응용통계연구 제 6권 2호
1993년 9월 pp.401-408.

회귀직선 기울기의 순서성에 대한 비모수적 검정법[1)]

송문섭[2)], 이기훈[3)], 김순옥[4)]

요 약

본 논문에서는 회귀직선 기울기의 순서성에 대한 비모수적 검정법을 제안하였다. 자료의 정보를 최대한 활용하는 Potthoff형태의 검정통계량을 붓스트랩 분산추정량으로 표준화하여 점근 분포무관 검정을 한다. 또한 제안된 검정법의 특성과 효율을 대표본과 소표본에서 비교연구하였다.

1. 서 론

다음과 같은 회귀직선 모형을 가정하자.

$$Y_{ij} = \alpha_i + \beta_i x_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1,\dots,k \; ; \; j = 1,\dots,n_i ,$$

여기서 ε_{ij}는 평균이 0이고 분산이 σ^2인 분포함수 F를 독립적으로 따르는 확률변수이다.

본 연구에서는 k개의 회귀직선이 모두 평행하다는 귀무가설을 기울기가 점차로 증가한다는 순서대립가설(ordered alternatives)에 대하여 검정하고자 한다. 이때 가설들은 다음과 같다.

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k \quad 대 \quad H_1 : \beta_1 \le \beta_2 \le \cdots \le \beta_k \; (\beta_1 < \beta_k)$$

이에 관한 비모수 검정법을 $k=2$인 경우에 Hollander(1970), Potthoff(1974), Song(1978)이 제안하였고, 일반적인 경우에는 Adichie(1976), Rao and Gore(1984), Lee(1990,[7])가 제안한 방법 등이 있다.

Hollander(1970)는 표본의 크기가 2n일 때 서로 다른 관측값으로부터 n개의 서로 독립인 기울기 추정량을 얻어내고, 이를 이용하여 분포무관(distribution-free) 검정통계량을 제안하였다. Rao and Gore(1984)는 이를 k개의 회귀직선인 경우로 확장하였는데, 분포무관 검정법이 된다는 장점이 있으나 x의 범위가 등간격이어야한다는 제약조건 외에도 효율(efficiency)이 떨어지는 단점이 있다.

Adichie(1976)는 여러가지 형태의 검정통계량을 제안하였는데, 그중에서 비모수적 방법은 회귀식의 잔차에 기초하고 있다. 그러나 잔차의 크기는 x의 위치에 영향을 받으므로, 절대적인 비교가 불가능하다는 논리적인 취약점을 갖고 있다.

Potthoff(1974)는 n개의 관측값에서 모든 가능한 ${}_nC_2$ 개의 기울기 추정량을 구하고 이를 이용한 검정통계량을 제안하였는데, 이는 자료가 갖는 정보를 최대한 이용한다는 장점을 갖

---

1) 이 연구는 1992년도 교육부 기초과학 육성 연구비의 지원에 의한 것임
2) (151-742) 서울특별시 관악구 신림동 산56-1 서울대학교 계산통계학과
3) (560-759) 전라북도 전주시 완산구 효자동 전주대학교 통계학과
4) (151-742) 서울특별시 관악구 신림동 산56-1 서울대학교 자연과학대학 통계연구소

고 있다. 그러나 통계량의 분산이 모집단의 분포에 의존되어 실제적인 사용에는 어려움을 갖고 있다.

본 논문에서는 Potthoff(1974)의 통계량을 k개의 회귀직선 문제로 확장한 통계량을 제안하고, 그의 특성을 살펴보겠다. 또한, 통계량의 분산에 대한 일치추정량을 구하고, 이를 이용한 점근 분포무관 검정법(asymptotically distribution-free test)을 제안하겠다. 마지막으로 컴퓨터 모의실험에 의하여, 제안된 검정법과 기존의 검정법의 경험적 검정력(empirical power)을 비교하겠다.

2. 제안된 통계량과 그 특성

Potthoff의 통계량을 일반화하여 다음과 같은 검정통계량을 얻을 수 있다.

$$P = \sum_{u<v}^{k} \sum_{i<I}^{n_u} \sum_{j<J}^{n_v} \phi\left(\frac{Y_{vJ}-Y_{vj}}{x_{vJ}-x_{vj}} - \frac{Y_{uI}-Y_{ui}}{x_{uI}-x_{ui}} \right)$$

여기서 ϕ는 다음과 같이 정의되는 지시함수이다.

$$\phi(s) = \begin{cases} 1, & s>0 \\ 0, & s\le 0 . \end{cases}$$

이는 각 i번째 회귀직선에서 ${}_{n_i}C_2$ 개의 기울기 추정량을 구한 다음에, 이들 기울기에 Jonckheere(1954) 형태의 통계량을 적용한 것이다. P를 이용한 검정법은 기존의 검정법에 비하여 자료의 정보를 최대한으로 활용하므로 효율적이 될 것으로 기대한다. 그리고 이와 같은 통계량을 이용할 때는 각 회귀직선의 오차항이 등분산이라는 가정이 필요없다는 장점도 갖고 있다. 즉 오차항은 다음과 같은 가정을 만족하면 된다.

$$E(\varepsilon_{ij}) = 0 , \quad Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_i^2 , \quad i = 1,\cdots,k .$$

제안된 검정통계량은 H_0가 사실일 때, 다음과 같이 커널(kernel)의 차수(degree)가 4인 일표본 U-통계량으로 바꿀 수 있다.

$$U_N = {}_NC_4^{\,-1} \Sigma' \Phi(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}, X_{\alpha_4}), \quad N = \Sigma n_i ,$$

여기서 Σ'은 $1\le\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4\le N$을 만족하는 ${}_NC_4$개의 모든 경우에 대한 전체합이고,

$$X_\alpha = (x_\alpha^{(1)}, x_\alpha^{(2)}, x_\alpha^{(3)}) = \begin{cases} (\varepsilon_{1,\alpha},\ x_{1,\alpha},\ 1), & 1\le\alpha\le n_1 \\ (\varepsilon_{2,\alpha-n_1},\ x_{2,\alpha-n_1},\ 2), & n_1<\alpha\le n_1+n_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ (\varepsilon_{k,\alpha-\sum_1^{k-1} n_i},\ x_{k,\alpha-\sum_1^{k-1} n_i},\ k), & \sum_1^{k-1} n_i<\alpha\le N , \end{cases}$$

$$\Phi(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}, X_{\alpha_4}) = \sum_{4!} \zeta(X_h, X_H, X_{h'}, X_{H'}) \left[\phi\left(\frac{x_{H'}^{(1)} - x_{h'}^{(1)}}{x_{H'}^{(2)} - x_{h'}^{(2)}} - \frac{x_H^{(1)} - x_h^{(1)}}{x_H^{(2)} - x_h^{(2)}} \right) - \frac{1}{2} \right],$$

$$\zeta(X_h, X_H, X_{h'}, X_{H'}) = \begin{cases} 1, & \text{만약 } x_h^{(3)} = x_H^{(3)} < x_{h'}^{(3)} = x_{H'}^{(3)} \\ & \text{그리고 } x_h^{(2)} < x_H^{(2)},\ x_{h'}^{(2)} < x_{H'}^{(2)} \text{ 일때,} \\ 0, & \text{기타의 경우} \end{cases}$$

위의 정의에 의해 Φ는 포함된 변수에 대해 대칭인 커널이므로, U_N은 U-통계량이 되며 제안된 통계량과 다음의 관계가 성립한다.

$$U_N = {}_N C_4^{-1}(P - k(k-1)/4)$$

U_N은 귀무가설 하에서 점근적으로 정규분포를 따른다. 이의 증명은 Hoeffding (1948)의 정리 8.1을 이용하는데, 우리는 단지 세가지 조건(Hoeffding(1948)의 식 (8.2), (8.3), (8.4))이 만족됨을 보이면 된다. Φ 의 절대값이 유계되어 있다는 사실로 부터 처음 두 조건인 (8.2)식과 (8.3)식이 성립함을 쉽게 알 수 있다. 또한, Potthoff(1974)에서의 증명과정과 같은 절차를 따르면, 다음과 같은 조건하에서 세번째 조건((8.4)식)이 성립함을 보일 수 있다.

1) $\lim_{N\to\infty} \dfrac{n_i}{N} = \lambda_i$, $0<\lambda_i<1$; $i=1,\cdots,k$.

2) 모든 u, $v(u<v)$와 $1\le i\le n_u$를 만족하는 모든 i에 대하여

$$\frac{x_{vJ}-x_{vj}}{x_{uI}-x_{ui}} < K_o \ , \ 1\le i\le I\le n_u \ ; \ 1\le j\le J\le n_v$$

의 조건을 만족하는 x의 조합의 수가 $\Pi(n_u-i)\ {}_{n_v}C_2$ 보다 크게되는 $K_o(K_o>0)$ 와 $\Pi(0<\Pi<1)$가 존재한다.

그러나 P의 분산이 미지의 모집단 분포 F에 종속되어 있으므로, 이를 이용한 검정법의 직접적인 적용은 어려움을 갖고 있다. 본 논문에서는 붓스트랩기법을 사용하여 분산의 일치 추정량을 구하고, 이 값으로 P를 표준화하는 점근 분포무관 검정법(asymptotically distribution-free test)을 제안한다.

3. 붓스트랩에 의한 분산추정

이 절에서는 분산의 일치추정량을 붓스트랩기법으로 구하는 과정을 설명하겠다.
회귀모형에서 확률변수는 오차항인데 이들은 직접 관측이 되지 않으므로, 오차항을 추정한 다음에 이들을 붓스트랩 추출하게 된다. 즉, 오차항의 추정값들은

$$e_{ij} = Y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i x_{ij} \ , \ i=1,\cdots,k \ ; \ j=1,\cdots,n_i$$

로 주어진다. 여기서 α와 β의 추정값은 흔히 최소제곱 추정값을 사용하는데, 어떤 추정값을 사용하든지 결과는 거의 비슷하게 나옴을 시뮬레이션을 통해 알 수 있었다.
본 본문에서 붓스트랩기법으로 분산의 추정량을 구하는 절차는 Efron(1982)을 참조하여 다음과 같이 정하였다.

1. e_{ij}에 $1/n_i$의 확률이 부여된 분포함수 F_{in_i}를 갖는 모집단에서 n_i개의 확률표본 e^*_{i1} , e^*_{i2} ,⋯, $e^*_{in_i}$를 얻는다.

2. $Y^*_{ij} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i x_{ij} + e^*_{ij}$라고 할 때 검정통계량의 값을 다음과 같이 계산한다.

$$P^* = \sum_{u<v}^{k} \sum_{i<I}^{n_u}\sum_{j<J}^{n_v} \phi\left(\frac{Y^*_{vJ}-Y^*_{vj}}{x_{vJ}-x_{vj}} - \frac{Y^*_{uI}-Y^*_{ui}}{x_{uI}-x_{ui}} \right)$$

3. 위의 절차 1, 2를 독립적으로 B번 반복하여 B개의 붓스트랩 통계량인 P^{*1}, $P^{*2}, \cdots, P^{*B}$를 계산하고, 이들의 분산을 다음과 같이 구한다.

$$\hat{Var}^{*} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}(P^{*b} - P)^2$$

제안된 통계량은 U-통계량이므로 분산에 대한 붓스트랩추정량은 일치추정량이다 (Lee(1990),[6]). 따라서 위의 붓스트랩 분산추정값으로 표준화되었을 때 점근적으로 정규분포를 따르게 된다.

4. 점근상대효율

전이대립가설(translation alternatives) 하에서 제안된 검정법과 모수적 방법과의 점근상대효율을 구해보자. 계산을 간단히 하기 위하여 k개 회귀직선의 실험점은 모두 같다고 가정한다. 즉, $x_{uj} = x_{vj}$, u, $v = 1, \cdots, k$; $j = 1, \cdots, n$ 이다.

순서성에 대한 전이대립가설은 다음과 같다.

$$H_N : \beta_i = \beta + \theta_i / C_n^{1/2}, \quad \theta_1 \le \cdots \le \theta_k \ (\theta_1 < \theta_k)$$

여기서 $C_n = \sum_{i<I}(x_{uI} - x_{ui})^2$, $u = 1, \cdots, k$.

점근분포를 구하기위해 P와 동일한 검정결과를 갖는 다음의 통계량을 소개한다.

$$P' = {}_nC_2^{-2} = P \quad P$$

2절의 조건 1), 2)와 $\int f(x)^2 dx < \infty$ $(F' = f)$의 조건이 만족되면 P'은 H_N 하에서 평균과 분산이 다음과 같은 점근정규분포를 따른다.

$$E(P') = k(k-1)/4 + C_n^{-1/2}\sum_{u<v}(\theta_v - \theta_u)\int \overline{f_n}(x)^2 dx + o(C_n^{-1/2})$$

$$Var(P') = \frac{1}{6}\,{}_nC_2^{-1}\sum_{h=1}^{k}(2h-1-k)^2 + o(C_n^{-1})$$

여기서 $\overline{f_n}(x) = {}_nC_2^{-1}\sum_{i<I} f_{uiI}(x)$, f_{uiI} 는 $(\varepsilon_{uI} - \varepsilon_{ui})/(x_{uI} - x_{ui})$의 확률밀도함수이다.

이와 비교할 모수적 통계량은 다음과 같다.

$$S = \sum_{u<v}(\bar{\beta}_v - \bar{\beta}_u), \quad \bar{\beta}_i : \text{최소제곱추정량}$$

이는 H_N 하에서 점근정규분포를 따르며 평균과 분산이 다음과 같다.

$$E(S) = \sum_{u<v} C_n^{-1/2}(\theta_v - \theta_u)$$

$$Var(S) = \sum_{h=1}^{k}(2h-1-k)^2\sigma^2/C_n$$

Skillings and Wolfe(1978)의 정리를 이용하면 점근상대효율은 다음과 같다.

$$ARE(P,\ S)\ =\ 12\ \ \bar{\sigma}_n^{\ 2}\{\int \overline{f_n}(x)^2 dx\}^2$$

여기서 $\bar{\sigma}_n^{\ 2}$는 $\overline{f_n}(x)$의 확률밀도함수를 갖는 확률변수의 분산이다. 위의 식의 하한은 0.864로 알려져 있다.

5. 소표본 검정력 비교

이 절에서는 제안된 검정법을 기존의 검정법과 비교하기 위하여 소표본에서 시뮬레이션을 시행한 결과를 요약한다. 제안된 검정법에서는 검정통계량 P를 붓스트랩 분산추정값으로 표준화한 통계량이 점근정규분포에 따름을 이용하여 기각값을 구하였다.

비교하는 검정법은 Adichie(1976)가 제안한 모수적 방법과 비모수적 방법의 두 가지로 각각 다음과 같이 주어진다.

$$S_t\ =\ \Sigma t_i\ \bar{\beta}_i\ /\ \hat{\sigma}\,(\Sigma\, t_i^2/C_i)^{1/2}$$

$$S(\varphi)\ =\ \Sigma t_i T^*_{n_i} /\ \{12\,\Sigma\, C_i\ \Sigma t_i^2/\rho_i\}^{1/2}$$

여기서

$$t_i\ =\ C_i(S_i - \Sigma\rho_j S_j)\ ;\ C_i\ =\ \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2\ ;\ S_i\ =\ C_1 + \cdots + C_{i-1} + C_i/2\ ,$$

$$\rho_i\ =\ C_i/\,\Sigma C_j\ ;\ \hat{\sigma}^2\ =\ \Sigma\Sigma e_{ij}^2/\,(N-2k)\quad ;\ T^*_{n_i}\ =\ \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)R^*_{ij}/\,(n_i+1)C_i\ ,$$

R^*_{ij} 는 i 번째 직선에서 j 번째 잔차의 순위이다.

모의실험에서 회귀직선은 4개(k=4)를 비교하였고, 각 회귀선에서 표본크기는 $n_i=10$ 으로 동일하게 하였으며, 설계점은 (1, 2,..., 10)로 고정하였다. 비교에 쓰인 통계량이 모두 α_i의 값에 무관하므로 각 직선에서 $\alpha_i=0$ 으로 하였다. 기울기 β_i들은

$$\beta_i\ =\ 1\ +\ (i-1)m\Delta\ ,\ i\ =\ 1,\ 2,\cdots,\ k$$

로 하였는데, 여기서 Δ는 혼합표본에서의 β의 최소제곱 추정량의 표준오차이다. m은 검정력의 비교를 위하여 각 분포에서 적당한 값을 주었다. 오차항의 분포로는 균일분포, 정규분포, 이중지수분포, 오염정규분포, Cauchy분포를 사용하였다. 여기서 오염정규분포는 분포함수가 $(1-\varepsilon)\Phi(x)\ +\ \varepsilon\Phi(x/\varepsilon)$, $\Phi(\,\cdot\,)$는 표준정규분포함수, 로 주어지는 분포이다.

검정통계량의 분산추정을 위한 붓스트랩 반복횟수는 B=100으로 하였고, 1000번 반복실험하여 귀무가설이 기각되는 횟수를 세어 표 5.1을 얻었다. 따라서 표 5.1의 숫자들은 경험적 유의수준과 경험적 검정력에 1000을 곱한 값이 된다.

표에서 m=0.0 인 경우의 검정력은 경험적 유의수준을 나타내며, 심각하게 문제가 되는 것은 없는 것으로 판단된다. 다만, Adichie의 비모수적 방법인 $S(\varphi)$는 다른 검정법보다 유의수준이 불안정해 보인다. 예를들어 정규분포와 Cauchy 분포에서 경험적 유의수준이 $2\times$(표준오차)의

범위를 벗어나고 있다.

검정력에서는, 모수적 방법이 짧은 꼬리를 갖는 균일분포와 보통의 꼬리를 갖는 정규분포에서 비모수적 방법보다 더 높은 검정력을 갖고 있다. 이중지수분포에서는 세 검정법이 거의 비슷한 검정력을 보이고 있다. 그러나 $\sigma=5$ 인 정규분포가 10%의 확률로 오염된 정규분포에서는 모수적 방법 보다 비모수적 방법의 검정력이 우수한 것으로 나타나고 있다. 특히 Cauchy 분포와 같이 극단적으로 두터운 꼬리를 갖는 경우에는 모수적 방법의 검정력이 심각하게 떨어지는 것으로 판명되었다.

비모수적 방법인 $S(\varphi)$ 와 P는 상당히 비슷한 결과를 보여준다. 즉, 균일분포와 정규분포에서는 Adichie의 방법인 $S(\varphi)$보다 제안된 방법인 P의 검정력이 약간 우세해 보이나, 이중지수분포와 오염정규분포에서는 비슷한 결과를 보인다. Cauchy분포에서는 $S(\varphi)$의 유의수준이 요구된 수준보다 훨씬 높게 시작한 때문에 검정력의 비교가 어렵다.

전체적으로 제안된 검정법은 유의수준이나 검정력에서 Adichie의 비모수적 방법과 비슷한 결과를 보이면서도 좀더 안정된 유의수준과 검정력을 나타내는 것으로 판단된다.

표 5.1 경험적 유의수준과 검정력 (×1000)
($k=4$, $n_1=n_2=n_3=n_4=10$)

분포	m	α=0.05			α=0.10		
		S_t	$S(\varphi)$	P	S_t	$S(\varphi)$	P
균일분포	0.0	45	44	43	90	91	87
	0.1	378	320	518	518	482	477
	0.2	835	747	800	911	846	884
	0.3	993	965	990	998	991	995
정규분포	0.0	40	34	51	97	86	106
	1.0	318	277	305	460	419	448
	2.0	704	637	669	817	763	788
	3.0	957	901	936	983	966	979
이중지수 분포	0.0	51	45	47	96	102	97
	1.4	212	205	213	335	337	340
	2.8	490	512	506	631	658	645
	4.2	751	747	752	837	858	843
오염정규 분포 (ε=0.1, σ=5)	0.0	49	44	50	101	94	99
	1.0	185	179	191	286	282	285
	2.0	419	419	425	548	574	572
	3.0	686	702	701	786	816	813
Cauchy 분포	0.0	62	70	59	110	126	112
	0.6	109	213	164	182	357	283
	1.2	177	530	442	276	655	554
	1.8	283	763	627	391	852	742

S_t : Adichie의 모수적 검정법
$S(\varphi)$: Adichie의 비모수적 검정법
P : 제안된 검정법
50 또는 950 근방에서 검정력 (×1000)의 표준오차는 6.9
300 또는 700 근방에서 검정력 (×1000)의 표준오차는 14.5

참 고 문 헌

[1] Adichie, J. N. (1976), "Testing Parallelism of Regression Lines against Ordered Alternatives," *Communication in Statistics - Theory and Methods*, **A5**(11), 985-997.

[2] Efron, B. (1982), *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*, SIAM, Philadelphia.

[3] Hoeffding, W. (1948), "A Class of Statistics with Asymptotically Normal Distribution," *The Annals of Mathematical Statistics*, **19**, 293-325.

[4] Hollander, M. (1970), "A Distribution-Free Test for Parallelism," *Journal of the American Statistical Association*, **65**, 1153-1162.

[5] Jonckheere, A. R. (1954), "A Distribution-Free k-Sample Test against Ordered Alternatives," *Biometrika*, **41**, 133-145.

[6] Lee, A. J. (1990), *U-Statistics: Theory and Practice*, Marcel Dekker, New York.

[7] Lee, K. H. (1990), On a Nonparametric Test for the Parallelism of Several Regression Lines against Ordered Alternatives, Ph.D. Dissertation, Seoul National University, Seoul.

[8] Potthoff, R. F. (1974), "A Nonparametric Test of Whether Two Simple Regression Lines are Parallel," *The Annals of Statistics*, **2**, 295-305.

[9] Rao, K. S. M. and Gore, A. P. (1984), "Testing Concurrence and Parallelism of Several Sample Regressions against Ordered Alternatives," *Mathematische Operationsforshung und Statistik, Series Statistics*, **15**, 43-50.

[10] Sen, P. K. (1977), "Some Invariance Principles Relating to Jackknifing and Their Role in Sequential Analysis," *The Annals of Statistics*, **5**, 316-329.

[11] Skillings, J. H. and Wolfe, D. A. (1978), "Distribution-Free Tests for Ordered Alternatives in a Randomized Block Design," *Journal of the American Statistical Association*, **73**, 427-431.

[12] Song, M. S. (1978), "Use of the Wilcoxon Test for the Parallelism of Two Regression Lines," *Journal of the Korean Mathematical Society* **14**, 223-228.

A Nonparametric Test for Parallelism of Regression Lines against Ordered Alternatives[1)]

Moon Sup Song[2)], Ki Hoon Lee[3)] and Soon-Ock Kim[4)]

Abstract

This paper suggests a nonparametric test for the parallelism of several regression lines against ordered alternatives. The test statistic is an extension of the Potthoff statistic. The asymptotic variance of the proposed statistic is estimated by Bootstrap method. The proposed test are compared with the Adichie's parametric and nonparametric tests.

---

1) This work was partially supported by the Basic Science Research Institute program, Ministry of Education, 1992, Project No. BSRI-92-108.

2) Department of Computer Science and Statistics, Seoul National University, Seoul, 151-742, Korea.

3) Department of Statistics, Joen-ju University, Joen-ju 560-759, Korea.

4) Statistical Research Institude, College of Natural Science, Seoul National University, Seoul, 151-742, Korea.