

◎ 論 文

해저 파문에서의 입자의 라그랑지적 혼돈 및 확산

김 현 민* · 서 용 권**

(1992년 12월 4일 접수)

Lagrangian Chaos and Dispersion of Passive Particles on the Ripple Bed

Hyeun-Mihn Kim* · Yong-Kweon Suh**

Key Words : diffusion(확산), Hamiltonian system(하밀톤 계), chaos(혼돈), Poincaré map(푸앵카레 사상), unstable manifolds(불안정 다양체), Liapunov exponent(라푸노프 지수)

Abstract

The dispersion in the oscillatory flow generated by gravitational waves above the spatially periodic ripples is studied. The steady parts of equations describing the orbit of the passive particle in a two dimensional field are assumed to be simply trigonometric functions. From the view point of nonlinear dynamics, the motion of the particle is chaotic under externally time-periodic perturbations which come from the wave motion. Two cases considered here are : (i) shallow water, and (ii) deep water approximation.

기 호 설 명

D : 확산계수, <식 (12)>
 Dn : 비정상 확산계수, <식 (11)>
 do : 두입자 사이의 초기거리, <식 (8)>
 dn : 두입자 사이의 거리, <식 (8)>
 Fn : 지수값, <식 (8)>
 S : 혼돈영역의 넓이 (%)

t : 시간
 T : 주기(period of time)
 u : x방향 속도성분
 v : y방향 속도성분
 x : 수평 좌표
 xo : 입자의 x방향 초기위치
 xn : 입자의 x방향 위치
 y : 수직 좌표
 ψ : 유선함수(stream function)

* 동아대학교 대학원

** 동아대학교 기계공학과

- ε : 섭동의 크기
- ω : 진동수 (frequency)
- λ : Liapunov exponent
- λ_M : 국소(local) Liapunov exponent

보여준다.

2. 모형화 및 수치해석

1. 서 론

해양오염은 환경파괴의 주요 인자이다. 해양 바닥에 가라앉은 오염물질을 근본적으로 제거하는 문제와는 별도로, 파동(wave)에 의해 그것이 자동적으로 확산될 수가 있다. 파문(ripple)으로 덮혀진 해저(sea bottom)에서 표면의 중력파에 의한 물의 수평방향 요동운동은 와류(vortices)를 발생시킨다. 이러한 유동장은 해저 침전물을 부유시켜 멀리까지 확산시키는 작용을 한다. 파문 주위의 유동장을 살펴보면 모서리(crest)에서 발생된 와류로 인해 정상유동성분이 존재하며 이러한 정상유동은 파문의 주기적 형상으로 인해 다분히 순환적이다. 이에 파동에 의한 요동운동이 가세하면 Taylor와류와 같은 효과를 보여 줄 것이다.¹⁾

Lagrange적 관점에서 보면 층류유동하는 유체 입자는 계의 운동방정식이 결정론적(deterministic)이라도 초기조건에 지수적으로 민감하여 혼돈적(chaotic)일 수 있다. 즉 상미분방정식(ODE)의 형태가 단순하지만 입자의 경로가 혼돈적이므로 이러한 혼돈적 대류(chaotic advection)를 라그랑지적 난류(Lagrangian turbulence)라고도 하며 이는 보통 흔히 말하는 난류유동(turbulent flow)과는 구분된다. 혼돈적 대류현상은 자연적으로나 기술적으로 중요하며 Cox, Drazin & Ryrie²⁾와 Ryrie³⁾는 최근에 혼돈이론을 확산현상에 적용한 바 있고, Broomhead & Ryrie⁴⁾는 Taylor와류에서의 혼돈적 교반을 연구한 바 있다.

본 연구에서는 해저부근에서의 이러한 확산효과를 보기위하여, 해양유동을 단순화하여 최근 널리 이용되고 있는 혼돈이론을 가미시켰다. 아주 단순한 유동이라도 복잡한 입자의 궤적을 나타내며 입자의 확산과 연관됨을 수치해석을 이용하여

해석을 쉽게하기 위해, 파문이 정상유동을 만들어내는 효과외에는 해저면과 해수면을 평면으로 취급하고 유동은 2차원 비압축성으로 가정한다. x 를 수평방향, y 를 수직방향의 좌표로 잡고 속도장은 x 방향으로만 주기적으로 변한다고 가정한다. Poincaré-Bendixson 정리에 의해 2차원 정상유동(steady flow)은 혼돈적인 해를 보이지 않으므로, 파동운동에 해당하는 섭동항 $\psi_p = \varepsilon y \sin\omega t$ 를 순환유동에 해당하는 정상상태의 항 ψ_s 에 중첩시킨다. 비정상 유선함수가

$$\psi = \psi_s(x, y) + \psi_p(x, y, t) \dots\dots\dots (1)$$

와 같이 정의될 때, 유동의 속도성분은 각각 아래와 같다.

$$u = dx/dt = \frac{\partial\psi}{\partial y} \dots\dots\dots (2)$$

$$v = dy/dt = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \dots\dots\dots (3)$$

이때 (2), (3) 식의 우측항은 Euler적 속도장(Eulerian velocity field)이며 이 식들은 유체입자의 운동을 기술하는 방정식으로서, 다른 한편으로는 비자율적인 동역학적 계(nonautonomous dynamical system)로 생각할 수 있다.

수심과 파문의 파장의 비에 따라 천해(shallow water)와 심해(deep water)의 두가지의 경우를 나누어서 고려한다.

2.1 천해의 경우

천해에서는 Taylor 와류와 비슷한 아래와 같은 무차원 운동방정식을 고려한다.

$$dx/dt = \sin\pi x \cos\pi y + \varepsilon \sin\omega t \dots\dots\dots (4)$$

$$dy/dt = -\cos\pi x \sin\pi y \dots\dots\dots (5)$$

여기서 첫항은 정상류를, (4)식의 둘째항은 파동에 의한 요동을 나타낸다.

2.2 심해의 경우

심해에서는 해저면에서의 와류에 의한 정상유동이 해수면까지 영향을 미치기 어렵다. 따라서 아래와 같이 지수적 성질이 있는 속도장을 가정한다.

$$dx/dt = (1-ky) e^{ky} \sin \pi x + \varepsilon \sin \omega t \dots\dots (6)$$

$$dy/dt = -\pi y e^{ky} \cos \pi x \dots\dots\dots (7)$$

여기서도 첫항은 정상류를, (6)식의 둘째항은 파동에 의한 요동을 나타낸다. 그리고 k 는 해저면에서의 정상류가 해수면쪽으로 영향을 미치는 정도를 나타내는데 편의상 2로 한다.

2.3 수치해석

식 (4), (5)와 (6), (7)은 각각 연립 1계 상미분방정식이며 소산(dissipation)이 없으므로 Hamilton 계(Hamiltonian system)이다. 이때 유선함수는 Hamiltonian이 된다. 그러나, 식(4)와 (6)에서 보는 것처럼 비정상 속도성분이 존재하므로 입자의 경로를 구하기 위해서는 수치해석에 의존할 수밖에 없다. ε 은 정상유동에 대한 요동운동의 크기의 비를 나타내는데 ε 이 크면 요동운동의 효과가 더 크다. Taylor 와류의 문제에서는 일반적으로 ε 값이 작는데 본 연구의 경우는 일반적으로 크다고 볼 수 있다. 왜냐하면, 해양유동에서는 파동의 운동이 파문의 진폭에 비해 비교적 크다. 여기서는 $0.1 \leq \varepsilon \leq 3$ 의 범위로 한다. T 는 주기로서 $2\pi/\omega$ 이며 1, 2, 3 및 4으로 한다. 위의 방정식들은 초기치 문제로서 4계 Runge-Kutta 법으로 적분하였으며 시간증분은 0.05로 하였다.

3. 결과 및 고찰

3.1 뿌앵가레 사상(Poincaré map)

시간의 변화에 따른 유체입자의 궤적(orbit)을 나타낼 때 Poincaré 사상(map)을 사용하면 위상공간(phase space)에서 차원의 수를 하나 줄일 수 있다. 본 문제에서 Poincaré 사상은 매 주기마다의 입자의 위치를 점으로 나타내 $-1 \leq x \leq 1$ 을 벗

어난 입자는 계속 $x = 2$ 만큼씩 평행이동 시켜 공간적으로 이 범위 안에만 나타나도록 하여 만든다.

Figure 1, 2는 몇가지 매개변수에 대한 Poincaré 사상을 나타낸다. 점이 조밀하게 분포된 영역은 혼돈적 특성을 나타내며 교반과 확산이 활발함을 의미하는 반면, 점이 존재하지 않는 영역이나 분포밀도가 적은 영역은 정규영역(regular region or nonchaotic region)이며 혼합이 잘 일어나지 않으며 입자의 확산이 어려운 영역이다.⁵⁾ Figure 1은 천해의 경우를 보이고 있다. Figure 1(a)에서 정규영역내부에 폐곡선군이 존재한다. 이의 바깥에는 다시 부분적으로 파괴된 3개의 단일 폐곡선으로 둘러싸인 정규영역이 존재하며 이것은 Figure 1(b)에서 연결부가 3개의 안장점(saddle point)을 형성한다. (c)에서는 이 안장점이 외부의 혼돈영역으로 흡입되면서 섬(island)이라 불리우는 3개의 정규영역으로 나뉘어서 주 혼돈영역의 주위에 존재한다. 주 정규영역(main regular region)의 내부는 각각 주기가 1인 주기적인 중심점 주위에 준주기적인(quasiperiodic) 궤적에 해당하는 폐곡선들로 구성된다. 외부에 있는 3개의 정규영역도 각각 분리된 폐곡선으로 되어 있으며 얇다. 이 모든 정규영역 가까이에는 불안정한 쌍곡선형 고정점(unstable hyperbolic fixed point)을 가지는 separatrix가 존재한다. (c)에서 주 혼돈영역 외부에 3개의 작은 정규영역이 생기면서 원래의 주 정규영역은 축소된다. (d)에서 이 3개의 정규영역도 주 혼돈영역으로 흡수되기 때문에 혼돈영역의 면적이 급격히 증가하며 이때 경계부도 변화한다. Figure 1(d)에서 혼돈영역과 정규영역의 경계부분은 KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 곡선(curve)이라고 하며 혼합에 대한 완전한 장벽을 이룬다. 이러한 KAM곡선이 (d)에서만 진하게 나타난것은 입자의 초기위치에 따라 우연적으로 이루어진 것이다. (e)에서 혼돈특성이 증가할수록 이 영역이 파괴되면서 주위의 혼돈영역과 융합(merging)이 일어난다. KAM 정리에 의하면 ε 이 작을 때는 주기의 비가 무리수인(irrational) 토러스(torus; 해의 궤적이 위상공간에서 만드는 곡면을 지칭함)의 대부분이 보존되어져서 입자의

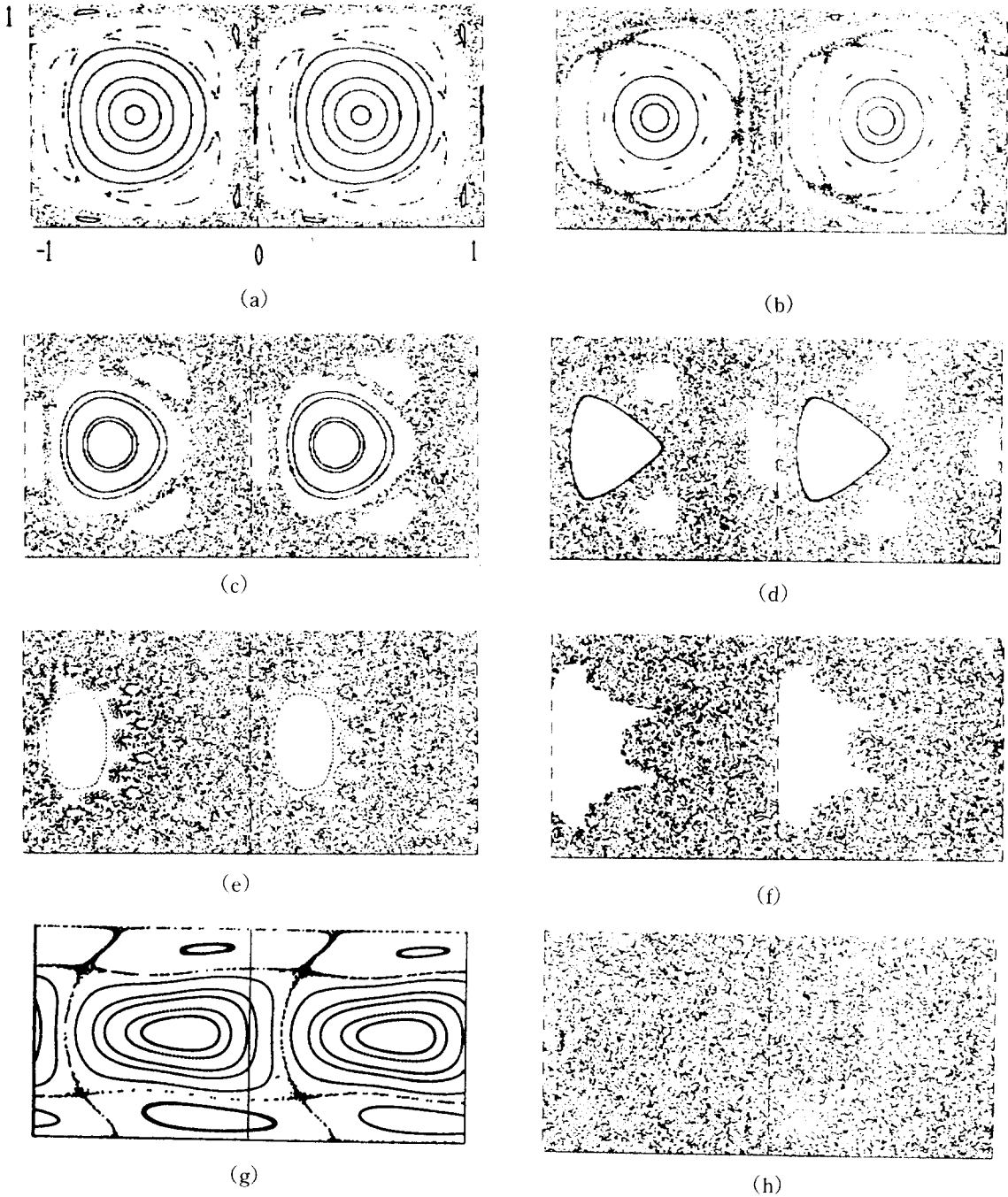


Figure 1. Poincaré maps during 10,000 periods in shallow water. (a) $T=1, \varepsilon=0.2$; (b) $T=1, \varepsilon=0.3$; (c) $T=1, \varepsilon=0.6$; (d) $T=1, \varepsilon=1.3$; (e) $T=2, \varepsilon=0.3$; (f) $T=2, \varepsilon=0.6$; (g) $T=2, \varepsilon=2.4$; (h) $T=4, \varepsilon=1.3$.

경로를 완전히 국한시키나, ϵ 이 증가하면 공진하는 유리수의(rational) 토러스는 파괴되어 유한개의 점들로 변한다. 이러한 heteroclinic orbit의 파괴에 의해 형성된 얇은 혼돈영역을 추계 층(stochastic layer)이라 한다. 이것은 Cantor 집합을 이루며 혼합에 대한 부분적인 장벽을 이루며, 이 파괴된 KAM torus를 Cantorus라 한다.

Figure 1(e)-(f)는 주기가 2인 경우인데 주기

가 1인 (a)-(d)에 비해 더 혼돈적임을 나타낸다. 정규영역 내의 추계층의 성장과 수축은 주혼돈영역 가까이에서는 급격하다. $\epsilon = 2.4$ 에서는 오히려 혼돈영역이 (g)에서와 같이 급격히 감소한다. 6개의 타원형 고정점과 6개의 쌍곡형의 고정점이 나타나 있다. 주기가 4의 경우인 (h)는 위상면 전체가 거의 혼돈상태임을 보여 준다.

Figure 2는 심해의 경우를 보이고 있다. Figure

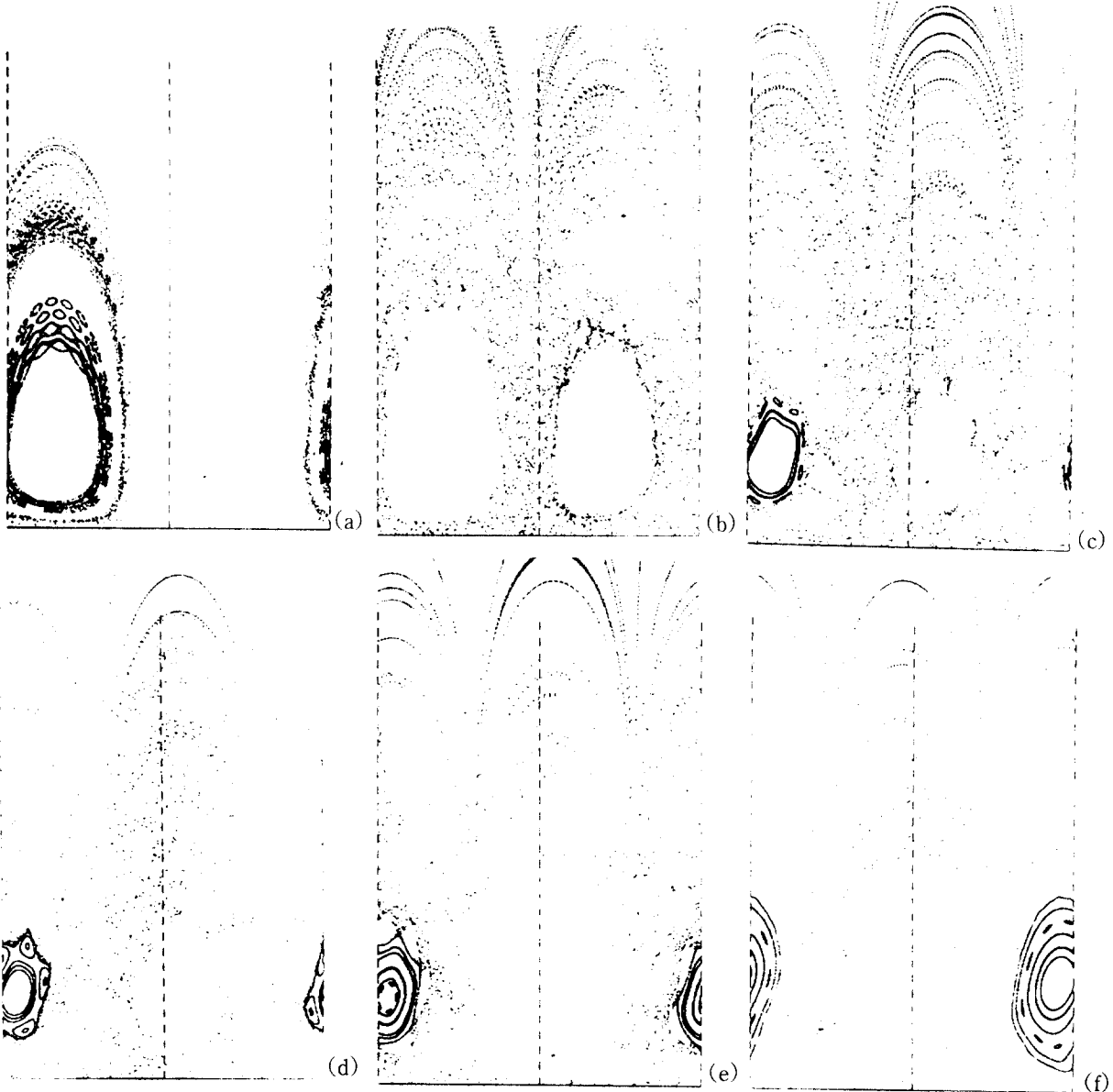


Figure 2. Poincaré maps during 10,000 periods in deep water. (a) $T=1, \epsilon=1.3$; (b) $T=2, \epsilon=0.3$; (c) $T=2, \epsilon=1$; (d) $T=2, \epsilon=1.2$; (e) $T=2, \epsilon=1.3$; (f) $T=3, \epsilon=1.2$.

2(a)에서 정규영역 내부에는 소규모의 추계층이 많이 존재하는데 이러한 것들은 T 와 ε 을 변화시키면 주혼돈영역에 흡수되어 사라질 수 있다. (b)는 T 와 ε 이 동시에 변화한 경우에 대하여 추계층이 사라진 양상을 보인다. (c), (d), (e)는 ε 의 증가에 따른 정규영역 내부의 구조적 변화를 보여준다. 주기가 증가하면 오히려 (f)와 같이 정규영역이 더 커질 수 있다. 혼돈영역에 의해 포위된 작은 정규영역은 실제로는 인접한 혼돈영역으로 쉽게 확산된다. 주기가 증가함에 따라 혼돈영역의 넓이도 변화한다. 혼돈의 면적이 국부적으로 급격히 증가하는 것은 가장 큰 KAM 곡선근처의 얇은 추계적인 층이 주 혼돈영역에 흡수되기 때문이다.

3.2 불안정 다양체(unstable manifold)

가시화를 통해 볼 수 있는 물감의 경로인 유맥선(streakline)을 그려본 결과 시간이 지남에 따라 궤적의 초기위치에 관계없이 불안정 다양체(unstable manifold)를 접근적으로 따라간다. 혼돈 영역에 위치한 입자는 급격히 변형되어 불안정 다양체로 되는 경향이 있다. 불안정 다양체는 작은 주기동안의 해의 거동을 나타낸다. 불안정 다양체를 구하기 위해서는 천해의 경우에는 우선 $y = 1$ 에서 안장점(saddle point)의 위치를 찾고, 심해의 경우에는 $y = 0$ 에서 찾는다. 이 점은 유선의 정체점이며 불안정하다. 일단 안장점을 찾은 후 안장점을 초기 위치로 하는 유맥선을 그리면 불안정 다양체를 구성하며 이것은 시간이 갈수록 혼돈영역의 모든 지점을 지나가나 서로 교차(transversal intersection)하지 않으며 불변이다.⁶⁾

Figure 3은 천해의 경우를 보이고 있다. Figure 3(c), (d), (e), (f)에서는 ε 이 증가함에 따라 혼돈영역이 넓어지며 신장과 접힘(stretching & folding)이 심해지는 것을 알 수 있다. (a), (d)와 (b), (f)에서 주기가 1일 때 보다 2일 경우 더 많은 신장과 접힘을 보여준다. 혼돈영역이 넓을수록 불안정 다양체의 신장과 접힘이 증가함을 보여주며 이는 Cantorus 주위를 돈다. Figure 4는

심해의 경우를 보이고 있다. Figure 4(a), (b), (c), (d), (e)에서 ε 이 증가함에 따라 위상면의 아래 부분에서 교반이 더 심하게 일어나며 신장과 접힘이 심해지는 것을 보여주며, 해저바닥에 있는 침전물은 부상하여 확산하는 과정에서 이 구름모양의 불안정 다양체를 따라간다. Figure 4(d), (f)는 주기가 2일 경우 더 많은 변형을 보여준다.

3.3 혼돈영역의 넓이

혼돈영역의 면적은 지역별 혼합의 척도가 된다. 혼돈면적을 측정하기 위해 미세한 격자로 전영역을 나누고 뽕앵까레 사상으로부터 각점들을 포함한 격자수를 합산하여 총격자수로 나눈 이 혼돈영역의 상대적 면적을 S 라 한다. 뽕앵까레 사상의 점의 갯수는 유한하므로 격자수를 많게 할수록 점을 포함하는 격자수는 상대적으로 줄어드는 모순이 생긴다. 따라서 점을 포함하는 격자와 격자사이의 간격이 0.05 이내이면 그 사이의 격자들은 모두 점을 포함한다고 가정하였다. Figure 5는 천해의 경우 S 가 주기가 1, 2에서 ε 의 변화에 따라 달라짐을 보여준다. $T = 1$ 에서는 ε 이 증가함에 따라 S 가 증가하다가 감소하며 $\varepsilon = 1.7$ 에서 국부적으로 최대가 된다. $T = 2$ 일 경우는 $T = 1$ 인 경우보다 전반적으로 S 가 더 크며 $\varepsilon = 2$ 근방에서 국부적으로 급격히 감소하여 $\varepsilon = 2.4$ 에서 최소가 되다가 다시 증가한다.

3.4 라푸노프 지수(Liapunov exponent)

초기조건의 민감성에 대한 척도로서 해의 궤적상의 가까이 인접한 두 점 사이의 거리가 매 주기마다 지수적으로 멀어지는 정도를 필요로 한다. 어떤 초기 선요소의 신장(stretching)의 정도는 선요소의 방향, 위치 및 시간의 함수이나, 많은 주기동안에 대한 평균값은 선요소의 방향과 초기 위치에는 무관하게 된다. 왜냐하면, 불안정 다양체는 불변이기 때문이다. 이 값은 소위 라푸노프 지수이며 λ 라 한다. 혼돈영역에서는 이 값은 양

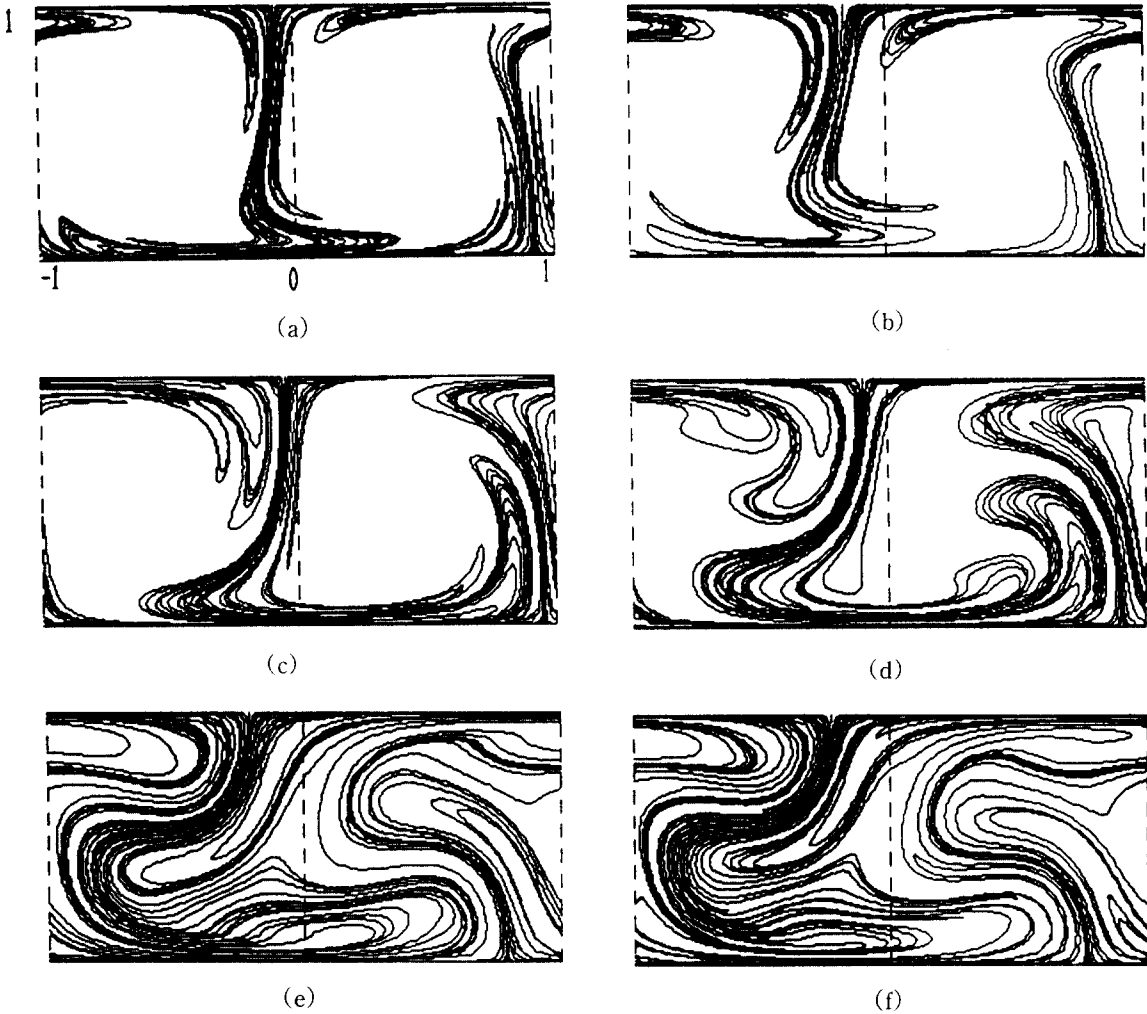


Figure 3. Unstable manifolds in shallow water. (a) $T=1, \epsilon=0.6$; (b) $T=1, \epsilon=1.3$; (c) $T=2, \epsilon=0.3$; (d) $T=2, \epsilon=0.6$; (e) $T=2, \epsilon=1.2$; (f) $T=2, \epsilon=1.3$.

수가 되고 효율적인 교반을 의미하는 반면, 정규 영역에서는 0에 가까운 값을 나타낸다.^{7,8)} 그러면 λ 는 아래와 같이 정의 될 수 있다.

$$Fn = \ln (dn/do) \dots\dots\dots (8)$$

$$\lambda_M = (1/TM) \sum_{n=1}^M Fn \dots\dots\dots (9)$$

$$\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda_M \dots\dots\dots (10)$$

이때 초기거리 d_0 는 0.001로 한다. d_1 은 1주기 후의 두점의 거리가 된다. λ 이 양수이면 혼돈적 이라고 판정하고 이 값이 크면 교반효과가 뛰어나다. Figure 6은 천해의 경우를 보이고 있다. Figure 6(a)는 F_n 이 진동특성 즉 신장과 접힘의 반복상태를 나타낸다. (b)는 λ_M 이 초기에는 일정하지 않고 많은 주기후에 일정하게 됨을 보인다. (c)에서는 $T = 1, 2$ 일 때 ϵ 에 따른 λ 를 보인다.

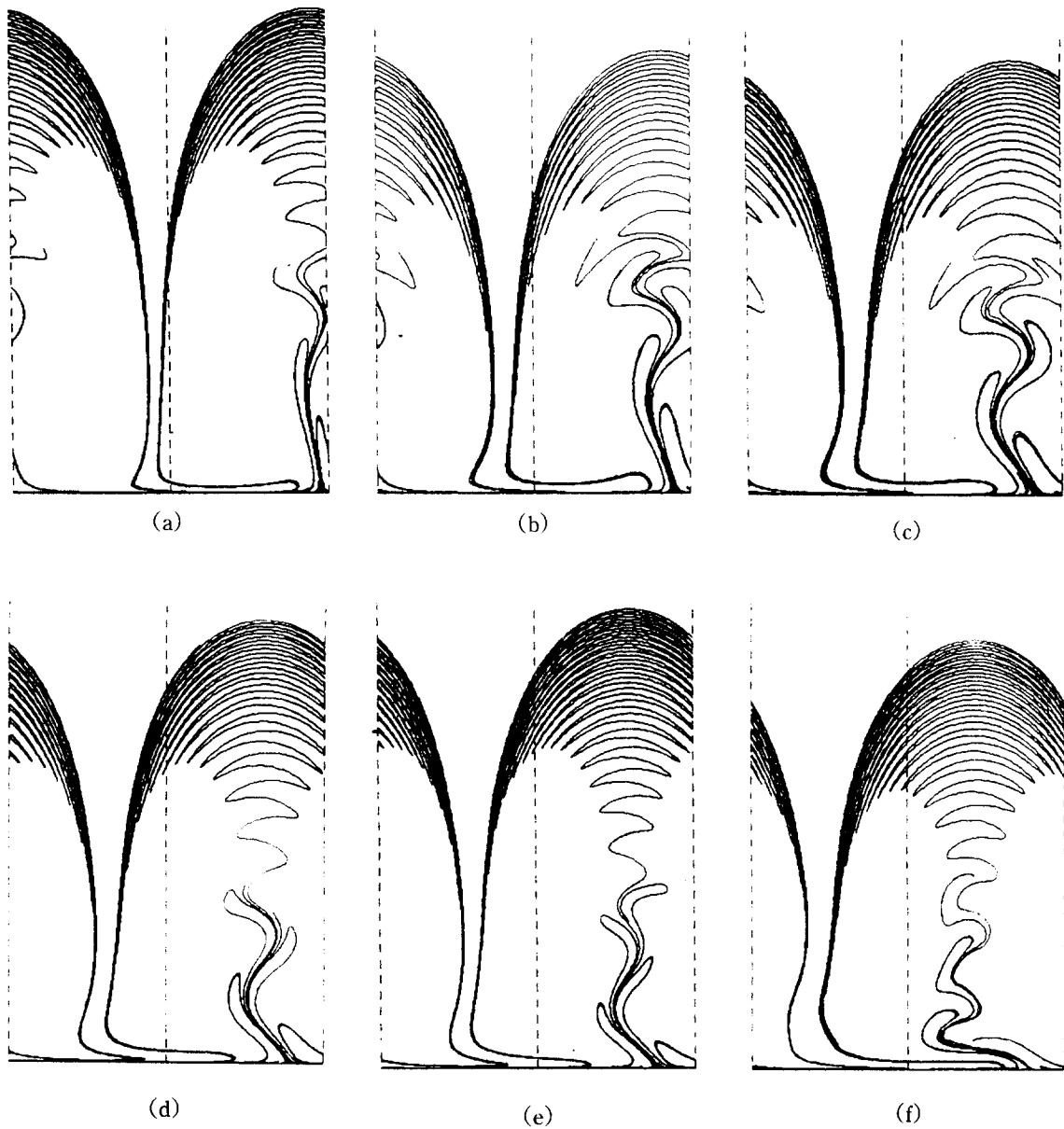


Figure 4. Unstable manifolds in deep water. (a) $T=2$, $\epsilon=0.3$; (b) $T=2$, $\epsilon=0.6$; (c) $T=2$, $\epsilon=1$; (d) $T=2$, $\epsilon=1.2$; (e) $T=2$, $\epsilon=1.3$; (f) $T=3$, $\epsilon=1.2$.

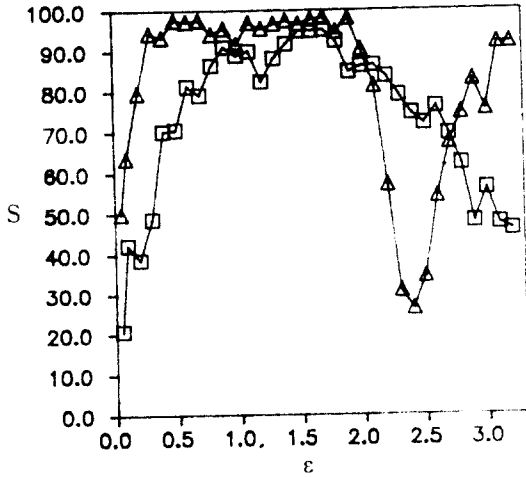


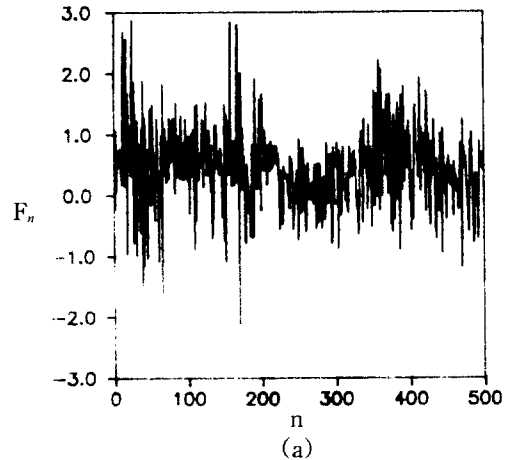
Figure 5. Chaotic area versus ϵ in shallow water.

□ : $T=1$, \triangle : $T=2$.

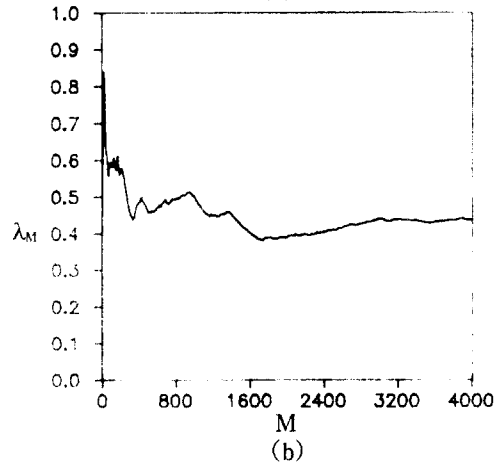
Figure 1(c), (f), Figure 5, Figure 6(c)에서 S 는 T 가 1보다 2일 때 더 크지만 λ 는 전반적으로 작다. 이것은 불안정 다양체가 $T=2$ 에서는 더 잦은 접힘을 하여 혼돈영역을 충분히 지나지 않기 때문이다. 또 ϵ 이 증가함에 따라 λ 이 증가하다가 감소하는것도 불필요한 많은 접힘을 의미한다. 접힘은 λ 가 양수가 되기 위해서는 필요하지만서도 너무 잦으면 국부적으로 음수의 F_n 을 많이 가지게 되어 평균값을 감소시킨다. ϵ 이 증가할수록 λ 이 최대가 되는 조건이 존재한다. (c)에서 주기가 2이고 $\epsilon = 2.4$ 근방에서 이값이 거의 0에 가까운것은 Figure 1(g)와 일치한다. Figure 7은 심해의 경우를 보이고 있다. 심해에서는 Figure 7(a)와 같은 진동양상을 보이며, (b)에서와 같이 천해보다 빨리 정상값에 도달한다. 이는 상층부에서는 혼돈영역이지만 불안정 다양체에서 본 바와같이 교반정도가 저조하기 때문이다. (c)에서는 ϵ 이 아주 크면 0에 가까우며 천해에비해 전반적으로 작다. 주기가 2이고 $\epsilon = 0.8$ 근방에서 λ 이 최대가 된다.

3.5 입자의 확산

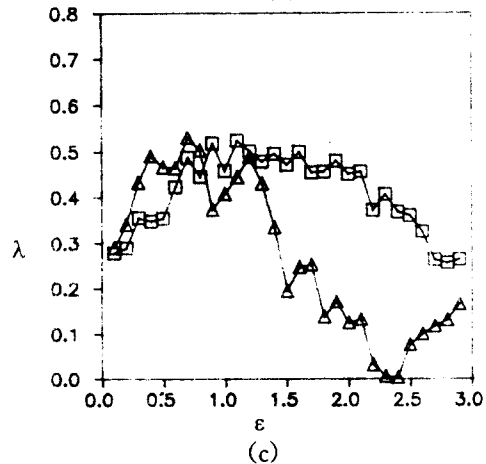
Figure 8에서는 심해의 경우 4000개의 입자를 초기위치로서 $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4$ 영역에 임의로 배치하여서 이를 다시 5000 주기후에 각 입자들



(a)



(b)



(c)

Figure 6. Transient exponent, local Liapunov exponent and Liapunov exponent in shallow water. (a) F_n versus n , $T=1$, $\epsilon=1$; (b) λ_M versus M , $T=1$, $\epsilon=1$; (c) λ versus ϵ , □ : $T=1$, \triangle : $T=2$.

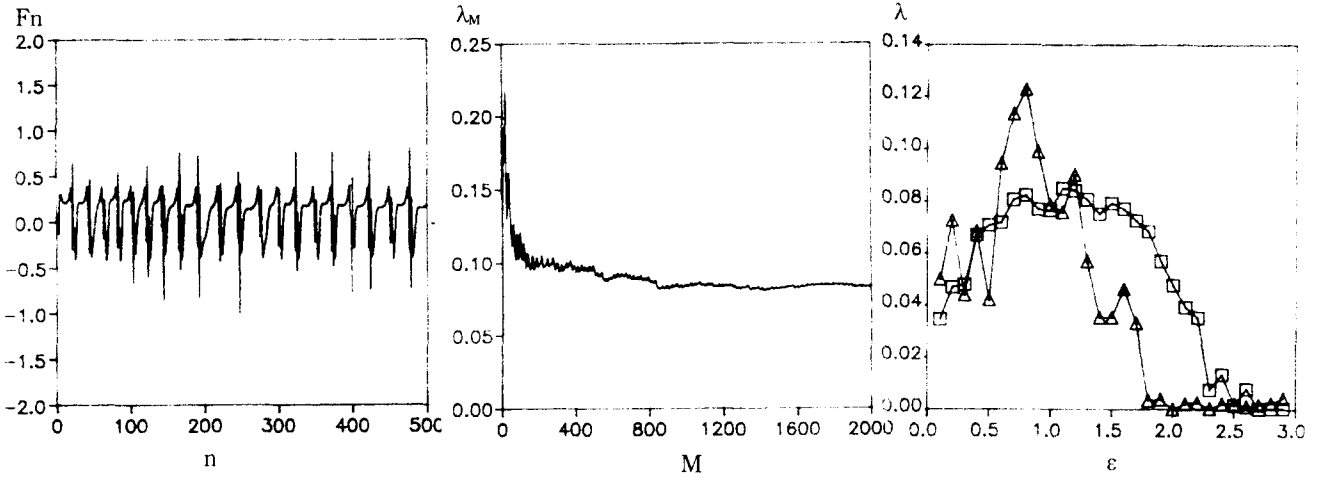


Figure 7. Transient exponent, local Liapunov exponent and Liapunov exponent in deep water. (a) F_n versus n , $T=1$, $\epsilon=1$; (b) λ_M versus M , $T=1$, $\epsilon=1$; (c) λ versus ϵ , \square : $T=1$, \triangle : $T=2$.

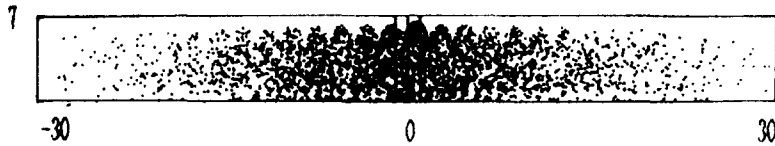


Figure 8. Dispersion of 4000 particles after 5000 periods in deep water. $T=1$, $\epsilon=1$.

이 확산된 결과를 나타낸다. 입자의 분포는 구름 모양이며 이는 Figure 4에서 불안정 다양체의 상부의 양상과 유사함을 보인다. 중앙부에 입자의 밀도가 큰 영역이 두군데 있으며 이는 정규영역을 나타내며 Figure 2의 정규영역과 일치한다. 확산된 입자의 분포양상은 x 방향으로 1차원적이라 볼 수 있다. 천해의 경우에서도 1차원적인 결과를 볼 수 있었으며 입자의 확산정도는 더 빠르다. 입자의 분포는 추계적(stochastic)이므로 효과적인 확산계수(diffusion coefficient) D 는 x 방향의 1차원적인 입자의 이송만 고려하여 다음과 같이 구한다.

$$Dn = \langle (x_n - x_0)^2 \rangle / 2nT \dots\dots\dots (11)$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} Dn \dots\dots\dots (12)$$

여기서 x_0 는 초기위치, x_n 은 n 주기후의 위치이고, $\langle \rangle$ 는 모든 입자에 대한 평균을 표시한다.

Figure 9는 천해의 경우를 보이고 있다. Figure 9 (a)는 혼돈영역에서 임의로 1000개의 입자의 위치 x_0 를 정해서 (Figure 1(h)와 같이) 500 주기동안의 Dn 을 구한것이다. 초기에 교반은 제한적인 혼돈영역에서만 일어나며 혼돈적인 입자가 Cantorus에 오래 머물 수도 있기 때문에 Dn 이 균일하지 않으나 나중에는 일정한 값을 가진다. 이는 Figure 6(b)의 라푸노프 지수와 비슷한 경향을 보인다. Figure 9(b)는 ϵ 에 따른 D 를 나타낸다. ϵ 이 증가할수록 D 는 증가하다가 다시 감소한다. 특히 $\epsilon = 1.6$ 에서는 확산계수가 극부적으로 최소이다.

Figure 10은 심해의 경우를 보이고 있다. Figure 10(a)는 심해의 경우에는 확산현상이 천해보다 빨리 정상값에 도달함을 보인다. 이는 Figure 7 (b)의 라푸노프 지수와 비슷한 경향을 보인다. Figure 10(b)에서 확산계수는 ϵ 이 증가함에 따라

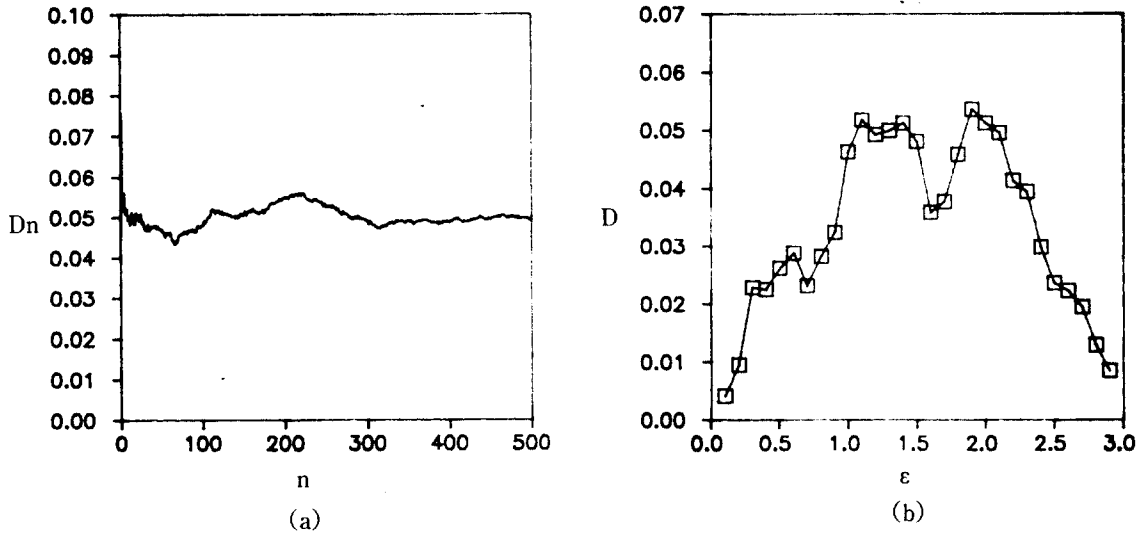


Figure 9. Transient and steady diffusion coefficients of 1000 particles in shallow water. (a) D_n versus n , $T=1$, $\epsilon=1$; (b) D versus ϵ after 1000 periods, $T=1$.

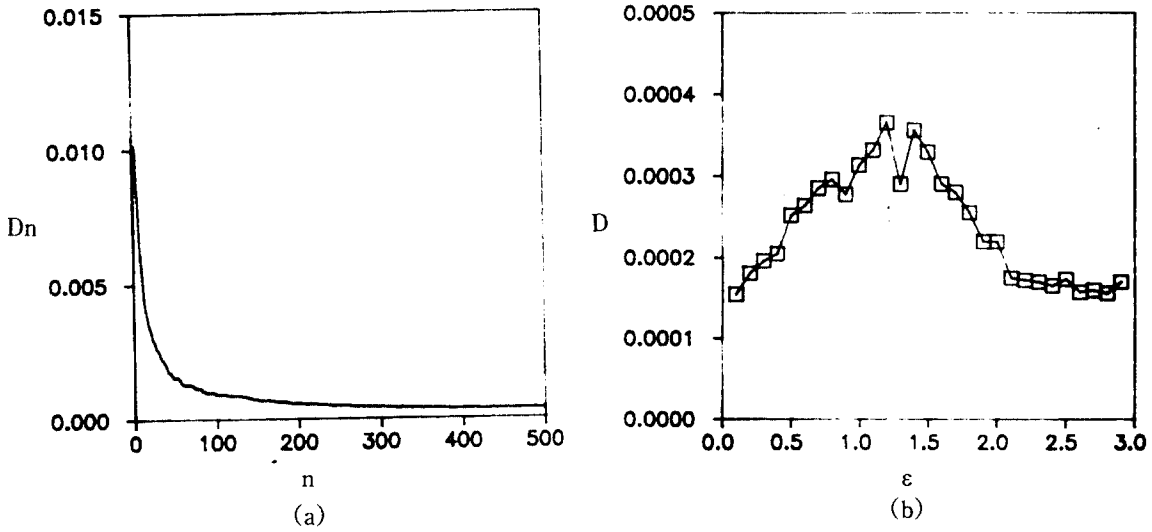


Figure 10. Transient and steady diffusion coefficients of 1000 particles in deep water. (a) D_n versus n , $T=1$, $\epsilon=1$; (b) D versus ϵ after 1000 periods, $T=1$.

증가하다가 다시 감소한다. 특히 $\epsilon = 1.3$ 근방에서는 확산계수가 급격히 감소하였다. 심해의 경우는 천해에 비해 확산계수가 훨씬 작으며 약 100분의 1정도이다. 라푸노프 지수와 확산계수는 혼

합정도에 대한 경향이 유사하나 라푸노프 지수는 혼돈 영역에만 적용될 수 있는 반면, 확산계수는 혼돈영역과 정규영역에 적용될 수 있다.

4. 결 론

주기적 진동을 하는 유동장에 대한 유체입자의 운동방정식을 수치해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 입자의 교반을 관찰하는데는 Poincaré 사상을 사용하면 유용하다.

(2) 혼돈영역에서 불안정 다양체는 시간에 따라 비선형적으로 집합, 신장의 과정을 거치며, 시간이 지나도 그 자체가 교차하지 않는다. 즉 불변이다.

(3) 주기와 ε 이 변할수록 교반효과가 변하며 혼돈영역의 융합과 분리가 일어나면서 혼돈면적이 변화한다. 일정한 T 값에서 ε 을 변화시킬 때 혼돈면적이 최대가 되는 ε 이 존재한다.

(4) 라푸노프 지수와 불안정 다양체의 변형정도는 비례하며 효율적인 확산효과와도 관계된다.

(5) 유체입자의 확산 정도는 교반효과에 의해 결정되며 라푸노프 지수와 같은 경향을 가진다.

(6) 천해의 모형이 심해에서의 것보다 확산 및 교반정도가 훨씬 크다.

참 고 문 헌

1. Blondeaux, P. and Vittori, G., "Vorticity Dynamics in an Oscillatory Flow over a Rippled Bed," J. Fluid Mech., vol.226, 1991, pp257-289.
2. Cox, S.M., Drazin, P.G., and Ryrie, S.C., "Chaotic Advection of Irrotational Flows and of Waves in Fluids," J. Fluid Mech., vol. 214, 1990, pp.517-534.
3. Ryrie, S.C., "Mixing by Chaotic Advection in a Class of Spatially Periodic Flows," J. Fluid Mech., vol.236, 1992, pp.1-26.
4. Broomhead, D.S., and Ryrie, S.C., "Particle Paths in Wavy Vortices," Nonlinearity. vol. 1, 19

88, pp.409-439.

5. Suh, Y.K., "A Chaotic Stirring by an Oscillating Point Vortex," J. The Phys. Soc. Japan, vol. 60, no. 3, March, 1991, pp.896-906.
6. Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, AMS vol.42, Springer-Verlag, 1983.
7. Ottino, Julio M., The Kinematics of Mixing : Stretching, Chaos, and Transport, Cambridge University Press, 1989.
8. Wiggins, S., Global Bifurcations and Chaos, AMS vol. 73, Springer-Verlag, 1988.

초 록

해양오염은 환경파괴의 주요 인자이다. 해양 바닥에 가라앉은 오염물질을 근본적으로 제거하는 문제와는 별도로, 파동(wave)에 의해 그것이 자동적으로 확산될 수가 있다. 파문(ripple)으로 덮혀진 해저(sea bottom)에서 표면의 중력파에 의한 물의 수평방향 요동운동은 와류(vortices)를 발생시킨다. 이러한 유동장은 해저 침전물을 부유시켜 멀리까지 확산시키는 작용을 한다. 파문 주위의 유동장을 살펴보면 모서리(crest)에서 발생된 와류로 인해 정상유동성분이 존재하며 이러한 정상유동은 파문의 주기적 형상으로 인해 다분히 순환적이다. 이에 파동에 의한 요동운동이 가세하면 Taylor 와류와 같은 효과를 보여 줄 것이다.

해저부근에서의 이러한 확산효과를 보기 위하여, 해양유동을 단순화하여 최근 널리 이용되고 있는 혼돈이론을 가미시켰다. 아주 단순한 유동이라도 복잡한 입자의 궤적을 나타내며 입자의 확산과 연관됨을 수치해석을 이용하여 보여준다.