{\Delta f_i^n}{\partial x_i} + \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

위의 식 (2)에서 첨자 n 은 시간 t 가 $n\Delta t$ 임을 나타내며, 따라서 u_n 은 $u(x, n\Delta t)$ 를 표시한다. 위

의 식에 test function을 내적하면 잘 알려진 Taylor Galerkin 방법이 된다. 여기서 인위적 점성항을 고려하여 식 (2)를 다음과 같이 바꾸어 쓴다. 즉,

$$u^{n+1} - u^n = -\Delta t \frac{\partial f_i^n}{\partial x_i} + \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \beta \Delta x_i \frac{\Delta f_i^n}{\partial x_i} \dots \quad (3)$$

여기서 $\beta = (a_i \Delta t) / 2 \Delta x_i$ 이면 Taylor Galerkin 방법이 된다.

2.2 유한 요소 계산

계산하고자 하는 영역 Ω 에 대하여 적당한 함수 (test function) ψ 를 선택하여, 식 (3)와 내적하면 가중잔여법(Weighted Residual method)에 의한 포괄적인 식을 얻는다. 영역 Ω 를 임의의 요소 Ω_e 로 분할하고 각 요소에 가중잔여법을 적용하면 갈러킨(Galerkin) 방법이 된다. 유한 요소법에서는 Ω_e 내에서 체계화된 형상 함수(shape function)를 갈러킨 방법에 적용하면, test function ψ 가 해의 보간 함수(trial function)와 다르면 Petrov Galerkin 방법이라고 부른다. 본 연구에서는 점성항을 시간에 대한 차분시 이미 첨가하였으므로 별도의 test function을 고안할 필요는 없다. 따라서 요소의 형상 함수를 Φ 라 하면 식 (3)을 통한 유한 요소 계산 식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega_e} \Phi (u^{n+1} - u^n) dx \\ &= \Delta t \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} f_i^n dx - \Delta t \int_{\Omega_e} \beta \Delta x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f_i^n}{\partial x_i} dx \\ & - \Delta t \int_{\partial \Omega_e} \Phi f_i^n n_i d\sigma + \Delta t \int_{\partial \Omega_e} \beta \Delta x_i n_i \Phi \frac{\partial f_i^n}{\partial x_i} d\sigma \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

여기서 n_i 는 요소 경계에서 외부로 향하는 법선 단위 벡터이다. 식 (4)의 마지막 항은 인위적 감쇠항에 대한 부분 적분에서 나온 것으로 물리적인 의미가 없기 때문에 실제 계산에는 사용되지 않았다. 또한 2차원 문제의 경우, 좌변(mass mat-

rix)에 대한 역행렬 계산을 피하기 위하여 Mass Lumping 방법을 사용하였다.

3. 계산 결과 및 고찰

3.1 일차원 선형 문제

다음과 같은 일차원 선형 문제의 수치 실험을 앞에서 유도한 방법에 의하여 하여 보았다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1 \\ & u(x, 0) = 1, \text{ for } 0 \leq x \leq 0.2 \\ & \quad 0, \text{ otherwise.} \\ & u(0, t) = 1. \end{aligned}$$

Fig. 1에서 Fig. 4까지의 결과는, 불 연속선이 $x=0.5$ 에 오도록 $\Delta t=0.002$ 로 하여 150번 수행했을 때의 수치 해이며, 감쇠(Damping) 계수를 사용할 경우에는 $\beta=0.1$ 로 하였다. 요소의 수는 선형 요소의 경우는 50이며, 기타는 25로 하였다. 선형 요소(Fig. 1)와 고차 요소(Fig. 2, 3, 4)에 의한 결과들을 비교하면, 고차 요소를 사용할 경우에는 감쇠 효과가 많음을 알 수 있으며, 적당한 감쇠 계수와 함께 고차 요소를 사용할 경우 수치적 안정성을 유지할 수 있음을 보여주고 있다.

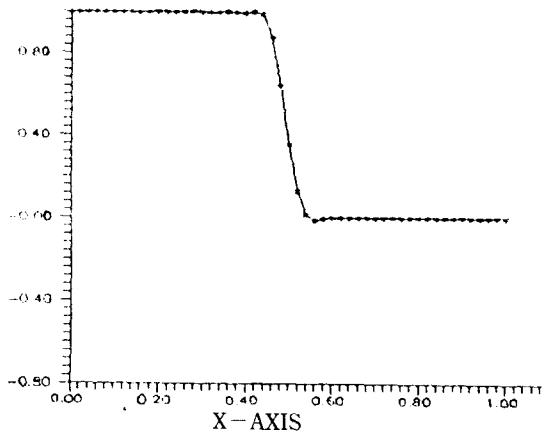


Fig. 1. Linear element solution with $\beta=0.1$ for linear step problem.

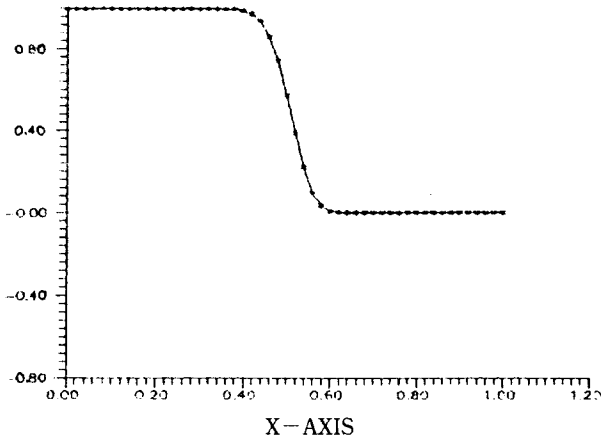


Fig. 2. Quadratic element solution with $\beta=0.1$ for linear step problem.

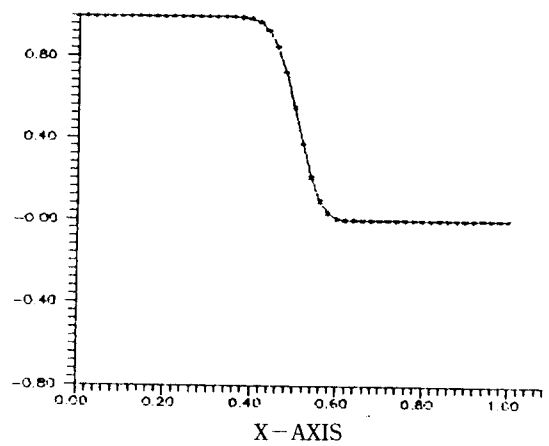


Fig. 3. Cubic element solution with $\beta=0.1$ for linear step problem.

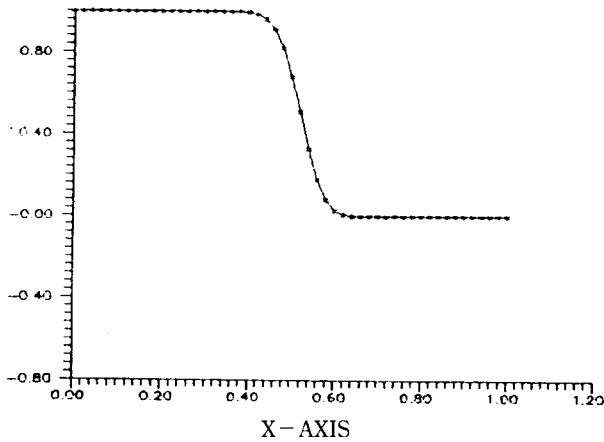


Fig. 4. Hermite cubic element solution with $\beta=0.1$ for linear step problem.

3. 2 일차원 비선형 문제

일차원 비선형 문제에 대한 수치 실험은 다음과 같은 Burgers 방정식을 사용하여 진행하는 파동과 정지한 파동에 대하여 수행하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

진행하는 파동에 대한 경계 조건, 초기 조건 및 요소의 수는 일차원 선형 문제의 경우와 동일하며 감쇠계수 β 를 0.5와 0.2로하여 선형 요소와 Hermite 3차 요소에 대한 결과들을 Fig. 5에서

Fig. 8 까지 나타내었다. 감쇠 계수가 0.5인 경우, 선형 요소와 Hermite 3차 요소의 수치해는 Fig. 5와 Fig. 7에 나타내었고, 감쇠 계수가 0.2인 경우는 Fig. 6과 Fig. 8에 나타내었다. 진행하는 파동의 문제에 있어서는 감쇠 계수를 0.5로 한 선형 요소의 수치해가 가장 좋은 결과를 보여주고 있으며, Fig. 6과 Fig. 8에는 감쇠 계수 β 를 0.2로 줄일 경우 오차가 충격파 주위로 전달됨을 보여주고 있다. 이는 공간 차분에 있어서 감쇠 계수량의 조절이 필요함과 시간 차분에 있어서의 정확도가 결핍된 때문이라 보겠다. 특히 고차 요소에서의 공통된 문제점은 Δt 의 크기에 따라 안정성의 변화가 심하다는 것이 실험을 통해 확인되었다. 정지한 파동에 대한 초기 조건은 $u=1.0$ for $0 < x < 0.5$ 와 $u=-1.0$ for $0.5 < x < 1.0$ 이며, 경계 조건은 $u(x=0)=1.0$ 과 $u(x=1)=-1.0$ 이다. 정지한 파동의 포착에 대한 결과는 Fig. 9에서 Fig. 12 까지로서, Fig. 9와 Fig. 10은 선형 요소의 결과이며 전자는 $\beta=0.1$ 이며 후자는 $\beta=0.5$ 를 사용하였다. Fig. 9에서 $\beta=0.1$ 은 정지파의 전후로 $2\Delta x$ wiggle이 전파됨을 보여주고 있으며, $\beta=0.5$ 의 경우(Fig. 10)에는 약간의 wiggle이 나타남을 보여준다. 이에 반하여 Lagrangian 3차 요소의 경우(Fig. 11)와 Hermite 3차 요소의 경우(Fig. 12)에는 정지파 주위에 wiggle 현상이 나타나지 않으며 만족스러운 결과를 보여 주고 있다.

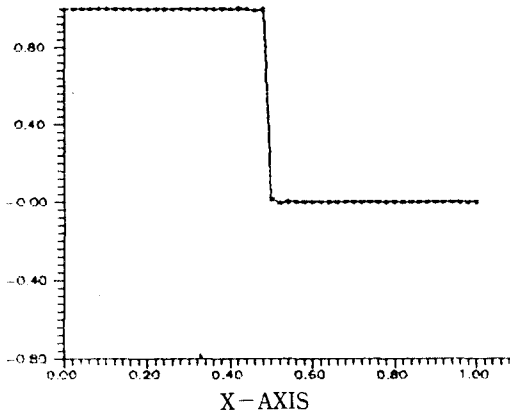


Fig. 5. Linear element solution with $\beta=0.5$ for non-linear step problem.

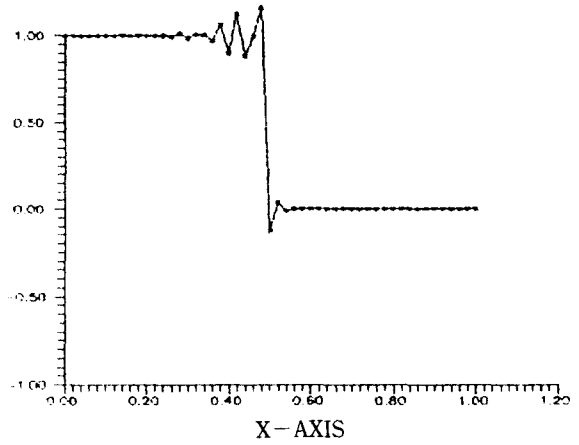


Fig. 6. Linear element solution with $\beta=0.2$ for non-linear step problem.

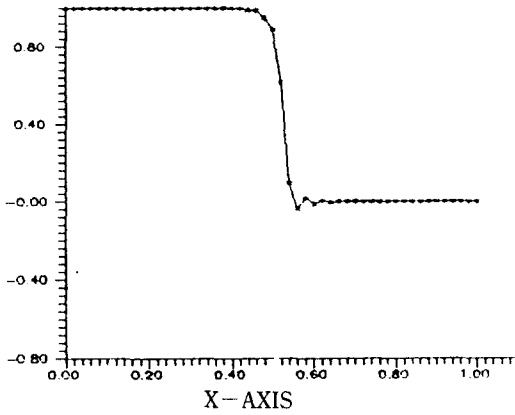


Fig. 7. Hermite cubic element solution with $\beta=0.5$ for nonlinear step problem.

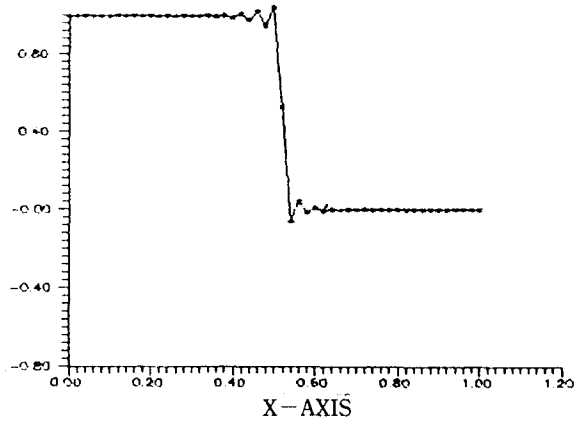


Fig. 8. Hermite cubic element solution with $\beta=0.2$ for nonlinear step problem.

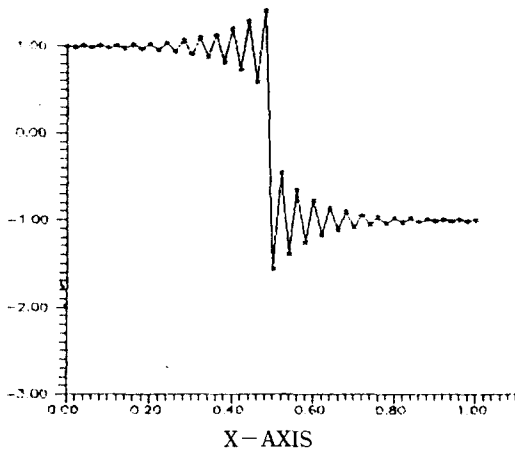


Fig. 9. Linear element solution with $\beta=0.1$ for non-linear steady shock problem.

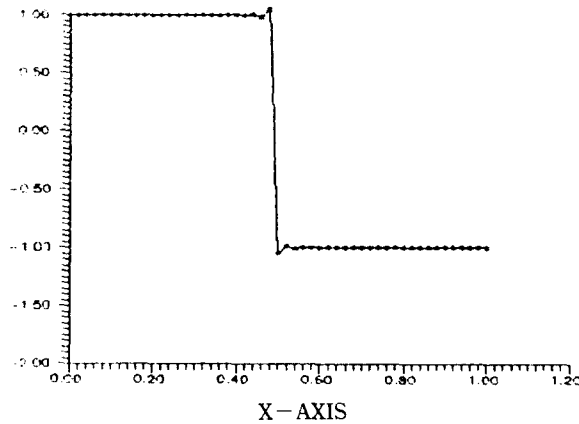


Fig. 10. Linear element solution with $\beta=0.5$ for non-linear steady shock problem.

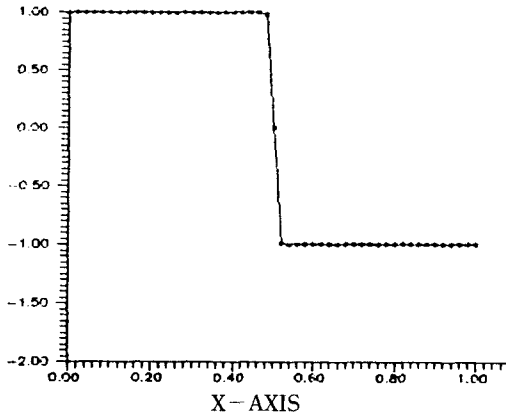


Fig. 11. Cubic element solution with $\beta=0.25$ for nonlinear steady shock problem.

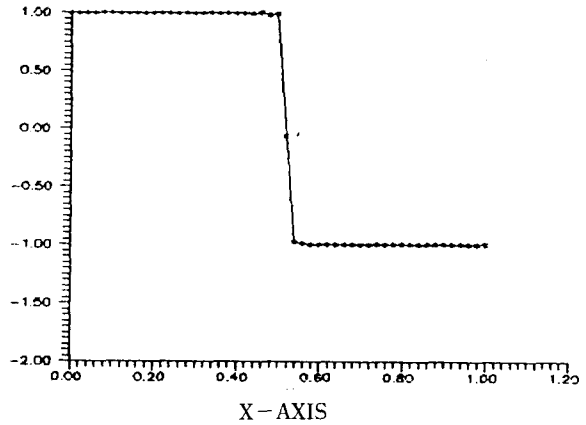


Fig. 12. Hermite element solution with $\beta=0.5$ for nonlinear steady shock problem.

3.3 이차원 선형 문제

선형 이차원 문제에 대한 수치 해석을 위하여 아래와 같은 식을 생각하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.3 \frac{\partial u}{\partial x} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

아래와 같은 초기 조건을 설정하여,

$$u(x, 0) = 2.0 \text{ for } 0 \leq x \leq 0.2, 0 \leq y \leq 0.2 \\ = -1.0 \text{ elsewhere}$$

두개의 파(x 방향 및 y 방향)가 진행하며 서로 충돌할 때의 결과를 보고자 하였다. 요소의 수는 각 방향으로 각각 20개로 하고 점성 계수 β 는 0.1로 하였다. Fig. 13과 Fig. 14는 $\Delta t=0.005$ 로 하여 200 time step을 수행했을 때의 결과로서, Fig. 13은 선형요소, Fig. 14는 Hermite 요소를 사용한 경우의 결과이다. 두개의 파가 서로 교차하면서 진행할 경우의 수치 결과는 심한 wiggle을 보이고 있으며, 아직 만족스러운 해를 주지 못하고 있다.

3.4 이차원 비선형 문제

비선형 문제에 대하여는 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.3u \frac{\partial u}{\partial x} + 0.1u \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

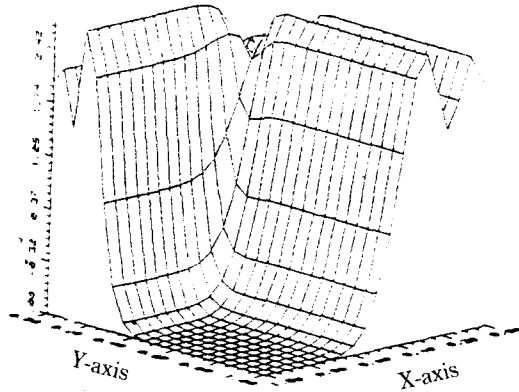


Fig. 13. Linear element solution with $\beta=0.1$ for 2-D linear problem.

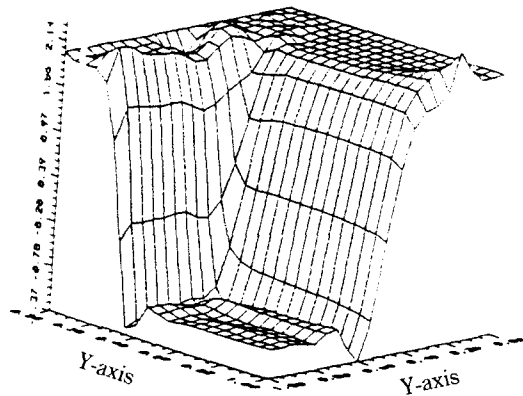


Fig. 14. Hermite cubic element solution with $\beta=0.1$ for 2-D linear problem.

전체 요소의 수는 400으로 선형 문제의 경우와 같으며, 점성 계수 β 는 0.5로 하였다. 선형 요소의 결과는 Fig. 15, Hermite 요소의 결과는 Fig. 16에 보였으며, 두 결과들은 비선형 충격파의 충돌로 인한 수치 오차의 전파로 인하여 심한 wiggle을 피할 수 없었다. 특히 Hermite 요소의 경우에는 시간 간격에 따른 수치적 불안정성이 심하며 $\Delta t = 0.0025$ 로 하여 200 time step을 수행한 결과이다.

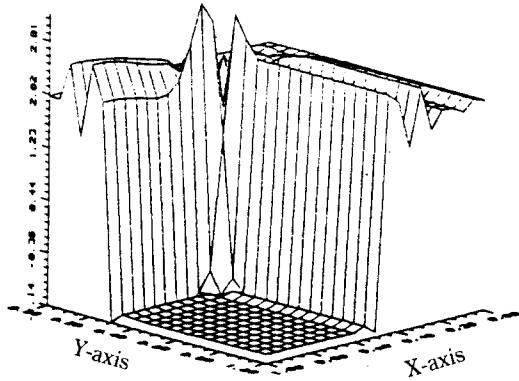


Fig. 15. Linear element solution with $\beta=0.5$ for 2-D nonlinear problem.

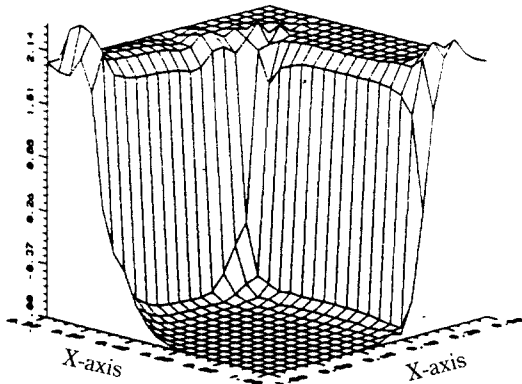


Fig. 16. Hermite cubic element solution with $\beta=0.5$ for 2-D nonlinear problem.

4. 결 론

충격파 포착을 위한 유한 요소법의 개발을 위하여 Hermite 3차 요소의 유용성에 대하여 알아보았으며, 수치 실험을 통하여 다음과 같은 3가지 사항을 지적하고자 한다.

(1) 정상 상태의 경우

Fig. 12에 나타난 Hermite 요소의 충격파 포착은 고 해상도적인 해라 말할 수 있으며 Hermite 요소의 중요성을 높이고 있다. 정상 상태의 해를 구함에는 시간 차분 방법보다는 공간 차분법에 의존하기 때문이다.

(2) 비정상 상태의 경우

고차 요소의 수치해는 시간 차분의 오차에 대하여 상당히 민감하며 고차의 시간 차분법이 병행해야 되리라 본다.

(3) 경계 조건

2차원 Hermite 요소의 결과(Fig. 14, 16)에서 나타난 바와는 경계에서 불안정성을 보여준다. 따라서 Hermite 요소의 사용에 대한 안정된 경계 조건 실행 방법도 연구되어야 한다.

필자는 본 연구에서 Serendipity Hermite 3차 요소의 충격파 포착 능력에 대하여 알아보았으며, 이 요소의 또 다른 매력은 선형 요소에 대한 격자 구조를 Hermite 3차 요소에도 사용할 수 있다는 것이다. 즉, Hermite 3차 요소는 선형 요소와는 혼합하여 사용할 수 있으므로, C-1 요소의 사용이 긍정적이라고 평가되면 그 진가를 발휘할 수 있을 것이다.

5. 참고문헌

- 1) Baker, A.J. and Kim, J.W., "Analysis on a Taylor Weak Statement for CFD Application", Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Springer, Berlin, Heidelberg, 1986.
- 2) Baker, A.J. and Kim, J.W., "A Taylor Weak Statement for Hyperbolic Conservation

- Laws", *Int. J. Num. Mtd. in Fluid*, Vol. 7, pp. 489-520, 1987.
- 3) Baker, A.J., Kim, J.W., Freels, J.D. and Orzechowski, J.A., "On a Finite Element CFD Algorithm for Compressible, Viscous and Turbulent Aerodynamic flows", *Finite Elements in Fluids*, Vol. 7, pp. 247-271, John Wiley & Sons Ltd., 1987.
 - 4) Dendy, J.E., "Two methods of Galerkin type optimum L-2 rates of Convergence for First Order Hyperbolic", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 11, pp. 637-653, 1974.
 - 5) Donea, J., "A Taylor-Galerkin method for Convective transport problems", *Int. J. Num. Mtd. Eng.*, Vol. 20, pp. 101-120, 1984.
 - 6) Hafez, M.M., South, J.C. and Murman, E.M., "Artificial Compressibility methods for Numerical Solution of Transonic Full Potential Equation", *AIAA J.*, Vol. 17, pp. 838-844, 1979.
 - 7) Harten, A., "High Resolution Schemes for hyperbolic Conservation Laws", *J. Comp. Phys.*, Vol. 49, pp. 357-393, 1983.
 - 8) Hughes, T.J.R. and Brooks, A., "A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind diffusion", *AMD Vol. 34*, pp. 19-35, 1979.
 - 9) L. Demkowicz, "An Adaptive h-p Finite Element Strategy for Two dimensional Boundary Value Problems : Theory manual", COMCO, Austin, Texas, U.S.A., 1989.
 - 10) L. Demkowicz, J.T. Oden, W. Rachowicz and O. Hardy, "An h-p Taylor-Galerkin finite element method for compressible Euler Equations", *Comp. Mtd. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 88, pp. 363-396, 1991.
 - 11) B.P. Leonard, "The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection", *Comp. Mtd. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 88, pp. 17-74, 1991.
 - 12) L. Lapidus and G.F. Pinder, "Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering", John Wiley & Sons, Inc., pp. 80-85, 1982.