

위상 복원 문제

김 우 식

(서울대학교 의과대학 부설 의공학 연구소)

■ 차 례 ■

- | | |
|-----------------------------|-------------------------|
| I. 서 론 | V. 더해진 기준 신호를 이용한 위상 복원 |
| II. 수학적 기초 | VI. 윈도우를 이용한 위상 복원 |
| III. 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환들 | VII. 결 론 |
| IV. 한 신호의 푸리에 크기를 이용한 위상 복원 | |

요 약

위상 복원 문제는 어떤 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 푸리에 위상, 또는 그 신호 자체를 구하는 문제로서 신호처리, 천문학, X-선 결정학, 전자현미경학, 광학, synthetic aperture radar 등과 같은 많은 물리학의 분야에서 일어난다. 일반적으로, 이 위상 복원 문제는 유일한 해를 갖지 않기 때문에, 이 문제를 풀기 위하여 사전 정보로 주어지는 원하는 신호의 성질을 제한조건으로 주어 이 문제가 유일한 해를 갖도록 한 뒤 이 원하는 신호를 구하는 방법을 사용해왔다. 이 논문에서는 위상 복원 문제를 소개하고, 이 문제의 중요성, 기본 이론등을 알아보고, 지금까지 제안이 되었던 방법들을 분야별로 묶어 신호처리의 관점에서 소개한다. 먼저 수학적 기초에 대하여 소개하고, 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환들에 대하여 알아본 뒤, 위상 복원 문제를 풀기 위하여 제안이 되었던 방법들을 1)하나의 푸리에 변환의 크기가 주어졌을 때의 위상 복원, 2)더해지는 기준 신호가 있을 때의 위상 복원, 3)곱해지는 신호(윈도우)를 이용한 위상 복원으로 나누어 소개한다.

I. 서 론

어떤 신호의 푸리에 변환은 복소수 함수로서 극좌표로 나타내면 크기(Magnitude)와 위상(Phase)의 두 부분으로 나타낼 수 있다. 위상 복원 문제(Phase Retrieval Problem)는 어떤 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 푸리에 변환의 위상(Phase)을 구하는 문제이다. 또한 푸리에 위상이 구해지면 구한 푸리에 위상과 주어진 푸리에 변환의 크기로부터 그 신호 자체를 구할 수 있기 때문에 위상 복원 문제는 푸리에 변환의 크

기로부터 그 신호를 구하는 문제를 말하기도 한다. 반면, 푸리에 변환의 위상이 주어졌을 때, 푸리에 변환의 크기, 또는 주어진 푸리에 변환의 위상을 갖는 신호 자체를 구하는 문제를 크기 복원 문제라고 한다. 일반적으로 푸리에 변환의 크기와 위상은 서로 독립적인 함수로서, 둘중에 어느 한쪽으로부터 다른 한쪽을 유추하기는 쉽지 않다고 알려져 왔다. 그 뒤, Hayes가 유한한 길이를 갖는 신호의 푸리에 변환의 위상이 주어졌을 때, 이로부터 원래의 신호를 구할 수 있다는 것을 증명하였고, 알고리즘도 개발하였다[1,2]. 하지

만, 푸리에 변환의 크기가 주어지고 그로부터 푸리에 위상 또는 그 신호를 구하는 문제는 일반적으로 유일한 해를 갖지않을 뿐만 아니라, 많은 물리적인 현상에서 일어나기 때문에, 여러 분야에서 그 분야에 맞는 이론과 알고리즘을 독자적으로 연구해왔다. 이 논문에서는 이 위상 복원 문제에 대하여 알아 보고, 지금까지 이 문제를 해결하기 위하여 제안이 되었던 방법들을 신호처리의 관점에서 소개한다.

어떤 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 그 신호를 구하는 문제는 많은 물리현상에서 일어나며, 따라서 많은 응용범위가 있다. 먼저 화학과 물리학에서는 분자의 구조를 알아내는 일이 오랫동안 중요한 이슈로 되어왔다. Laue에 의해 결정상태의 물질에 X-선을 쬐어주면 그로부터 회절되어 나오는 X-선은 결정 구조에 따라 독특한 패턴을 갖는다는 것이 알려졌다. 그 뒤, 결정을 이루고 있는 분자들의 전자밀도(Electron density)와 X-선의 회절패턴이 서로 푸리에 변환의 관계에 있다는 것이 알려졌다. 따라서 이론적으로 X-선의 회절패턴을 모두 측정하면, 이로부터 결정분자의 전자밀도를 구해낼 수 있고, 따라서 그 결정분자의 분자 구조를 유추해낼 수 있다. 하지만, 이 X-선 회절 패턴을 측정하는데는 어려움이 있다. 보통 이 X-선 회절 패턴을 측정하기 위하여 사진판(Photographic plate)을 사용하는데, 이를 사용하면 X-선 회절 패턴의 크기만 측정할 수 있으므로, 푸리에 위상 정보는 잃게 된다. 결정의 실제적인 구조 정보는 푸리에 위상이 주로 갖고 있으므로, 결정 분자의 구조를 구하려면 X-선 회절 패턴의 크기, 즉 전자 밀도의 푸리에 크기로부터 푸리에 위상을 구해야 한다. 이것이 X-선 결정학(X-ray crystallography)에서의 위상 복원 문제이다[3,4,5]. 또 다른 예는 천문학에서 볼 수 있다. 광학 기기의 성능을 비교할 때 Diffraction limit이라는 용어를 쓴다. 즉, 어떤 광학 기계가 이론적으로 갖을 수 있는 가장 좋은 해상도를 Diffraction limit이라 한다. 망원경의 공간 해상도(spatial resolution)역시 이 Diffraction limit으로 결정되며 이론적으로 λ/D 로서 주어진다. 여기서 λ 는 빛의 파장(wavelength)이고 D는 망원경의 직경이다. 하지만, 이 망원경으로 천체를 관측하는 경우의 실제적인 해상도는 이론치와는 매우 다르다. 예를 들어, 직경 약 5m인 망원경의 실제적인 해상도는 대략 1 arc-sec로서 이는 직경 약 10cm의 망원경의 diffraction limit과 같다. 이처럼 천체 망원경이 낮은 해상도를 갖는 이유는 대기의 불안정(Atmospheric turbulence)에 있다. 대기가 시시각각 변하기 때문에

대기의 빛에 대한 굴절률도 시시각각 변하고, 따라서 빛은 시시각각 다른 경로를 통해 눈으로 들어오며(이것은 별들이 반짝거리는 것과 같은 이치이다.), 이 별들의 사진을 보면 blurring이 되어 나타나는 것을 볼 수 있다. 이처럼 천체 망원경에서 얻은 낮은 해상도의 화상을 이론값과 같은 고해상도를 갖는 화상으로 복원하는 문제는 여러가지 빛의 간섭계(Interferometer)를 이용하여 원하는 신호의 자기 상관 함수(Auto-correlation)를 구함으로써 일부 해결되었다([6]-[10]). 하지만, 이 자기 상관 함수로부터 원하는 신호를 구해야 한다는 문제가 남아있다. 어떤 신호의 자기 상관 함수와 푸리에 변환의 크기의 제곱(Fourier intensity)은 서로 푸리에 변환의 관계가 있으므로, 천체 망원경에서의 낮은 해상도의 화상을 고해상도의 화상으로 복원하는 문제는 기본적으로 위상 복원 문제와 동일하다. 이 밖에도 위상 복원 문제는 전자현미경[11]-[14], Temporal coherence theory[15]-[18], spatial coherence theory[18]-[25], 신호처리[18,26]에서도 볼 수 있다.

여기서 고려해보아야 할 문제가 과연 위상정보는 중요한가하는 문제이다. 지금까지 위상정보의 중요성을 언급한 자료들은 많이 있었다. 한 예로, X-선 결정학에서 Srinivasan은 X-선 회절 패턴에 여러 종류의 위상과 크기를 결합하여 본 결과, 원래 분자의 회절 패턴의 위상에 여러가지 회절 패턴의 크기를 합성한 경우에, 그로부터 구해진 전자 밀도는 원래 분자구조의 중요한 특성들을 갖고 있었지만, 원래 분자의 회절 패턴의 크기에 위상으로 상수를 주어 분자구조를 구한 경우에는 원래의 분자구조와는 전혀 상관없는 전자 밀도를 얻었다[3]. Oppenheim과 Lim은 화상을 가지고 유사한 실험을 해본 결과 Srinivasan이 얻었던 결론과 유사한 결론을 얻었다[26]. 이상의 일련의 실험으로부터 푸리에 위상은 많은 구조 정보를 갖고 있다는 것이 알려졌다. 뿐만 아니라, 크기 복원 문제에서 유한한 길이를 갖는 신호에 약간의 제약조건을 주면 위상의 정보로부터 상수배만큼의 원래 신호를 유일하게 구해낼 수 있다는 것이 증명되었고, Gerchberg-Saxton 알고리즘을 사용하여 원하는 신호도 구할 수 있다는 것이 밝혀졌다[1,2,28]. 이와같이 위상은 신호의 구조를 결정하는데 있어서 매우 중요한 역할을 하고, 따라서 정확한 위상의 정보 없이는 원하는 신호가 정확히 구해졌다고는 볼 수 없다.

위상 복원 문제를 푸는데는 고려해야할 문제들이 3가지 있다. 첫째로는 유일한 해를 갖는가하는 문제가

다. 일반적으로 어떤 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 그 신호를 구하는 문제는 유일한 해를 갖지 않는다. 원하는 신호를 유일하게 구하려면, 원하는 신호가 갖는 여러 제약조건들이나 정보를 주어야 한다. 따라서, 첫번째 문제는 원하는 신호를 유일하게 결정하기 위하여 어떤 제약조건 어떤 정보를 주어야 하는가에 대한 문제이다. 두번째는 원하는 신호가 유일하게 결정이 되었을 때, 이 신호를 구하는 알고리즘을 구하는 문제이다. 예를 들어 화상과 같은 2차원의 신호 또는 그 이상의 차원을 가진 신호의 경우, 대부분의 신호는 한두가지의 모호성(Ambiguity)를 제외하고는 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정이 된다[2,29]. 하지만, 그럼에도 불구하고, 적당한 알고리즘이 존재하지 않으므로 이 신호를 구하기는 매우 어렵다. 마지막으로, 위상 복원 문제는 매우 잡음이 많은 환경에서 주로 일어난다. 따라서, 위상 복원 문제를 잘 풀려면 알고리즘의 잡음에 대한 Sensitivity도 함께 고려하여 주어야 한다.

이 논문의 순서는 다음과 같다. 먼저 II 장에서는 위상 복원 문제에서 자주 접하는 수학적 용어를 알아본 뒤, III 장에서는 푸리에 변환의 크기를 변화하지 않는 변환(transformation)에 관하여 알아본다. IV 장, V 장, VI 장에서는 지금까지 이 문제를 풀기 위하여 제안되었던 방법들을 크게 3 부류로 나누어 소개한다. IV 장에서는 원하는 신호와 아는 관계를 갖는 다른 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 원하는 신호를 구하기 위하여 제안되었던 방법을 소개하고, V 장에서는 원하는 신호에 다른 신호를 더한 뒤 이들 신호들의 푸리에 변환들로부터 원하는 신호를 구하는 방법을, VI 장에서는 원하는 신호에 윈도우를 곱한 뒤 이들 신호들의 푸리에 변환의 크기로부터 원하는 신호를 구하는 방법들을 알아본다.

II. 수학적 기초

이 논문에서 고려되어질 신호들은 이산 신호들로서 Z-변환이 복소수 평면상에서 단위구(1차원 신호의 경우는 단위원)를 따라 analytic한 성질을 갖는 신호들이다. 예를 들어 $x(n)$ 이 이런 신호라고 하면, $x(n)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 정의된다.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x(n) e^{-j\omega n}$$

이 푸리에 변환은 복소수 함수이며 다음과 같이 크기 성분과 위상성분의 두가지로 나타낼 수 있다.

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$$

여기서, $|X(e^{j\omega})|$ 는 $X(e^{j\omega})$ 의 크기 성분을 $\phi(\omega)$ 는 $X(e^{j\omega})$ 의 위상 성분을 각각 나타낸다. $x(n)$ 을 Analytic한 Z-변환을 갖는다고 가정했으므로, $x(n)$ 의 푸리에 변환은 Z-평면상에서 단위구(또는 단위원)를 따라 샘플링을 해줌으로서 구할 수도 있다. 즉,

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

역으로 푸리에 변환으로부터 Z-변환도 유일하게 구할 수 있다. 위상 복원 문제에서 가장 중요한 공식중의 하나가 자기 상관 함수와 푸리에 변환의 크기의 제곱(Fourier Intensity) 사이에는 푸리에 변환의 관계에 있다는 것이다. 즉

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \mathcal{F}\{r_x(n)\}$$

또한 자기 상관 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$r_x(n) = \sum_k x(k)x(n+k)$$

자기 상관 함수의 Z-변환은 다음 식으로 주어진다.

$$Z\{r_x(n)\} = X(z)X(z^{-1})$$

여기서, $X(z)$ 는 $x(n)$ 의 Z-변환이다. 어떤 이산 신호가 단위원을 포함하는 수렴 영역(Region of Convergence)을 갖으면, 자기 상관 함수와 그의 푸리에 변환, 그리고 Z-변환은 모두 같은 양의 정보를 갖고 있고, 따라서 어떤 하나로부터 다른 것을 유일하게 구할 수 있다[26].

III. 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환들

어떤 신호가 주어졌을 때, 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 다른 신호들의 크기를 보존하는 변환(Magnitude Preserving Transformation)을 수행함으로써 구할 수 있다. 이런 변환 중에서, 변환을 한 후에 신호 자체의 모양이 변하지 않으면 Trivial하다고 하고, 그렇지

않으면, nontrivial하다고 한다. Trivial 변환에는 단위 크기를 갖는 상수의 곱, 이동, 역시간(또는 역공간) 변환이 있고, nontrivial한 경우에는 1차원 신호의 경우에 zero-flipping, 2차원 이상의 경우에는 zero contour flipping의 변환이 있다. 이 장에서는 이러한 크기 보존 변환을 다룬다.

III. 크기 보존 변환의 종류

가. 단위 크기를 갖는 상수와 곱

가장 간단한 크기 보존 변환은 단위 크기를 갖는 상수를 곱하는 것이다. 수학적인 용어로는, $x(n)$ 을 m -차원의 신호라고 하면, 이런 변환으로 얻어지는 신호는 $c^m x(n)$ 여기서, θ 는 실상수이다. 특히, $x(n)$ 이 실수이면, 이 변환을 통해 얻어지는 다른 실수 신호는 $-x(n)$, 즉, 역부호 신호 밖에 없다(그림 1(a) 참조).

나. 이 동

자리 이동을 한 신호끼리의 푸리에 변환의 크기는 동일하다. 수학적으로, $y(n) = x(n - n_0)$ 는 $x(n)$ 과 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다. 여기서 n_0 는 임의의 m -차원 상수 벡터이다(그림 1(b) 참조).

다. 역시간 변환 (또는 역공간 변환)

임의의 m 차원의 신호의 모든 시간축 또는 공간축으로 뒤집는 것도 푸리에 변환의 크기를 변화시키지 않는다. 수학적으로 $x(-n)$ 은 $x(n)$ 과 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다. 특히, 2차원 공간에서의 역변환은 180도 만큼의 회전을 말한다(그림 1(c) 참조).

라. Zero flipping과 Zero-contour flipping

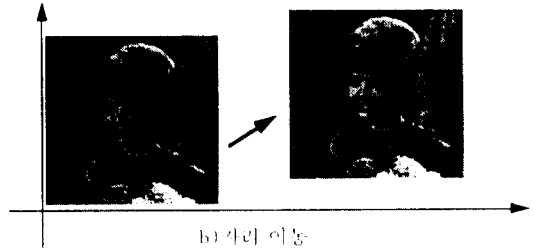
$x(n)$ 을 유한한 1차원 신호라 가정하고 그의 Z -변환이 다음과 같은 인수를 갖는다고 가정하면, 즉,

$$X(z) = (1 - z_0 z^{-1})X_1(z)$$

신호 $(z_0^{-1} - z^{-1})X_1(z)$ 는 $x(n)$ 과 똑같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다. 이와같이 $z = z_0$ 에 zero를 갖는 신호부터 zero를 $z = 1/z_0^*$ 로 바꾸어 주어 다른 신호를 얻는 방법을 zero flipping이라고 한다. 이 방법으로 얻어진 신호는 유한할 뿐만 아니라, 원래 신호와 같은 길이를 갖는다[30]. 그림 2는 zero flipping의 한 예를 나타내는 그림이다. 그림에서 zero 1, 2, 3으로 구성되는 신호의 zero를 각각 1^{*}, 2^{*}와 3^{*}로 flipping하여 만든 신호는 원래 신호와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다.



a)단위 크기를 갖는 상수와 곱



b)자리 이동



c)역공간 변환

그림 1. 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환(trivial 변환) : 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환 중, trivial한 변환은 a)단위 크기를 갖는 상수와 곱, b)자리 이동, c)역공간 변환의 3가지가 있으며, 이들 변환의 조합도 또한 푸리에 변환의 크기를 보존한다.

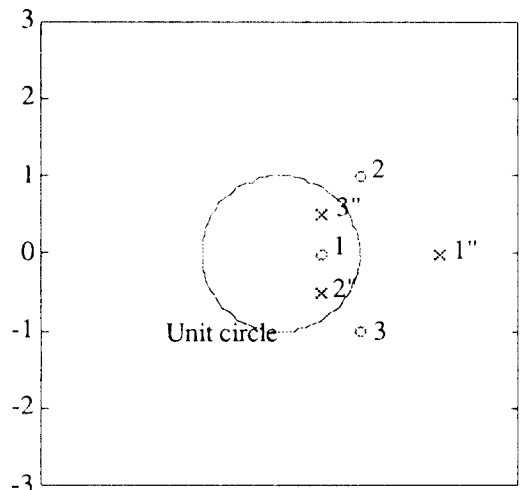
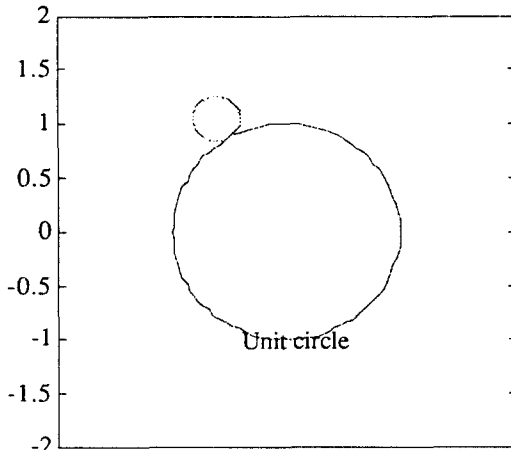


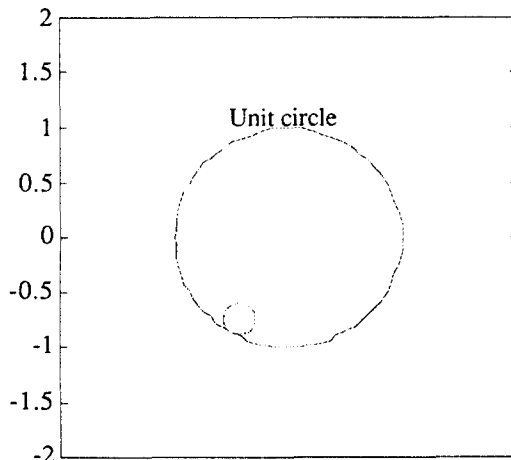
그림 2. 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환(non trivial)

변환): 1차원 신호의 non-trivial한 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환에는 zero-flipping이 있다. 그림에서 영점(1, 2, 3)으로 구성된 신호와 이들을 flipping하여 구한 영점들(1*, 2*, 3*)로 구성된 신호는 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다.

1차원 신호의 Z-변환은 하나의 숫자로 된 zero를 갖는 반면, 2-차원 또는 그 이상의 차원의 신호의 Z-변환은 contour 형태의 zero를 갖는다. 따라서, 이런 신호를 zero를 바꾸어 같은 푸리에 변환을 갖는 신호를 만들어 주는 것을 zero-contour flipping이라 한다[2]. 그림 3에는 zero-contour flipping의 예를 보였다. 그림 3(a)의 zero-contour를 갖는 신호를 그림 3(b)와 같이 zero-contour flipping를 해준 신호는 3(a)신호와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다.



(a) 2차원 신호의 zero-contour



(b) (a)의 Zero-contour를 flipping한다음의 zero-contour

그림 3. 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환(non-trivial 변환): 2차원 이상의 차원을 가진 신호는 contour 형태의 zero를 갖기 때문에 non-trivial한 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환은 zero-contour flipping이 된다. 그림(a)의 zero-contour를 갖는 신호와 이를 zero-contour flipping하여 구한 (b)를 zero를 갖는 신호는 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다.

III.2. All-pass 신호

III.1장에서는 여러가지 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환에 관하여 보았다. 이들 변환을 조합하여 만든 새로운 변환도 역시 같은 푸리에 변환의 크기를 갖으며, 이것은 All-pass신호를 이용하여 간결하게 나타낼 수 있다. All-pass신호는 푸리에 변환의 크기가 모든 주파수 성분에 대하여 1의 값을 갖는 신호를 말한다[30], 즉,

$$|A(e^{j\omega})| = 1 \text{ for all } \omega$$

모든 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환들은 이 All-pass신호로서 간단히 표시될 수 있다. 실수값을 갖고 유리 분수의 All-pass신호의 Z-변환의 일반적인 형태는 다음과 같이 나타내진다.

$$A(z) = \pm z^{-n} \prod_{i=1}^N \frac{(z_i^* - z^{-1})}{(1 - z_i z^{-1})}$$

여기서, n_0 는 임의의 정수들, \pm 는 역부호를, z^{-n} 는 자리 이동을, 각 인수 $(z_i^* - z^{-1}) / (1 - z_i z^{-1})$ 는 zero의 flipping을 나타낸다. 특히, $X(z)$ 가 $\prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1})$ 와 같으면, $\prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1})$ 은 $X(z)$ 의 모든 zero를 갖게 되고, $\prod_{i=1}^N (z_i^* - z^{-1}) / (1 - z_i z^{-1})$ 는 역시간 변환을 나타낸다.

All-pass신호를 이용하면, 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환뿐만 아니라, 같은 푸리에 크기를 갖는 임의의 두 신호들을 관계지을 수 있다. 예를 들어, 서로 푸리에 변환의 크기가 같은 $x(n)$ 과 $y(n)$ 의 두 신호가 있다고 가정하고, 각각의 푸리에 변환을 $X(\omega)$ 와 $Y(\omega)$ 라고 하면, $Y(\omega)$ 는 $X(\omega)$ 과 다음의 식으로 관계지을 수 있다.

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

여기서, $Y(\omega) / X(\omega)$ 는 모든 ω 에 대하여 1의 크기를 갖으므로 all-pass 신호이다[1].

IV. 한 신호의 푸리에 크기를 이용한 위상 복원

이 장에서는 원하는 신호와 어떤 다른 식으로 관계되어진 신호 또는 원하는 신호 그 자체의 푸리에 변환의 크기만이 주어졌을 때, 이로부터 원하는 신호를 구하는 문제에 대하여 알아본다.

IV.1. 신호의 Irreducibility 성질

III장에서 볼 수 있었듯이, 어떤 신호의 Z-변환이 하나의 인수로 되어 있으면, 다시말하여, irreducible한 Z-변환을 가지면, 이 신호와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 모든 신호는 자리 이동, 역시간(또는 역공간) 변환, 역부호 변환 등의 trivial한 푸리에 크기로 보존하는 변환을 이용하여 구할 수 있다. 또한 이러한 모호성(Ambiguity, 같은 조건을 만족하는 신호가 2개 이상 존재하는 것)을 원하는 신호의 성질을 앞으로서, 제거할 수 있다. 예를 들어, 어떤 신호가 확실한 R.O.S.(Region of Support)를 갖으면, 이동 변환에 의하여 야기되는 모호성은 없어진다. 또한 원하는 신호가 비대칭의 R.O.S.를 갖으면, 역공간 변환에 의해 생기는 모호성도 제거할 수 있다. 어떤 신호가 화상 신호와 같이 음의 값을 갖지 않거나, 또는 양의 값을 갖지 않으면, 역부호 변환의 모호성 역시 제거할 수 있다. 따라서, irreducible한 신호는 trivial한 모호성을 고려하지 않으면, 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정이 될 수 있다는 의미에서 신호의 irreducibility 성질은 위상 복원 문제에서 매우 중요하다.

가우스의 대수의 기본 법칙에 따르면, M차의 계수를 갖는 한 변수의 다항식은 정확히 M개의 Zero를 복소수 평면상에서 갖는다[31,32]. 따라서, 길이 N의 1차원 신호는 (N-1)개의 zero를 갖는다. 따라서, 3개 이상의 0이 아닌 값을 갖는 1차원 신호는 푸리에 변환의 크기로부터 역부호, 역시간(또는 역공간), 또는 자리 이동과 같은 trivial한 크기 보존 변환만을 이용하여 구할 수 없다. 반면에, 2차원 또는 그 이상의 차원을 갖는 신호는 가우스의 대수의 기본 법칙을 따르지 않을 뿐만 아니라, 2차원 이상의 차원을 갖는 2차원 신호들의 거의 대부분은 irreducible하다는 것이 증명되어 있다[33]. 이것은 99%이상의 2차원 또는 그 이상의 차원의 신호들의 Z-변환은 그 자체가 하나의 인수이며, 따라서, 역부호, 역공간, 이동 변환과 같은 trivial한 크기 보존 변환에 의하여 모두 구할 수 있다.

IV.2. 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 모든 신호의

복원

임의의 신호의 $x(n)$ 의 푸리에 변환의 크기가 주어졌을 때, 이 신호 $x(n)$ 의 자기 상관함수의 Z-변환은 푸리에 변환의 크기를 제곱을 한 뒤, 역푸리에 변환을 하여 구할 수 있다. 자기 상관 함수의 Z-변환은

$$R_x(z) = X(z)X^*(z^{-1})$$

의 식으로 주어지므로, 신호 $x(n)$ 의 $z = z_0$ 의 zero를 갖으면, 자기 상관 함수는 $z = z_0$ 와 $z = 1/z_0^*$ 의 두 개의 zero를 갖는다. 원래의 식 $x(n)$ 이 길이 N인 신호이면, $X(z)$ 는 N-1의 zero를 갖게 되고, 따라서, 자기 상관 함수의 Z-변환은 N-1개의 zero쌍을 갖는다. 각 쌍에서 1개씩의 zero를 선택하여, 모두 N-1개의 zero를 구하고, 이 N-1개의 zero를 갖는 z 의 다항식을 구하여 역 Z-변환을 하면, $x(n)$ 과 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호를 상수에 반급의 차이를 제외하고는 모두 구할 수 있다. 이러한 신호들은 모두 2^{N-1} 개가 있다.

주어진 푸리에 변환의 크기를 갖는 2차원의 신호를 구하는 것도, 1차원 신호의 경우와 같은 방법으로 해 줄 수 있다[34]. 예를 들어 2차원 신호를 $x(m,n)$ 이라 하고 그의 R.O.S.가 $R = \{N_1, N_1 - 1, \dots, 0, N_1 - 1\} \times \{0, N_2 - 1, \dots, 0, N_2 - 1\}$ 으로 주어졌다고 가정하자. 이 신호의 자기상관함수 $R_x[m,n]$ 은 R.O.S.로 $R \cup \{2N_1 - 1, 2N_2 - 1\}$ 을 갖는다. 이 자기 상관 함수의 각 열을 연결시켜 만든 1차원 신호를 $R_n(m)$ 이라고 하고, $x(m,n)$ 의 각 열에 (N-1)의 0을 붙인 뒤, 각 열을 연결하여 만든 신호를 $x_c(m)$ 이라고 하면, $R_n(m)$ 은 $x_c(m)$ 의 자기 상관 함수가 된다. 따라서, 1차원 신호에서 사용했던 방법을 그대로 2차원 신호에 대하여 적용시키면, $R_n(m)$ 을 자기 상관 함수로 갖는 모든 1차원 신호를 구할 수 있고, 이 신호를 길이 N만큼 잘라 2차원 신호로 만들어 주면, 원하는 2차원 신호를 구할 수 있다. 하지만, 2차원 신호의 경우 주어진 푸리에 변환의 크기를 만족하는 신호는 대부분의 경우에 있어서 유일하게 존재하므로[33],

$$R(N_1 - 1, N_2 - 1) = x(N_1 - 1, N_2 - 1)x(0,0)$$

와 같은 적당한 제한 조건을 주어서 원하는 신호를 찾아낸다.

IV.3. 최소 위상 신호와 최대 위상 신호

IV.2에서 보았듯이 주어진 푸리에 변환의 크기를

갖는 1차원 신호는 상수배의 모호성을 제외하고도 $2^N - 1$ 개 존재하기 때문에, 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정되지는 않고, 이들 신호를 구하는 것도 매우 어렵다. 하지만, 최소 위상 신호(minimum-phase signal)나 최대 위상 신호(maximum-phase signal)와 같이 zero들이 특별한 성질을 갖는 1차원 신호들은 푸리에 변환의 크기로부터, 유일하게 결정될 수 있다. 이 장에서는 이들 신호에 대하여 알아본다.

가. 최소 위상 신호

최소 위상 신호는 zero와 pole들이 모두 단위원 안에 위치해 있는 신호이다. 어떤 신호가 최소 위상 신호이며 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정이 될 수 있다. 먼저, 푸리에 변환의 크기의 제곱으로부터 자기 상관 함수를 구할 수 있고, 이로부터 자기 상관함수의 모든 zero를 구할 수 있다. 위의 IV.2절에서 볼 수 있듯이 자기 상관 함수의 zero는 항상 쌍(pair)으로 되어있고, 그 두 zero의 크기는 하나가 1보다 크면, 다른 하나는 1보다 작다. 따라서, 1보다 작은 zero들만 모아서 꾸민 다항식에 적당한 상수를 곱해주면 원하는 최소 위상 신호가 된다. 또한 최소 위상 신호의 푸리에 위상은 Hilbert 변환을 이용하여 구해줄 수 있다[30].

나. Hilbert 변환

$x(n)$ 이 실수의 causal한 유한한 함수라고 가정하고, $X(e^{j\omega})$ 를 그 신호의 푸리에 변환이라고 하자. $X(e^{j\omega})$ 의 로그리즘은 다음식으로 주어진다.

$$\bar{X}(e^{j\omega}) = \log [X(e^{j\omega})] = \log |X(e^{j\omega})| + j\arg [X(e^{j\omega})]$$

$\bar{X}(e^{j\omega})$ 의 역푸리에 변환인 $\bar{x}(n)$ 을 복소수 켈스트럼이라고 한다. 이 복소수의 켈스트럼이 causal하고 stable하면, 실수부분과 허수 부분은 서로 Hilbert 변환의 관계가 있다. 이 켈스트럼의 허수 부분은 다음식으로 표시되며, 즉,

$$\arg [X(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log [X(e^{j\theta})] \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta$$

실수 부분인 $\log |X(e^{j\omega})|$ 는

$$\log |X(e^{j\omega})| = \bar{x}(0) + \frac{1}{2\pi} \text{Pr}$$

$$\left[\int_{-\pi}^{\pi} \arg [X(e^{j\theta})] \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta \right]$$

의 식으로 주어지며, 여기서 $\text{Pr}[\cdot]$ 는 Principal 값을 $\bar{x}(0)$ 는

$$\bar{x}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log [X(e^{j\theta})] d\theta$$

로서 주어진다. 이 복소수 켈스트럼은 $X(z)$ 의 pole과 zero가 모두 단위원 안에 있을 때, 즉, $x(n)$ 이 최소 위상 신호일 때 causal이 된다. 따라서, 푸리에 변환의 크기가 주어졌을 때, 이 신호가 최소 위상 신호이면, 이 신호는 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 구할 수 있다[30,35].

다. 최대 위상 신호

최대 위상 신호는 zero와 pole이 모두 단위원 밖에 있는 신호를 말한다. 이 최대 위상 신호는 최소 위상 신호의 모든 zero를 flipping하여 구할 수 있으며[30], 최소 위상 신호는 먼저 설명한 바와 같이 Hilbert 변환을 이용하여 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 구할 수 있다.

IV.4. 경계 조건이 주어졌을 때의 위상 복원 문제

구하고자 하는 신호의 푸리에 변환의 크기에 그 신호의 경계조건이 같이 주어지면, 원하는 신호를 구할 수 있다[36]. 1차원의 신호는 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호가 많이 존재하므로 일반적으로 유일하게 결정이 되지 않지만, 2차원 이상의 신호의 경우에는, 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호는 trivial한 관계식을 제외하고는 대부분의 경우에 있어서 유일하게 결정이 되므로, 경계조건은 위상 복원 문제를 푸는데 있어서 매우 중요한 정보가 될 수 있다. 특히, 사각형의 영역을 갖는 2차원 신호의 경우에 있어서는, 대부분의 경우에 있어서, 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호는 원하는 신호이거나, 원하는 신호를 180도 회전한 신호, 아니면, 이 두 신호에 음의 부호를 곱한 신호이다. 따라서, 경계조건이 주어지면, 음의 부호를 갖는 신호는 원하는 신호가 될 수 없고, 경계조건 그 자체가 180도 회전 대칭이 아니면, 원하는 신호는 따라서 유일하게 결정될 수 있다. 하지만, 원하는 신호가 둘 이상의 인수를 갖으면, 같은 경계조건을 갖는 신호의 수는 2개 이상이 될 수 있다[37].

일반적으로 신호의 경계값들은 자기 상관 함수에 서로 비선형적(non-linear)으로 관계되어 있기 때문에, 푸리에 변환의 크기로부터 그 신호의 경계값들을 구하는 것은 매우 어려운 일이다. 하지만, 어떤 경우에는 경계값들은 자기 상관 함수로부터 구할 수 있다. 한 예로 삼각형의 영역을 가진 신호의 경계값은 쉽게 구할 수 있다. 하지만, 일반적으로 사각형의 영역을 가진 신호의 경우에는 하나 또는 둘의 기준점이 있는 경우가 아니면, 경계값들을 구하는 것은 매우 어려운 문제이다[36].

IV.5. 푸리에 변환의 크기와 1비트의 정보를 (또는 부호를) 이용한 위상 복원

X-선 결정학에서의 여러 실험에서 부호를 갖은 회절 패턴의 크기를 이용하면, 그것으로부터 결정구조를 구할 수 있다는 것이 알려졌다[3]. Van Hove 등이 이것을 이론으로 만들어서, 어떤 신호의 푸리에 변환의 크기와 1비트의 정보가 주어지면, 주어진 정보로부터 그 신호를 구할 수 있다는 것을 이론적으로 증명하였다[38]. 이 한 비트의 위상 정보는 수학적으로 다음과 같이 정의 된다.

$$S_x^\alpha(\omega) = \begin{cases} +1 & \text{if } \alpha - \pi < \phi_x(\omega) \leq \alpha \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

여기서 α 는 0에서 π 까지의 어느 상수이다. Youla와 Pillai는 이를 일반화하여 복소수값을 갖는 에널리틱한 함수에까지 유일성을 증명하였다[39]. 부호를 갖는 푸리에 변환의 크기로부터의 신호의 복원은 Gerchberg-Saxton 알고리즘을 이용하여 구할 수 있다[38]. 여기서, 임의의 신호 $x(n)$ 의 부호를 갖는 푸리에 변환의 크기는 다음과 같이 정의된다.

$$S_x(\omega) = \begin{cases} +|X(e^{j\omega})| & \text{if } -\pi/2 < \phi_x(\omega) \leq +\pi/2 \\ -|X(e^{j\omega})| & \text{otherwise} \end{cases}$$

IV.6. 충분히 떨어진 영역을 갖는 두 신호로 구성된 신호의 위상 복원

서로 충분한 간격을 두고 떨어져있는 두 신호로 구성된 신호는 푸리에 변환의 크기로 결정될 수 있다[40]. 예를 들어, 신호 $x(n)$ 이 두개의 서로 떨어져있는 신호 $g(n)$ 과 $h(n)$ 으로 구성되어 있다고 가정하면, 즉,

$$x(n) = g(n) + h(n)$$

$$\text{여기서 } g(n) \neq 0 \quad n \in [a, b]$$

$$h(n) \neq 0 \quad n \in [c, d]$$

이며, $a < b < c < d$ 와 $b - a \neq d - c$ 의 식이 성립한다고 가정한다. 만일, $g(n)$ 과 $h(n)$ 의 Z-변환인 $G(z)$ 와 $H(z)$ 가 서로 공통된 인수를 갖지 않으면, 원래의 신호 $x(n)$ 는 그의 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정이 된다[40].

Crimmins 등이 이 문제의 일반화에 대하여 연구했으며, 3개의 이상의 떨어져있는 작은 신호로 이루어져 있는 신호는 작은 신호들이 서로 어떤 '분리 조건'을 만족하면, 공통인수의 모호성을 제외하고는 유일하게 결정이 될 수 있음을 보였다. 또한, 원하는 신호가 단지 두개의 서로 떨어진 작은 신호로 구성되어 있는 경우에는 공통 인수와 역시간의 모호성을 제외하고는 유일하게 결정이 될 수 있음을 보였다[41].

IV.7. Gerchberg-Saxton 알고리즘

이 장에서는 위상 복원 문제에서 가장 많이 쓰이는 알고리즘 중에서 Gerchberg-Saxton 알고리즘과 적응 완화 방법을 소개한다.

가. Gerchberg-Saxton 알고리즘

위상 복원 문제에서 가장 널리 사용되는 알고리즘 중에 하나가 Gerchberg-Saxton 알고리즘이다. 이 알고리즘은 푸리에 변환과 역푸리에 변환을 반복해서 행하고, 이들 변환을 행해주는 중간에 신호의 여러가지 제한 조건을 더해줌으로서 알고리즘의 기능을 행하게 된다. 그림4에 이 알고리즘의 블록 기능도를 보였다. 이 그림에서 F는 푸리에 변환을 F⁻¹는 역푸리에 변환을 나타내고 D[*]는 신호의 시간(또는 공간)의 성질을 제약하는 연산자이고 T[*]는 신호의 주파수 영역에서의 성질을 제한하는 연산자이다. 시간 영역에서의 제한 연산자의 예로는 신호의 시간 또는 공간에서의 영역을 제한하는 유한 영역 제한 연산자, 신호가 양의 값만을 갖거나, 또는 음의 값만을 갖도록 제한하는 연산자, X-선 결정학에서는 구한 신호가 원자성(atomcity)를 갖도록하는 연산자[5], 또한 전자현미경학에서는 공간영역에서의 신호(일반적으로 복소수 신호)가 원하는 크기를 갖도록 제한하는 연산자 [11,12,42,43,44] 등이 있다. 주파수 영역에서의 제한 연산자의 예로는 유한한 주파수 영역을 갖는 신호의 경우 주파수가 원하는 영역에서만 값을 갖도록 제한하는 연산자[28], 크기 복원 문제에서 주어진 위상을

갖게하는 위상 제한 연산자[1,2,28,45], 또한 위상 복원 문제에서 구한 신호가 푸리에 변환의 크기를 갖도록 하는 크기 제한 연산자[45,46,47] 등이 있다.

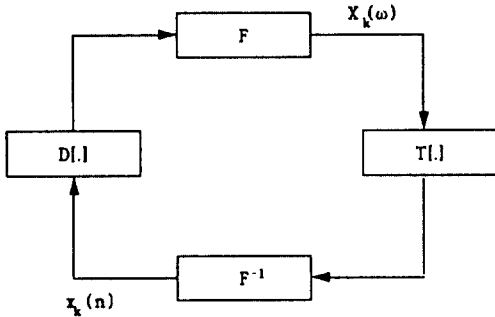


그림 4. Gerchberg-Saxton 알고리즘 : Gerchberg-Saxton 알고리즘은 신호를 푸리에 변환과 역푸리에 변환을 반복하고, 공간(시간)영역과 주파수 영역에서 신호의 성질을 제한 연산자로서 적용시킴으로서 동작한다.

이 Gerchberg-Saxton 알고리즘은 신호의 주파수 영역에서의 평균 제곱 에러가 증가하지 않기 때문에 에러 감소 알고리즘(Error-reduction algorithm)이라고도 불린다[46]. 신호 $x(n)$ 의 주파수 영역에서의 평균 제곱 에러는 다음과 같이 정의된다.

$$NMSE_{freq} = \frac{\sum ||X_i(\omega) - |X_o(\omega)||^2}{\sum |X_o(\omega)|^2}$$

하지만, 평균 제곱 에러가 증가하지 않는다는 것은 구한 신호가 원하는 신호로 수렴한다는 것을 반드시 의미하지는 않는다[48]. 일반적으로 위상 복원 문제에서의 Gerchberg-Saxton 알고리즘은 원하는 신호로 수렴하지는 않지만, 원하는 신호와 비슷한 특성을 갖는 신호로 수렴한다[29]. 하지만, 전체 시스템이 유일한 해를 갖거나, 또는 초기 조건이 원하는 신호에 매우 가까우면, 이 알고리즘은 원하는 신호에 수렴하려는 매우 강한 경향을 보인다[44,46].

나. 적응완화방법(Adaptive Relaxation Algorithm)

크기 복원 문제에서와 같이 시스템이 유일한 해를 갖아, Gerchberg-Saxton 알고리즘이 원하는 신호로 수렴하는 경우에는 적응 완화 방법을 사용하여 수렴 속도를 증가시킬 수 있다[2]. 적응 완화 알고리즘의 블록 선도는 그림5와 같다. 적응 완화 알고리즘의 (k+

1)단에서의 방정식은 다음식으로 주어진다.

$$x_{k+1}(n) = (1-\lambda_k)x_k(n) + \lambda_k Q[x_k(n)]$$

여기서, 연산자 $Q[*]$ 는 $F^{-1}TFD$ 로서 주어진다. 각 단에서 수렴 속도를 결정하는 완화 파라미터 λ 는 각 단에서 다음과 같이 계산된다. 먼저 최소화하고자 하는 에러함수는 신호들이 모두 0의 값을 갖을 것으로 생각되는 영역 p에서 다음과 같이 정의한다.

$$E_x = \sum_{n \in P} |x_k(n)|^2$$

이 때의 수렴 속도를 결정하는 파라미터는 에러 에너지를 최소로 할 때의 값을 사용하며, 이를 구하기 위해 여러 에너지를 미분하고 방정식을 풀면, 이때의 파라미터는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_k = \frac{\sum_{n \in P} x_k(n) [Q[x_k(n)] - x_k(n)]}{\sum_{n \in P} [Q[x_k(n)] - x_k(n)]^2}$$

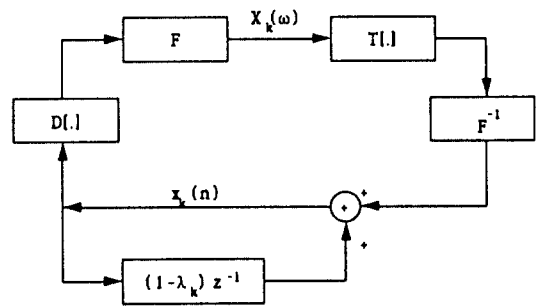


그림 5. 적응 완화 방법 : 위상 복원 문제가 유일한 해를 갖아 Gerchberg-Saxton 알고리즘이 원하는 신호에 수렴할 때, 이 적응 완화 방법을 이용하여 수렴 속도를 가속화시킬 수 있다.

V. 더해진 기준 신호를 이용한 위상 복원

어떤 신호가 있을때, 그 신호의 푸리에 크기의 변환에는 푸리에 변환의 위상의 정보는 포함되지 않는다. 하지만, 이 신호에 다른 신호를 더하여진 신호의 푸리에 변환의 크기에는 원래 신호의 푸리에 위상이 포함되어 있다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다. x

(n)이 원하는 신호라고 하고 $y(n)$ 은 $x(n)$ 에 $h(n)$ 을 더하여서 얻어진 신호

$$y(n) = x(n) + h(n)$$

라고 하면, $y(n)$

$$|Y(e^{j\omega})|^2 = |X(e^{j\omega})|^2 + |H(e^{j\omega})|^2 + 2|X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|\cos(\phi_x(\omega) - \phi_h(\omega))$$

여기서, $\phi_x(\omega)$ 와 $\phi_h(\omega)$ 는 $x(n)$ 과 $h(n)$ 의 푸리에 위상을 나타낸다. 이 식에서 볼 수 있듯이, $x(n)$ 의 푸리에 위상은 $y(n)$ 의 푸리에 변환의 크기에 포함되어 있다. 이 장에서는 더해지는 신호를 이용하여 푸리에 위상을 구해내는 방법들에 대하여 알아본다.

V.1. Off-axis holographic technique

푸리에 위상을 구하기 위한 방법중 가장 전형적인 방법이 off-axis holography 방법이다[49,50]. 이 방법은 구하고자 하는 신호의 영역으로부터 충분히 멀리 떨어진 곳에 점함수를 더하여 얻은 신호로부터 원하는 신호를 구하는 방법이다. 좀더 자세하게, $x(n)$ 이 영역 $[0, N-1]$ 의 밖에서는 0의 값을 갖는 유한한 신호라고 하면, 즉,

$$x(n) = 0 \text{ for } n \notin [0, N-1]$$

$y(n)$ 은 n_0 에 위치한 크기 A 인 점신호를 더하여서 얻어진 신호라고 가정하면, $y(n)$ 의 자기 상관 함수는 다음의 식으로 표시된다.

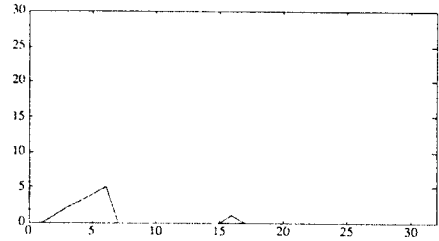
$$r_y(n) = r_x(n) + Ax(n+n_0) + Ax(n_0-n) + A^2\delta(n)$$

여기서, n_0 는 $2N-1$ 보다 크거나, $-N$ 보다 작다고 가정하면, $r_x(n) + A\delta(n)$, $Ax(n_0-n)$, $Ax(n+n_0)$ 가 서로 겹쳐지지 않기 때문에 단지 윈도우를 이용하여 원하는 신호 $x(n)$ 을 구해낼 수 있다.

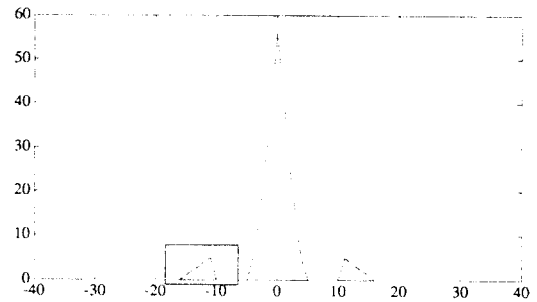
$$x(n) = \begin{cases} r_y(n-n_0) & \text{for } n \in [0, N-1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

이 방법은 언제나 원하는 신호를 유일하게 구할 수 있다는 장점이 있는 반면, 각 좌표축당 2배의 공간을 필요로 하기 때문에, 경우에 따라서는 이 방법을 실제의

문제에 응용하는데 많은 어려움이 따른다(그림 6 참조).



(a) 원하는 함수와 기준 함수



(b) 자기 상관 함수와 그 안에 들어 있는 원하는 함수 및 그를 구하기 위한 윈도우

그림 6. Off axis holography technique : Off axis holography technique는 원하는 신호로부터 충분히 떨어진 위치에 점함수(기준 함수)를 더한 뒤, 그 함수의 푸리에 변환의 크기로부터 얻어지는 자기 상관 함수에 윈도우를 적용시켜 구한다.

V.2. Irreducibility의 적용

II장과 III장에서 봤듯이 어떤 신호의 Z-변환이 인수분해를 갖느냐 또는 갖지 않느냐는 위상복원 문제가 유일한 해를 갖느냐하는 문제에 매우 중요한 역할을 한다. 어떤 경우에 있어서는 2차원 신호에 어떤 성질을 갖는 점신호를 더해줌으로서 인수를 갖지 못하도록 해 줄수 있다[51,52]. 예를 들어, $x(m,n)$ 을 2차원 신호로 $R[N,K]$ 의 영역을 갖고, $x(0,0) \neq 0$ 이라고 하자. 여기에 $A\delta(m-M, n)$ 의 신호를 더해진 신호를 $y(m,n)$ 이라고 하자.

$$y(m,n) = x(m-1, n) + A\delta(m-M, n)$$

여기서, $A \neq 0$ 이고, $M > N$ 이면 $y(m,n)$ 은 Eisenstein 조건을 만족하게 되고, 따라서, 신호 자체 말고는 인수

를 하나도 갖지않게 된다. 위의 식과 같은 형태를 갖는 신호를 통털어 'Fiddy-Brames-Dainty object'라고 말한다. 이러한 신호들은 Gerchberg-Saxton 알고리즘이나 Recursive 알고리즘을 이용하여 구할 수 있다(그림 7참조)[51].

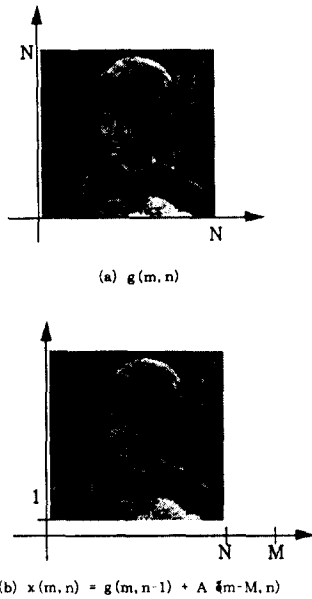


그림 7. Eisenstein criteria와 FBD object : 그림 (a)와 같이 2차원 신호가 있을 때, $M > N$ 이고 $g(0,0)$ 이 0이 아니면, $x(m,n)$ 은 irreducible하며, 따라서, 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정된다. (b)와 같이 Eisenstein 조건을 만족하는 신호를 FBD object라고 한다.

FBD Object를 역공간 변환과 공간 이동 변환을 하면 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 새로운 신호들을 얻는다. 이런 신호들은 Off-axis holography technique과 같은 형태를 갖지만, 이와는 달리 위상들이 직접적으로 주어지지 않기 때문에 감추어진 기준신호를 갖고 있다고 한다. 이러한 신호들의 재구성도 FBD Object를 구하는 방법으로 구할 수 있다[52].

V.3. 더해지는 알고있는 신호를 이용한 위상 복원

어떤 신호에 점함수를 더했을 때, 전체 시스템이 Off-axis holography 조건을 만족하면, 이 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 원하는 신호를 유일하게 구할

수 있었다[49,50]. 또한 더해진 신호가 FBD 조건을 만족하면, 그 신호를 유일하게 구할 수 있었다[51, 52]. 2차원 신호의 경우에 한개 내지는 두개의 점함수를 적당한 위치에 더하면, 이로부터 경계값들을 구할 수 있었고, 이를 이용하여 방정식을 풀면, 신호값들을 얻을 수 있었다[36]. 일반적으로, 더해진 신호가 이런 특별한 성질을 만족하지 않으면, 더해진 신호와 푸리에 변환의 크기만으로는 원하는 신호를 구하지 못하고, 더 많은 정보를 필요로 한다[53]. 이 장에서는 원하는 신호 $x(n)$ 의 푸리에 변환의 크기와 원하는 신호에 일반적인 아는 신호 $h(n)$ 을 더해 얻어진 신호 $y(n)$ 의 푸리에 변환의 크기, 즉 $|X(e^{j\omega})|$ 와 $|Y(e^{j\omega})|$ 가 주어졌을 때의 위상 복원에 관하여 알아본다.

가. 유일성(Uniqueness)

이 문제의 유일성을 보기 위하여, 원하는 신호를 그림 8(a)와 같이 이차원 신호인 화상 $x(m,n)$ 이라고 가정하고, 더해지는 기준 신호는 원하는 신호의 영역안에 위치한 점함수라고 가정한다. 먼저, 원하는 신호 $x(m,n)$ 과 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호들은 푸리에 변환의 크기를 보존하는 변환으로부터 구할 수 있다. 이들 신호 중에서 점함수를 더했을 때 $x(m,n) + \lambda \delta(m-m_0, n-n_0)$ (그림 8(b))와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호들을 trivial 변환을 이용하여 구하는 경우, 그림 8(d)와 같이 $x(2m_0 - m, 2n_0 - n)$ 이 위의 조건을 만족하는 신호라는 것은 쉽게 알 수 있다. 이로서, 이 조건을 만족하는 신호는 최소한도 두개는 존재한다는 것을 알 수 있다. 하지만, 이 두 신호 이외에 이 조건을 만족하는 다른 신호는 더 존재하지 않는다는 것이 증명되었다[53]. 뿐만 아니라 원래 신호의 여러가지 성질을 제한 조건으로 줌으로서 이 두 신호중 원하지 않는 신호를 제거할 수 있다. 예를 들어, 원래 신호 $x(m,n)$ 가 그림과 같이 $R[N,N]$ 영역을 갖는 신호라고 가정할 때, (m_0, n_0) 가 $((N-1)/2, (N-1)/2)$ 와 같지 않으면, $x(2m_0 - m, 2n_0 - n)$ 은 $x(m,n)$ 과는 서로 다른 신호 영역을 갖게 되고, 따라서, 원하는 신호가 될 수 없다[53]. 또한, 원하는 신호가 실수값을 갖고, 더해진 기준 신호가 순허수(pure imaginary) 값을 갖는 점함수이면, 원하 신호는 유일하게 결정이 된다[48]. 원하는 신호가 일반적인 n-차원 신호일 때와 더해지는 기준 신호가 점함수가 아닌 일반적인 신호 또는 복소수 신호일 경우에도 위의 유일성을 확장시킬 수 있다[48].

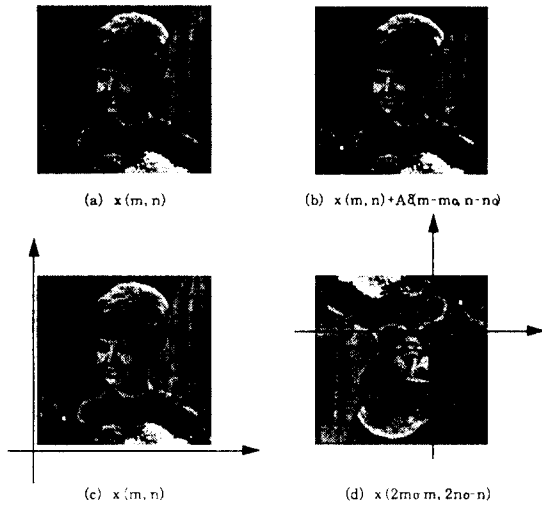


그림 8. 유인성: 그림 (a)가 원하는 신호이고, 그림 (b)가 (a)에 점함수(그림의 위쪽 아래의 흰점)가 더해진 신호일 때, (a)와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖고, 점함수를 더했을 때, (b)와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호는 원래 신호(c)와 (c)를 역공간, 자리이동 변환을 한 신호 (d)가 있다. 이런 신호는 (c)와 (d) 이외에는 존재하지 않으며, 신호 (d)는 여러가지 제약조건을 주어서 해에서 제외시킬 수 있다. 또한 이 개념은 일반적인 신호의 경우로 확장시킬 수 있다.

나. 복 원

원하는 신호의 재구성은 non-iterative방법[53]이나 iterative방법[54]으로 구해줄 수 있다.

a. Non-iterative 알고리즘

원하는 신호를 구하기 위해 먼저 다음의 신호를 고려해 보겠다.

$$r_{c+h}(n) = r_c(n) \oplus r_h(n) \oplus h(n) \\ = x(n) * h(-n) + x(-n) * h(n) \quad (1)$$

이 신호는 좌변에서 볼 수 있듯이 3개의 자기 상관 함수의 차로 구성 되어있고, 이 자기 상관 함수들은 측정된 푸리에 변환의 크기와 주어진 정보로부터 모두 얻을 수 있는 값들이다. 또한 이 신호의 우변은 원하는 신호와 더해진 기준 신호와의 컨볼루션의 합으로 주어진다. 특히 기준 신호가 점함수일 경우에 이 신호는 매우 흥미로운 성질을 갖는다. 예를 들어, 원하는

신호가 그림 8(a)와 같이 2차원 신호이고, 그림 8(b)와 같이 점함수의 신호가 더해진 경우에, 이 각 신호의 자기상관 함수의 차함수는 그림 9(a)에서 볼 수 있듯이, 원신호의 성질을 그대로 갖고 있는 부분과 원신호와 역공간 변환의 신호와의 합으로 되어있는 부분으로 되어 있다. 따라서, 그림 9(b)와 같이 원하는 신호의 일부분은 원도우를 이용하여 구할 수 있고, 나머지 부분(그림 9(c))은 두 신호의 자기 상관 함수로부터 유도되어 나온, 두개의 미지수를 갖는 방정식을 풀이 구할 수 있다 [52]. 그림 9(d)는 복원된 신호이다. 또한, 일반적인 n 차원 신호와 점함수가 아닌 일반적인 함수를 갖는 경우에도 이 개념을 확장할 수 있다 [52].

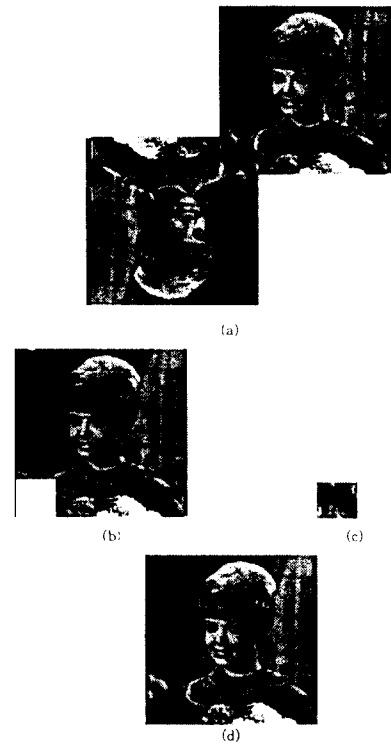


그림 9. 복원: 그림 8의 (a)와 (b)의 푸리에 변환의 크기와 점함수가 주어졌을 때, 원하는 신호 (a)의 복원은 다음과 같다. 먼저 주어진 정보로부터 자기 상관 함수의 차함수를 구하면 (a)와 같이 되고, 여기서 원하는 신호의 일부는 원도우를 이용하여 구할 수 있다. (b)나미지 부분은 (c)와 자기 상관 함수의 성질로부터 미지수 2개의 방정식을 유도해 낼 수 있고, 이를 풀면 (d)와 같이 원하는 신호를 구할 수 있다.

b. Iterative 알고리즘

반복적인 알고리즘의 경우에도 같은 식으로부터 유도될 수 있다. (1)의 식을 푸리에 변환하면, 다음의 식으로 나타 낼 수 있다. 여기서 k -번째 단계에서의 에러 함수와 업데이트 방정식을 다음과 같이 정의하면,

$$E_k(\omega) = R_{y,h}(\omega) - X_k(\omega)H^*(\omega) - X_k^*(\omega)H(\omega)$$

$$X_{k+1}(\omega) = X_k(\omega) + \beta(\omega)E_k(\omega) \quad (2)$$

($k+1$)번째의 에러 함수의 절대값은

$$|E_{k+1}(\omega)| = |1 - 2\text{Re}\{\beta(\omega)H(\omega)\}| \cdot |E_k(\omega)|$$

와 같이되고, 이때, 알고리즘의 수렴 속도를 결정하는 함수 $\beta(\omega)$

$$\beta(\omega) = \text{sgn}[\text{Re}\{H(\omega)\}] \cdot \beta_0$$

수렴 속도를 결정하는 상수 β_0 가

$$1 < \beta_0 < 1 / \max\{|\text{Re}\{H(\omega)\}|\}$$

의 조건을 만족하면, 식(2)는 알고리즘을 반복 수행함에 따라, (1)의 해에 수렴한다. 하지만, 위 식은 유일한 해를 갖지 않으므로, 여기에 원래 신호가 갖고 있는 여러 성질들, 즉 주어진 푸리에 변환의 크기, 음의 값을 갖지않는 성질들을 제한 연산자를 사용하여 적용시켜 준다. 업데이트 방정식을 적용시키는 것은 successive approximation 알고리즘의 특징이고, 제한 조건을 적용시키는 것은 Gerchberg-Saxton 알고리즘의 큰 특징이므로, 이 알고리즘은 근본적으로 이 두가지 알고리즘의 조합으로 구성되어 있다(그림 10참조)[54,55].

V.4. 모르는 더해지는 신호를 이용한 위상 복원

V.3절에서는 $h(n)$ 을 아는 경우에 모르는 원하는 신호 $x(n)$ 과 $x(n)+h(n)$ 으로부터, 신호 $x(n)$ 을 구하는 문제를 알아보았다. 이절에서는 더해지는 신호 $h(n)$ 을 모르는 경우의 위상 복원에 관하여 알아본다. 먼저, 신호 $h(n)$ 대신 $h(n)$ 의 푸리에 변환의 크기가 주어 졌을 경우에는 세 신호 $x(n)$, $h(n)$ 고 $x(n)+h(n)$ 의 푸리에 변환의 크기 사이에 인수가 하나도 없으면, $x(n)$ 과 $h(n)$ 모두 주어진 조건으로부터 trivial한 모호성을 무시하면, 유일하게 결정된다[56]. 하지

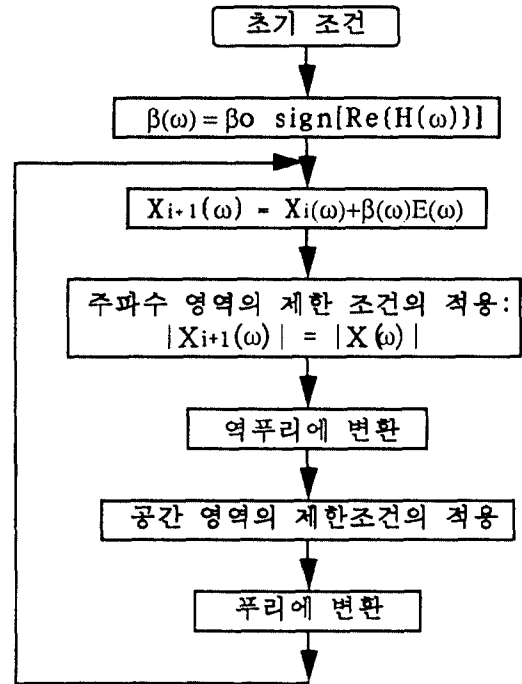


그림 10. iterative 알고리즘

만, 실질적인 문제로 들어가서 이 두신호를 주어진 세 개의 푸리에 변환의 크기로부터 구하려면, $x(n)$ 과 $h(n)$ 사이의 관계식을 알아야하며, 이 관계식은 서로 보충적인(complementary)관계에 있는 두 윈도우를 이용하여 나타내어지고, 이 경우 Gerchberg-Saxton 알고리즘을 이용하여 원하는 신호를 구할 수 있다(VI.4절 참조)[56,57]. 또한 $h(n)$ 의 푸리에 변환의 크기가 주어지지 않은 경우에도, $h(n)$ 을 구할 수 있는 경우가 있다. 예를 들어, $h(n)$ 이 점함수인 경우, $h(n)$ 은 다음과 같이 나타내어 지며,

$$h(n) = A\delta(n-n_0)$$

이때, n_0 의 값은 두 신호 $y(n)$ 과 $x(n)$ 의 자기 상관 함수의 차이의 신호 영역으로부터 trivial한 모호성을 무시하면 유일하게 구할 수 있고, A 값도 $|Y(0)|$ 와 $|X(0)|$ 의 차이로부터 부호의 모호성을 무시하면 유일하게 구할 수 있으며, 따라서, $x(n)$ 과 $y(n) = x(n) + h(n)$ 의 푸리에 변환의 크기만으로 $x(n)$ 을 구할 수 있다[48].

VI. 윈도우를 이용한 위상 복원

어떤 신호에 윈도우를 곱한 신호의 푸리에 변환의 크기에는 원래 신호의 푸리에 변환의 위상이 직접적으로 관계되어 있지는 않지만, 간접적으로 관계되어 있다. 윈도우를 이용하여 위상 복원을 하는 문제는 광학이나 천문학등 빛을 이용하는 물리학자 문제에서 실현하기 쉬우므로, 그 중요성을 갖는다. 이 상에서는 윈도우를 이용하여 위상 복원을 하는 문제에 대하여 알아본다.

VI.1. 지수함수의 성질을 갖는 윈도우를 이용한 위상 복원

어떤 신호에 지수함수로 되어있는 윈도우를 곱해 주면, 곱해진 신호의 zero들은 원래 신호의 zero들과 특이한 관계를 갖게된다. 공간 영역에서 어떤 신호에 지수함수를 곱하고 주파수 영역에서의 zero를 구하면, 이들 zero들은 원신호의 zero들을 허수축으로 일정량 만큼 이동하여 나타난다[58]. 유사하게, Z-변환 영역에서 실수값을 갖는 지수함수를 곱해주면, 원신호의 zero가 원점을 중심으로 방사형으로 확장 또는 축소되어 나타난다. 이것을 수식으로 보면, $y(n)$ 을 $x(n)$ 에 $w(n) = e^{-\alpha n}$ 을 곱하여 얻은 식이라고 하면,

$$y(n) = x(n)e^{-\alpha n}$$

여기서 α 는 임의의 실수인 상수이다. $y(n)$ 의 Z-변환은 $x(n)$ 의 Z-변환과 다음의 관계식을 갖는다.

$$Y(z) = \sum_n y(n)z^{-n} = \sum_n x(n)(e^{\alpha z})^{-n} = X(e^{\alpha z})$$

여기서 알 수 있듯이, $X(z)$ 가 $z = z_0$ 에 zero를 하나 갖고 있으면, $Y(z)$ 는 $z = e^{\alpha z_0}$ 에 zero를 갖게된다. 따라서, α 가 0보다 크면, 영점들은 축소를 하게되고, 0보다 작으면, 영점들은 확장을 하게된다.

$x(n)$ 의 Z-변환이 $z = z_0$ 에 영점을 하나 갖으면, $x(n)$ 의 자기 상관 함수의 Z-변환은 $z = z_0$ 와 $z = z_0^*$ 의 두개의 영점을 갖는다. 따라서, $x(n)$ 의 Z-변환의 N개의 영점들을 $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ 이라고 하면, $x(n)$ 의 자기 상관 함수의 Z-변환의 영점들은 $\{z_1, z_2, \dots, z_N, 1/z_1^*, 1/z_2^*, \dots, 1/z_N^*\}$ 가 된다. 또한 $y(n)$ 의 Z-변환의 영점들은 $\{e^{-\alpha z_1}, e^{-\alpha z_2}, \dots, e^{-\alpha z_N}\}$ 이 되고, $y(n)$ 의 자기 상관 함수의 Z-변환의 영점들은 $\{e^{-\alpha z_1}, e^{-\alpha z_2}, \dots, e^{-\alpha z_N}, e^{\alpha z_1^*}, e^{\alpha z_2^*}, \dots, e^{\alpha z_N^*}\}$ 이 된다.

$z_1, e^{\alpha/z_1^*}, e^{\alpha/z_2^*}, \dots, e^{\alpha/z_N^*}$ 이 된다. $y(n)$ 과 $x(n)$ 의 푸리에 변환의 크기로부터, $y(n)$ 과 $x(n)$ 의 자기 상관 함수의 Z-변환의 영점들을 구할 수 있으므로, $y(n)$ 의 자기 상관 함수의 영점에 e^{α} 를 모두 곱하고, $x(n)$ 의 자기 상관 함수의 영점의 집합에서 공통된 영점만 고르면 $x(n)$ 의 영점들을 구할 수 있고, 따라서, 원하는 신호 $x(n)$ 을 구할 수 있다.

Nakajima는 이 문제를 수치해석을 이용하는 푸는 방법을 연구하였고, 2가지의 방법을 제안하였다[59, 60]. 첫번째 방법은 먼저 원하는 신호 $x(n)$ 의 푸리에 변환의 크기와 윈도우를 곱한 신호 $y(n)$ 의 푸리에 변환의 크기의 비(ratio)를 구한다. $x(n)$ 의 푸리에 변환의 크기와 $y(n)$ 의 푸리에 변환의 크기 사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$|Y(\omega)| = |X(\omega - j\alpha)|e^{\phi(\omega)}$$

여기서, $\phi(\omega)$ 는 복소수값을 갖는 위상신호의 허수 부분이며 위상함수는 $\phi(\omega - j\alpha) = \phi_R(\omega) + j\phi_I(\omega)$. 한편, 위상부분인 $\phi_I(\omega)$ 는 푸리에 수열로서 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\phi_I(\omega) \cong \sum_{n=1}^N [a_n \cos \frac{n\pi}{L} \omega + b_n \sin \frac{n\pi}{L} \omega]$$

여기서 L은 관찰 영역의 크기이다. 이 두 방정식을 이용하여 a_n 과 b_n 을 미지수로하는 선형 방정식을 구할 수 있고, 이들 값들은 $\ln[|Y(\omega)/X(\omega - j\alpha)|]$ 으로부터 구할 수 있다[59].

두번째 방법은 최소 위상 신호를 이용하여 위상을 구하는 방법이다. 일차원 신호의 경우 푸리에 변환의 크기가 주어지면, 그 푸리에 변환의 크기를 갖는 최소 위상 신호의 위상은 Hilbert 변환을 이용하여 구할 수 있다. 따라서, 원하는 신호의 위상과 최소 위상과의 차이 만큼만 구해주면 되고, 이는 $\ln[|Y(\omega)/X_N(\omega - j\alpha)|]$ 으로부터 구할 수 있다. 여기서, $X_N(\omega)$ 는 최소 위상 함수의 푸리에 변환이다[60].

VI.2. 짧은 시간 신호의 푸리에 크기를 이용한 위상 복원

일반적으로 위상 복원을 위해 개발된 알고리즘은 잡음에 매우 약하므로, 원 신호 영역을 갖고 있는 신호의 위상을 복원해야 할 경우와 같이 처리해야 할 때 이타의 양이 많은 경우, 얻은 결과가 원하는 신호와는

매우 차이가 날때가 많다. 이런 경우에는 영역이 큰 신호를 작은 영역을 갖는 여러개의 신호로 나눈뒤, 이들 데이터를 순차적으로 처리함으로써 원하는 신호를 구할 수 있다. Nawab 등이 이 문제를 연구하여 윈도우의 크기와 처리해야 할 신호와의 관계를 구했다 [61]. 이렇게 큰 영역을 갖는 신호를 적당한 크기의 윈도우를 곱하여 작은 영역을 갖는 신호로 만든 것을 짧은 시간 신호라고 하며, 이들 신호의 푸리에 변환은 다음과 같이 정의한다.

$$X_n(nL, \omega) = \sum_{m=-L}^L x(m)w(nL - m)e^{-j\omega m}$$

여기서, L은 짧은 신호들 사이의 간격을 말하고, w(n)은 0의 값을 포함하지 않는 윈도우 함수이다. 짧은 시간 신호의 자기 상관 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$r_n(m) = \sum_{k=-N}^{N-1} x(k)w(n-k)x(k-m)w(n-(k-m))$$

짧은 시간 신호는 그 신호의 반이상의 신호값을 알고 있으면, 그의 짧은 시간 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정이 되고, 모르는 신호값들은 Matrix 방정식을 풀거나 반복적인 알고리즘을 이용하여 구할 수 있다[61].

VI.3. 보족적인 윈도우를 이용한 위상 복원

VI.4절에서는 모른 두 신호 x(n)과 h(n)과 두 신호의 합 y(n) = x(n) + h(n)의 푸리에 변환의 크기가 주어졌을 때, 이 세 푸리에 변환의 크기 사이에 서로 공통 인수가 없으면 x(n)과 h(n)은 유일하게 결정이 되었다. 이 경우에 x(n) + h(n)을 원하는 신호라고 가정하면, x(n)과 h(n)은 y(n)에 서로 보족적인 관계를 갖는 윈도우를 이용하여 나타낼 수 있다. 즉, 윈도우 w(n)을 y(n)과 x(n)을 관계시켜주는 윈도우

$$w(n) = \begin{cases} x(n)/y(n) & \text{if } y(n) \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

라고 가정하면, h(n)은

$$h(n) = y(n) - x(n) = [1 - w(n)]y(n)$$

과 같이 된다. 여기서, 윈도우 w(n)의 보족적인 윈도우를

$$w_c(n) = 1 - w(n)$$

로서 정의하면, h(n) = w_c(n) y(n)과 같이 나타내진다. 여기서, 새 신호의 푸리에 변환의 크기가 주어지고, 이들 사이에 공통 인수가 없으며, 윈도우 w(n)이 대칭이 아니면, 원하는 신호는 주어진 정보로부터 유일하게 결정이 된다. 또한, 이들 신호의 복원은 Gerchberg-Saxton 알고리즘을 응용하여 구할 수 있다[56, 57].

VII. 결 론

이 논문에서는 위상 복원 문제에 관하여, 위상 복원 문제의 정의, 중요성 및 지금까지 제안되었던 방법들을 신호 처리의 관점에서 소개하였다. 위상 복원 문제는 천문학이나 물리학, 화학 분야에서 오래전부터 존재해 왔음에도 불구하고, 그 중요성은 최근에 와서야 알려진 문제이다. 이 분야에는 지금도 새로운 이론과 방법들이 간헐적이지만 꾸준히 소개되고 있으며, 제안된 방법들의 잠음분석과 실제 현상의 응용에 대하여는 아직도 많은 연구영역을 갖고 있다. 특히, 더해지는 신호를 이용하는 방법은 X-선 결정학에서 이미 존재하는 방법인 Isomorphic addition technique, Heavy atom method, Isomorphic replacement technique, Multiple anomalous dispersion(MAD) technique등에 직접 응용할 수 있고[62], 천문학에서도, 인공으로 별을 만들어 주는 방법이 개발됨에 따라, 이 방법을 응용할 수 있게 되었고, 따라서 이 분야의 연구에 활력을 불어 넣을 것으로 기대된다[63]. 마지막으로 이 논문으로 인하여 위상복원 문제와 그 중요성을 이해하는데 많은 도움이 되기를 바라며, 앞으로 이 분야에도 많은 연구가 이루어져서 좋은 결과가 많이 나올 수 있기를 바란다.

참 고 문 헌

1. M. H. Hayes, J. S. Lim, and A. V. Oppenheim. "Signal reconstruction from phase or magnitude." *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-28(6) : pp.672-680, December 1980.
2. M. H. Hayes. "The reconstruction of a multidimensional sequences from the phase or magnitude of its Fourier transform." *IEEE Tran., Acoust., Speech, and Signal Process.*, ASSP-39(2) : pp.140-154, April

- 1982.
3. G. N. Ramachandran and R. Srinivasan. "Fourier Methods in Crystallography." Wiley-Interscience, 1970.
 4. H. A. Hauptman. "The phase problem of x ray crystallography." *Physics Today*, pages pp.24-29, November 1989.
 5. R. P. Millane "Phase retrieval in crystallography and optics." *Journal of Optical Society of America*, 7(3) : pp.394-411, March 1990.
 6. R. Hanbury Brown. "Measurement of stellar diameters." *Ann. Rev. Astr. and Ap.*, 6 : pp.13-38, 1968.
 7. A. Labeyrie. "Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images." *Astron. & Astrophys.*, 6 : pp. 85-87, 1970.
 8. C. Y. C. Liu and A. W. Lohmann. "High resolution image formation through the turbulent atmosphere." *Optics Communication*, 8(4) : pp.372-377, 1973.
 9. R. H. T. Bates and F. M. Cady. "Towards true imaging by wideband speckle interferometry." *Optics Communications*, 32(3) : pp.365-369, March 1980.
 10. D. G. Currie, S. L. Knapp, and K. M. Liewer. "Four stellar-diameter measurements by a new technique : Amplitude interferometry." *The Astrophysical Journal*, 187(1) : pp.131-134, January 1974.
 11. W. O. Saxton, "Computer Techniques for Image Processing in Electron Microscopy." Academic Press, New York, 1978.
 12. R. W. Gerchberg and W. O. Saxton. "Phase determination from image and diffraction plane pictures in the electron microscope," *OPTIK*, 34(3) : pp. 275-284, 1971.
 13. A. J. J. Drenth, A. M. J. Huizer, and H. A. Ferwerda. "The problem of phase retrieval in light and electron microscopy of strong objects." *Optica Acta*, 22(7) : 615-628, 1975.
 14. A. M. J. Huizer, A. J. J. Drenth, and H. A. Ferwerda. "On phase retrieval in electron microscopy from image and diffraction pattern." *Optik*, 45(4) : 303-316, 1976.
 15. H. M. Nussenzveig. "Phase problem in coherence theory," *Journal of Mathematical Physics*, 8(3) : pp.561-572, March 1967.
 16. Y. Kano and E. Wolf. "Temporal coherence of black body radiation," *Proc. Phys. Soc.*, 80 : pp.1273-1276, 1962.
 17. E. Wolf. "Is a complete determination of the energy spectrum of light possible from measurements of the degree of coherence?," *Proc. Phys. Soc.*, 80 : pp. 1269-1272, 1962.
 18. W. A. Gardner. "A unifying view of coherence in signal processing." *Signal Processing, EURASIP*, 29(1) : pp.113-140, 1992. Elsevier.
 19. L. Mandel and E. Wolf. "Coherence properties of optical fields." *Reviews of Modern Physics*, 37(2) : pp.231-287, April 1965.
 20. C. L. Mehta. "Determination of spectral profiles from correlation measurements." *Nuovo Cimento*, XXXVI(1) : 1482-1485, 1965.
 21. E. L. O'Neal and A. Walther. "The question of phase in image formation." *Optica Acta*, 10 : pp.33-40, 1962.
 22. A. Walther. "The question of phase retrieval in optics." *Optica Acta*, 10 : pp.41-49, 1962.
 23. H. A. Ferwerda. "Inverse Source Problems in Optics," volume 9. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978. Edited by H. P. Baltas.
 24. H. Gamo. "On the intensity interferometer with coherence background." *Advances in Quantum Electronics*, pages pp.252-264, 1961.
 25. H. Gamo. "Phase Determination of Coherence Functions by the Intensity Interferometer In Electromagnetic Theory and Antennas." Pergamon Press, Oxford, 1963. Edited by E. C. Jordan.
 26. N. K. Bose. "Problems and progress in multidimensional system theory." *Proceedings of the IEEE*, 65 : pp.824-840, June 1977.
 27. A. V. Oppenheim and J. S. Lim. "The importance of phase in signals." *Proceedings of the IEEE*, 69 : pp. 529-541, May 1981.
 28. V. T. Tom, T. F. Quatieri, M. H. Hayes, and J. H. McClellan. "Convergence of iterative nonexpansive signal reconstruction algorithms." *IEEE Transactions of Acoustics, Speech, and Signal Processing*, (5) : pp.1052-1058, October 1981.
 29. J. R. Fienup and C. C. Wackerman. "Phase-retrieval stagnation problem and solutions." *Journal of Optical Society of America A*, 3(11) : pp.1879-1907,

- November 1986.
30. A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. "Digital Signal Processing." Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.
 31. R. V. Churchill and J. W. Brown. "Complex Variables and Applications." McGraw-Hill, 1984. Fourth Edition.
 32. N. E. Hurt. "Phase Retrieval and Zero Crossings." Kluwer Academic Publishers, 1989.
 33. M. H. Hayes and J.H. McClellan. "Reducible Polynomial in More Than One Variable." *Proceedings of the IEEE*, 70(2) : pp.197-198, February 1982.
 34. N. Canterakis. "Magnitude-only reconstruction of two-dimensional sequences with finite regions of support." *IEEE Transaction of Acoustics, Speech, and Signal Processing*, (5) : pp.1256-1262, October 1983.
 35. A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. "Discrete-Time Signal Processing." Prentice Hall, 1989.
 36. M. H. Hayes and T. F. Quatieri. "Recursive phase retrieval using boundary conditions." *J. Opt. Soc. Am.*, 73(11) : pp.1427-1433, November 1983.
 37. J. R. Fienup. "Phase retrieval using boundary conditions." *Journal of Optical Society of America A*, 3(2) : pp.284-288, February 1986.
 38. P. L. Van Hove, M. H. Hayes, J. S. Lim, and A. V. Oppenheim. "Signal reconstruction from signed Fourier transform magnitude." *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-31(5) : pp.1286-1293, October 1983.
 39. D. C. Youla and S. U. Pillai. "A unique characterization in terms of signed magnitude for functions in the polydisc algebra $a(u^n)$." *Journal of Optical Society of America A*, 6(6) : pp.859-862, June 1989.
 40. A. H. Greenaway. "Proposal for phase recovery from a single intensity distribution." *Opt. Lett.*, 1 : pp. 10-12, 1977.
 41. T.R. Crimmins and J.R. Fienup. "Uniqueness of phase retrieval for functions with sufficiently disconnected support." *Journal of Optical Society of America A*, 73(2) : pp.218-221, February 1983.
 42. R. W. Gerchberg and W. O. Saxton. "A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures." *OPTIK*, 35(2) : pp. 237-246, 1972.
 43. D. L. Misell. "An examination of an iterative method for the solution of the phase problem in optics and electron optics : I. Test calculations." *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 6 : pp.2200-2216, 1973.
 44. D. L. Misell. "An examination of an iterative method for the solution of the phase problem in optics and electron optics : II. Sources of error." *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 6 : pp.2217-2225, 1973.
 45. R. W. Schaffer, R. M. Mersereau, and M. A. Richards. "Constrained iterative restoration algorithms." *Proceedings of the IEEE*, 69(4) : pp.432-450, April 1981.
 46. J. R. Fienup. "Reconstruction of an object from the modulus of its fourier transform." *Optics Letters*, 3 (1) : 27-29, July 1978.
 47. R. P. Millane, R. H. T. Bates, W. R. Fright, and W. A. Norton. "Towards direct phase retrieval in macromolecular crystallography." *Biophysics J.*, 49 : pp.60-62, January 1986.
 48. W. Kim. "The phase retrieval using two Fourier transform intensities with application to x-ray crystallography." Thesis Dissertation, Georgia Institute of Technology, 1991.
 49. C. L. Mehta. "New approach to the phase problem in optical coherence theory." *Journal of Optical Society of America*, 58 : pp.1233-1234, 1968.
 50. L. S. Taylor. "The phase retrieval problem." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-29(2) : pp.386-391, March 1981.
 51. M. A. Fiddy, B. J. Brames, and J. C. Dainty. "Enforcing irreducibility for phase retrieval in two dimensions." *Optics Letters*, 8(2) : pp.96-98, February 1983.
 52. J. R. Fienup. "Reconstruction of objects having latent reference points." *Journal of Optical Society of America*, 73(11) : pp.1421-1426, November 1983.
 53. W. Kim and M. H. Hayes. "Phase retrieval using two Fourier transform intensities." *Journal of the Optical Society of America*, 7(3) : pp.441-449, March 1990.
 54. W. Kim and M. H. Hayes. "Iterative phase retrieval using two Fourier transform intensities." In *Proceedings*. Pages D : pp.1563-1566, Albuquerque, NM,

April 3-6 1990. ICASSP90.

55. W. Kim and M. H. Hayes. "Phase retrieval using an additive reference signal." *IEEE Transactions on Signal Processing*, March 1993. Submitted for publication.
56. W. Kim and M. H. Hayes. "Phase retrieval using a window function." In *Proceedings*, pages IV:149-152, San Francisco, CA, March 23-26 1992. ICASSP92.
57. W. Kim and M. H. Hayes. "Phase retrieval using a window function." *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992. Accepted for publication.
58. J. W. Wood, M. A. Fiddy, and R. E. Burge. "Phase retrieval using two intensity measurements in the complex plane." *Optical Letters*, 6(11): pp.514-516, November 1981.
59. N. Nakajima. "Phase retrieval from two intensity measurements using the Fourier series expansion." *Journal of Optical Society of America A*, 4(1): pp. 154-158, January 1987.
60. N. Nakajima. "Phase retrieval using the logarithmic Hilbert transform and the Fourier series expansion." *Journal of Optical Society of America A*, 5(2): 257-262, February 1988.
61. S. H. Nawab, T. F. Quatieri, and J. S. Lim. "Signal reconstruction from short-time Fourier transform magnitude." *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP 31(4): pp. 986-998, August 1983.
62. W. Kim and M. H. Hayes. "The phase retrieval problem in X-ray crystallography." In *Proceedings*, pages D: pp.1765-1768, Toronto, CANADA, May 14-17 1991. ICASSP91.
63. G. P. Collins. "Making stars to see stars: DoD adaptive optics work is declassified." *Physics Today*, pages pp.17-21, February 1992. Search & Discovery.



김 우 식

- 1961년 3월 8일생
- 1984년: 서울대학교 공과대학 전자공학과(학사)
- 1986년: 서울대학교 공과대학 전자공학과(석사)
- 1991년: 미국 Georgia Institute of Technology 전자공학과(박사)
- 1983년 4월 - 1986년 1월: 서울대학병원 의공학과 연구원
- 1987년 9월 - 1991년 9월: 연구 조교 Georgia Institute of Technology
- 1992년 9월 - 현재: 서울대학교 의과대학 부속 의공학연구소 특별연구원
- 주관심분야: 이산신호 처리, 부분 정보로부터의 신호 복원 및 추정, 영상처리, Spectral Estimation, Multi-D이산 신호처리, Fractal, 의공학.