

이산형 설계변수를 갖는 철근콘크리트보의 최적설계

Optimal Design for R.C. Beam with Discrete Design Variables

구 봉 근*
Koo, Bong Kuen

한 상 훈**
Han, Sang Hoon

김 홍 룡*
Kim, Hong Yong

요 약

본 논문의 목적은 R.C.보 최적설계에 이산수학적계획법을 적용하여 상세설계를 포함하는 실제설계의 가능성을 연구하기 위한 것이다.

이산최적화문제에서 설계변수로는 단면의 총높이, 폭, 유효높이 및 길이방향철근의 단면적 그리고 전단철근의 단면적과 길이방향철근의 절단점과 같은 상세변수 등이 고려되었다. 목적함수는 경비함수로 취했으며, 제약조건으로는 강도설계법에 의한 설계휨강도, 전단강도, 연성, 사용성, 콘크리트 덮개 및 철근간격, 복부보강 그리고 정착길이와 길이방향철근의 절단점 등에 관한 시방서 요구사항을 고려하여 문제를 형성하였다.

이산변수를 갖는 최적설계를 효율적으로 실행하기 위해 첫째단계에서 Feasible Direction Method를 이용하여 연속최적해를 구했으며, 둘째단계에서 분기한계법(Branch and bound method)을 이용하여 이산최적해를 얻는 최적화 알고리즘을 제안하였다.

제안된 알고리즘의 신뢰도를 검증하기 위해 2개의 이산설계변수를 갖는 수치예에 적용하여 도해법 및 rounded-up method와 그 결과를 비교하였고, 단순지지된 R.C.보 및 2경간연속 R.C.보에 적용하여 제안된 알고리즘의 신뢰도, 효율성 및 적용성을 입증하였다.

Abstract

The objective of this paper is to look into the possibility of the detailed and practical optimum design of reinforced concrete beam using methods of discrete mathematical programming.

In this discrete optimum formulation, the design variables are the overall depth, width and effective depth of members, and area of longitudinal reinforcement. In addition, the details such as the amount of web reinforcement and cutoff points of longitudinal reinforcement are also considered as variables. Total cost has been used as the objective function. The constraints include the code requirements such as flexural strength, shear strength, ductility, serviceability, concrete cover, spacing, web reinforcement, and development length and cutoff points of longitudinal reinforcement.

An optimization algorithm is presented for effective optimum design of R.C. beam with discrete design variables. First, the continuous variable optimization can be achieved by Feasible Direction

* 정회원, 충북대학교 토목공학과 교수, 공박
** 정회원, 충북대학교 토목공학과 부교수, 공박
*** 충북대학교 토목공학과 박사과정 수료

• 본 논문에 대한 토의를 1994년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 1994년 4월호에 토의회답을 게재하겠습니다.

Method. Using the results obtained from the continuous variable optimization, a branch and bound method is used to obtain the discrete design values.

The proposed algorithm is applied to test problem for reliability, and the results are compared with those of graphical method and rounded-up method. And a simply supported R.C. beam and a two-span continuous R.C. beam are presented as numerical examples for effectiveness and applicability.

It is considered that the presented algorithm can be effectively applied to the discrete optimum design of R.C. beams.

Keywords : optimization, optimum design, discrete optimization, reinforced concrete beam, branch and bound method, constraints, code, objective function, discrete design variables.

1. 서 론

설계란 공학의 가장 기본적인 기능 중의 하나이다. 설계자의 목적은 가능한 한 경제적이면서 안전하고 사용성이 좋은 구조물을 설계하는 것이다. 실제로, 안전성과 사용성에 대한 규정 및 설계방법은 1989년도 콘크리트 표준시방서⁽¹⁾(이하 "시방서"로 표현)나 철근콘크리트 설계편람⁽²⁾ 등에 의해 제공되고 있다. 그러나, 철근콘크리트 구조설계에 있어서 경제적인 설계는 대개 설계자의 경험과 직관에 의해 의존하고 있는 실정이다. 또한 지금까지의 철근콘크리트 구조물 최적화는 구조물의 최종적인 균형 및 조화에는 관심없이 문제의 일반적인 형성에만 관심을 두어왔다. 특히 철근콘크리트 구조물에 실제 적용하기 위해서는 기본적인 설계와 상세설계가 동시에 고려되어야만 한다. 이것은 주어진 설계 방법과 시방서의 모든 요구사항을 설계제약조건으로 고려하므로써 설계 최적화 문제로 공식화 할 수 있다.

또한, 철근콘크리트 구조물의 최적설계가 실제 설계실무에 적용되기 위하여, 철근의 양과 콘크리트의 단면치수가 이산변수로 고려되어야 한다. 따라서, 철근의 양은 KS D 3504(콘크리트용 봉강)에 의하여 결정되고, 콘크리트의 단면치수는 거의 1~2 cm씩 증분된 정수값 중에서 결정되어 사용된다.

몇몇 연구자들이 구조물의 이산최적화 방법의

개발을 시도했으며^(3,4,5) Liebman, Khachaturian, Chanaratna⁽⁶⁾는 철근콘크리트 구조물에 내부벌칙함수(Interior penalty function)를 이용하여 정수경사방향에 근거를 둔 이산기법(Discrete method)을 개발 했다. 철근의 양과 콘크리트단면의 치수를 이산변수로써 고려하였고, 구조물의 경비를 목적함수로 취했다. 제약조건은 단지 강도제약 조건만 고려하였다. Yang과 Shao⁽⁷⁾ 등은 ACI Code (318-89)를 근거로 철근콘크리트 구조물에 대한 가능한 제약조건식을 구성하였고, GRG법으로 최적설계를 시도하였다. 그러나, 설계변수를 이산설계변수로 고려하지 않고 연속설계변수로 고려하였다. Olsen과 Vanderplaats⁽⁸⁾는 비선형최적화문제를 선형근사화시키고 여기에 선형혼합-정수계획법을 적용하여 이산최적해를 구하는 기법을 개발하였다. 그러나, 이 기법은 표준화된 강구조물 최적설계에는 효율적으로 적용될 수 있지만 철근콘크리트구조물과 같이 많은 설계변수와 다양하고 복잡한 제약조건을 갖는 경우에는 비효율적이다.

따라서, 본 논문은 철근콘크리트보의 최적설계에 있어서 이산비선형문제의 최적화에 관한 연구를 목적으로 하였고, 특히 다음과 같은 내용을 수행하였다.

(1) 강도설계법에 의한 철근콘크리트보 설계에서 고려되어야만 하는 시방서상의 가능한 모든 규정을 고려하여 제약조건식으로 표현한다.

(2) 철근콘크리트 구조물 최적화는 강구조물의 최적화 보다 설계변수의 수 및 고려해야 될 제약 조건의 수가 크게 증가한다. 이러한 경우 처음부터 이산설계변수의 이산집합으로부터 최적화를 시도하게 되면 가능한 이산설계변수의 조합이 크게 증가하므로 계산비용이 많이 들게 된다. 따라서, 연속변수최적화문제로 고려하여 연속최적해를 구한 다음 그 값을 근거로 이산최적해를 분기한계법(branch and bound method)에 의해 구하도록 하는 알고리즘을 제안한다.

(3) 제안된 알고리즘의 신뢰도를 검증하기 위해 두개의 이산설계변수를 갖는 단철근직사각형보 단면설계에 관한 최적화문제를 형성하였고, 도해법 및 rounded-up method와 비교하여 신뢰도 및 효율성을 비교분석한다. 또한, 이를 단순지지보 및 2경간연속보 최적설계에 적용하여 실제설계실무에서 필요로 하는 보의 설계가 될 수 있는 가능성을 분석한다.

2. 시방서에 의한 R.C.보의 이산최적화 문제형성

이산형 설계변수를 갖는 철근콘크리트 보의 최적설계를 수행하기 위한 일반적인 수학적계획문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Minimize } F(X) \quad (1)$$

$$\text{Subject to } g_j(X) \leq 0 \quad j=1, m \quad (2)$$

$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U \quad i=1, n \quad (3)$$

$$X_i \in (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq}) \quad (4)$$

여기서, $F(X)$ 와 $g_j(X)$ 는 각각 목적함수와 제약 조건식이고, X_i^L 과 X_i^U 는 각각 설계변수 X_i 에 부과된 하한치 및 상한치를 나타낸다. m 은 제약조건식의 수이고, n 은 이산설계변수의 수이다. d_{ij} 는 이산설계변수 i 에 대한 j 번째 이산값이다.

본 논문에서 목적함수는 구조물의 경비함수로 취하였고, 제약조건들은 구조물의 안전성과 사용성 요구조건을 만족하기 위해 시방서를 근거로 하였으며 설계휨강도, 전단강도, 연성, 사용성, 길이방향철근의 정착길이 및 절단점, 철근의 간격제한

그리고 콘크리트 덮개 등에 관한 제약조건들을 고려하였다.

또한 이산설계변수로는 보 단면의 총높이 h 와 폭 b , 유효높이 d , 인장철근의 단면적 A_s , 압축철근의 단면적 A_s' , 길이방향철근의 절단점 l , 그리고 전단철근의 단면적 A_v 로 취하였다.

2.1 목적함수

$$C = C_s \sum_{i=1}^{N_b} (V_b)_i + C_c \sum_{i=1}^{N_b} (bhL)_i \quad (5)$$

여기서, C 는 구조물의 총 경비(원)이고 C_s 와 C_c 는 각각 단위체적당의 철근경비(원/cm³)와 콘크리트경비(원/cm³)이다. N_b 는 구조물을 구성하는 보의 수이고, $(V_b)_i$ 는 i 번째 보의 철근의 체적이며, L_i 는 i 번째 보의 길이이다.

2.2 제약조건

1) 설계 휨강도 제약조건

보에서 지배단면에 대한 일반적인 설계휨강도 제약조건식은 다음과 같이 표현된다.

$$M_u - \Phi_f M_n \leq 0 \quad (6)$$

$$M_{ul} - \Phi_f M_{nl} \leq 0 \quad (6a)$$

$$M_{um} - \Phi_f M_{nm} \leq 0 \quad (6b)$$

$$M_{ur} - \Phi_f M_{nr} \leq 0 \quad (6c)$$

여기서, Φ_f 는 강도감소계수이며, 휨부재에서는 0.85의 값이다. M_{ul} , M_{um} 및 M_{ur} 은 각각 보의 좌단, 중앙단면, 우단에서의 극한모멘트이며, M_{nl} , M_{nm} 및 M_{nr} 은 각각의 공칭모멘트강도이다.

본 연구에서는 압축철근을 갖는 직사각형 단면으로 고려하였으며, 휨강도에 기여하는 압축철근은 항복응력 σ_y 에 도달한다고 가정하였다. 따라서, 식(6)에 사용되는 보단면의 공칭모멘트강도를 설계변수들의 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$M_n = A_s \sigma_y d + A_s' \sigma_y d - A_s' \sigma_y h - \frac{\sigma_y^2}{1.7 \sigma_{ck}} \frac{(A_s - A_s')^2}{b} \quad (7)$$

2) 전단강도 제약조건

보의 지배단면에 대한 전단강도 제약조건식은 다음과 같다.

$$S_u - \Phi_v S_n \leq 0 \quad (8)$$

$$S_{ul} - \Phi_v S_{nl} \leq 0 \quad (8a)$$

$$S_{ur} - \Phi_v S_{nr} \leq 0 \quad (8b)$$

$$S_{uql} - \Phi_v S_{nql} \leq 0 \quad (8c)$$

$$S_{uqr} - \Phi_v S_{nqr} \leq 0 \quad (8d)$$

여기서, Φ_v 는 전단에 대한 강도감소계수이며 0.70의 값이다. S_{ul} , S_{ur} , S_{uql} 및 S_{uqr} 은 각각 보의 좌단, 우단, 좌단으로부터 $L/4$ 되는 단면, 우단으로부터 $L/4$ 되는 단면에서의 극한전단력이며 S_{nl} , S_{nr} , S_{nql} 및 S_{nqr} 은 각각의 공칭전단강도이다.

보 단면의 공칭전단강도는 다음과 같다.

$$S_n = S_c + S_s \quad (9)$$

여기서, S_c 는 콘크리트가 부담하는 공칭전단강도이며, S_s 는 전단철근이 부담하는 공칭전단강도이다. 본 연구에서, 콘크리트의 전단강도는 시방서 6.3.1의 실용식 $S_c = 0.53 \sqrt{\sigma_{ck}} b_0 d$ 를 사용하였으며, 철근의 공칭전단강도는 수직스터럽을 사용하는 것으로 하여 $S_s = A_v \sigma_y d / s$ 로 계산하였다. 이때, 시방서 6.5.4(1)과 6.5.4(3)에 의하면, 수직스터럽을 사용하는 경우 스텐드의 간격은 $0.5d$ 이하이어야 하고, S_s 가 $1.1 \sqrt{\sigma_{ck}} b_0 d$ 를 초과하는 경우 $0.25d$ 이하로 되어야 하기 때문에 전단철근의 간격을 보의 지점으로 부터 $L/4$ 까지는 $0.25d$, 나머지는 $0.5d$ 로 가정하는 것이 보다 실제적이다.

따라서, 제약조건식을 구성하기 위한 보의 지점 단면과 $L/4$ 지점 단면의 공칭전단강도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_{nl} = 0.53 \sqrt{\sigma_{ck}} b d + 4 \sigma_y A_{vl} \quad (10a)$$

$$S_{nr} = 0.53 \sqrt{\sigma_{ck}} b d + 4 \sigma_y A_{vr} \quad (10b)$$

$$S_{nq} = 0.53 \sqrt{\sigma_{ck}} b d + 2 \sigma_y A_{vm} \quad (10c)$$

3) 연성거동을 위한 제약조건식

휨부재의 강도설계법에서 철근량은 연성거동을 보장하기 위해 제한된다. 이러한 조건을 만족시키기 위해 시방서 5.3(3)과 5.5에서는 철근량의 상한치와 하한치를 규정하였고, 이를 제약조건식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{A_s}{bd} - \frac{A_s'}{bd} - 0.75 p_b \leq 0 \quad (11)$$

$$\frac{14}{\sigma_y} - \frac{A_s}{bd} \leq 0 \quad (12)$$

여기서, p_b 는 휨단면의 균형철근비이다.

4) 전단철근의 제한에 관한 제약조건식

보에서 전단철근이 부담하는 전단강도가 크다고 하면, 이는 콘크리트의 압축응력이 커지게 된다는 것을 의미한다. 이것은 전단철근량을 막연하게 증가시킬 수 없다는 것을 의미한다. 또한, 시방서 6.5.5(3)에 의하면 휨부재에 반복하중이 작용하는 경우에는 정하중하에서 보다 다소 작은 응력에서도 일어날 가능성이 있는 사인장균열이 설계에 고려되어야 하기 때문에 전단보강이 필요치 않음을 알 수 있더라도 최소전단철근을 사용하여야 한다.

따라서, 시방서 6.5.5(3)과 6.5.6(8)에 규정된 내용을 이용하여 전단철근의 제한에 관한 제약조건식을 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{A_{vl}}{bd} - \frac{2.1 \sqrt{\sigma_{ck}}}{4 \sigma_y} \leq 0 \quad (13a)$$

$$\frac{A_{vr}}{bd} - \frac{2.1 \sqrt{\sigma_{ck}}}{4 \sigma_y} \leq 0 \quad (13b)$$

$$\frac{A_{vm}}{bd} - \frac{2.1 \sqrt{\sigma_{ck}}}{2 \sigma_y} \leq 0 \quad (13c)$$

$$\frac{3.5}{4 \sigma_y} - \frac{A_{vl}}{bd} \leq 0 \quad (13d)$$

$$\frac{3.5}{4\sigma_y} - \frac{A_{vr}}{bd} \leq 0 \quad (13e)$$

$$\frac{3.5}{2\sigma_y} - \frac{A_{vm}}{bcd} \leq 0 \quad (13f)$$

5) 사용성에 관한 제약조건식

강도설계법에 의해 부재의 단면이 설계된다면, 사용하중하에서 구조물 사용성의 평가는 중요하고 고려사항이다. 시방서 3.5.1에 의하면 휨을 받는 철근콘크리트부재는 사용하중하에서 구조물의 강도나 실제 사용에 해로운 영향을 주는 처짐 또는 그외 변형이 일어나지 않도록 충분한 강성을 가져야 한다고 규정하고 있다. 또한, 시방서 3.5.2(1)에서는 처짐계산을 하지 않는 경우, 휨부재의 최소두께를 시방서 표 3.1에 제시하였다. 그리고, 시방서 5.7에서는 높이가 큰 보가 되는 것을 피하기 위해, 순경간에 대한 총 높이의 비를 제한하였다. 이와 같은 사항을 사용성에 관한 제약조건식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\alpha_1 L \leq h \leq \alpha_2 L \quad (14)$$

$$\alpha_3 L \leq b \leq h \quad (15)$$

여기서, α_1 은 시방서 3.5.2(1)에 제시된 상수로써 $\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ 일 때 단순지지보에서는 1/21.5, 1단연속보에서는 1/25, 양단연속보에서 1/28.5 그리고 캔틸레버보에서 1/11 이다. α_2 는 시방서 5.7에 제시된 상수로써 연속보에서는 2/5이상, 단순보에서는 4/5이상이다. α_3 는 보의 총 높이에 대한 폭의 비의 지정된 값이다.

6) 길이방향철근의 절단점에 관한 제약조건식

보에 사인장 균열이 형성된 후에 철근이 받는 인장력은 그 단면에서 외적모멘트에 저항하기 위해 요구되는 인장력 보다 커지게 된다. 이러한 이유와 다른 이유들로부터 휨모멘트도에서 통상적으로 설계에 사용하는 최대모멘트의 발생위치가 변할 수 있다. 최대모멘트의 위치가 변하는 것을 보완하기 위해 시방서 7.10.1(3)에서 다음과 같이 규정하였다. 즉, 단면에서의 철근의 절단점은 이론적인 절단점에서 보의 유효높이 d 또는 12 d_b 중 큰 값 만큼 모멘트가 감소되는 방향으로 더 연

장하여 절단한다.

따라서, 보의 길이방향철근의 절단점에 대한 제약조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{ua} - \beta_1 M_{up} \leq 0 \quad (16)$$

$$\beta_2 M_{un} - M_{ub} \leq 0 \quad (17)$$

여기서, β_1 과 β_2 는 각각 최대정,부모멘트 발생 단면에서 소요되는 철근과 절단되는 단면에서 배치되는 철근의 비(1/2, 1/3, ...)이다. M_{up} 와 M_{un} 은 각각 최대정,부모멘트 발생 단면에서의 정,부 극한저항모멘트이고, M_{ua} 와 M_{ub} 는 각각 철근의 일부가 최대정,부모멘트 발생 단면으로부터 절단되어지는 단면에서의 정,부 극한모멘트이다.

7) 길이방향철근의 정착길이에 관한 제약조건식

시방서 7.10.1(3),(4)에 의하면, 단순지간의 받침부와 캔틸레버의 자유단을 제외하고 철근은 휨을 저항하는데 더 이상 필요하지 않은 점에서 보의 유효높이 또는 12d_b 중 큰 값만큼 더 연장해야 한다. 그리고, 연속철근은 절곡되거나 끊은 철근이 휨을 저항하는데 더 이상 필요하지 않은 점에서 정착길이 l_d 이상의 매입길이를 가져야 한다.

따라서, 보에서의 정착길이에 대한 제약조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$30 - l_d \leq 0 \quad (18a)$$

$$l_d - l_1 \leq 0 \quad (18b)$$

$$l_d - [l_{1-1} - (l_1 - d)] \leq 0 \quad (18c)$$

$$l_d - [l_{1-1} - (l_1 - 12d_b)] \leq 0 \quad (18d)$$

여기서, l_d는 시방서 7.2에 의한 정착길이이고, l₁는 최대모멘트단면으로부터 1번째 철근의 길이이다. 보의 단순지지점에서 외적휨모멘트는 매우 작고 절단력은 크다. 그러므로, 휨철근의 면적이 작아지기 때문에 휨부착강도가 문제될 수 있다. 시방서 7.11.2에 의하면 단순지지점과 반곡점에서 외적모멘트 인장철근은 시방서 7.2에 따라 σ_y 에 대하여 구한 l_d가 식(2.20a)를 만족하도록 철근지름을

제한하였고, 받침부에서 l_a 는 지지부의 중심에서 연장된 매입길이라야 하고, 반곡점에서 l_a 는 부재의 유효높이와 철근지름의 12배 중 큰 값으로 제한하고 있다. 따라서, 철근의 끝부분이 반력으로 눌러있는 단순지지점이나 반곡점에서 추가되는 정착길이 제약조건식은 다음과 같다.

$$l_d \leq l_a + \frac{M_n}{S_u} \quad (19a)$$

$$l_d - \left[l_a + \frac{1.3M_n}{S_u} \right] \leq 0 \quad (19b)$$

여기서, l_a : 지지부의 중심에서 연장된 매입길이
 M_n : 지지점 단면에서의 공칭모멘트강도
 S_u : 지지점 단면에서의 극한전단력

8) 콘크리트 덮개와 철근간격 제한에 관한 제약 조건식

시방서 4.4.1에 의하면 현장치기 콘크리트에서 구조물의 수명까지 흠에 접하지 않고, 기상작용을 받지 않는 경우 최소 콘크리트 피복두께는 4 cm 이상 임을 규정하고 있다. 또한 철근과 철근사이 그리고 철근과 거푸집사이의 벌집구멍 발생을 방지하고, 철근의 집중배치로 인한 전단 및 건조수축균열을 방지하기 위해 시방서 4.3.1과 같은 철근의 순간격 제한이 요구되므로 콘크리트 덮개와 철근간격 제한에 관한 제약조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left[4.0 + d + d_{b2} + 0.5N_l d_{b1} + 0.5(N_l - 1) \text{Max}(d_{b1}, 2.5) \right] - h \leq 0 \quad (20)$$

$$\left[8.0 + 2d_{b2} + N_l d_{b1} + (N_l - 1) \text{Max}(d_{b1}, 2.5) \right] - b \leq 0 \quad (21)$$

$$2.5 - \frac{(S_l - N_v d_{b2})}{N_v} \leq 0 \quad (22)$$

여기서, d_{b1} 은 인장철근의 공칭지름, d_{b2} 는 전단철근의 공칭지름, N_l 은 철근이 배치된 층수이다. 그리고, N_v 는 각 층에 배치된 철근의 수, S_l 는 전단철근이 배치되는 곳까지의 길이, N_v 는 배치된 스테럽의 총 수이다.

3. 이산최적해를 얻기 위한 분기한계법

2장의 식(1)~(4)에 의해 서술된 이산최적화문제를 풀이하기 위해 최적화 과정을 두단계로 나누었다. 첫번째 단계에서는 식(4)에 의해 표현된 이산값들은 무시하고, 연속최적화문제로 최적해를 구하였으며, 이 단계의 최적해는 이산최적화를 위한 시작점으로 사용하였다.

두번째 단계에서는 분기한계법을 이용하여 이산최적해를 구하였다. 이 단계에서 적용할 수 있는 또 다른 접근방법으로는 단순히 연속최적해로부터 설계변수값의 각각을 가장 가까운 상향된 이산값으로 선택하는 방식(rounded-up method)^(9,10)이 있다. 그러나, 공학구조물의 최적화문제는 일반적으로 고차의 비선형성을 가지고 있으므로 비가능해의 발생 가능성이 많아지게 된다. 또한 연속최적해의 각각의 값보다 더 큰 이산값을 선택한다고 할지라도 비가능해를 얻을 수 있고, 가능해를 얻는다 할지라도 지나치게 보존적인(conservative)설계⁽⁹⁾ 즉, 과도한 해를 얻을 수 있으므로 진정한 이산최적해를 얻지 못하는 경우가 종종 발생한다.

3.1 분기한계법⁽¹¹⁾(Branch and bound method)

분기한계법은 설계공간을 더 작은 부분공간으로 체계적으로 분할하여, 최적해를 탐색하는 방법이다. 여기서, 탐색과정은 축소된 설계공간에서 연속최적화문제로 고려되어 해를 구하게 된다.

분기한계법의 첫번째 개념은 분기(branching)하는 것이다. 연속최적해는 일반적으로 이산값이 아니다. 그래서 이산값이 아닌 설계변수들 중에 하나를 선택하여, 가장 가까운 상향값과 하향값을 기준으로 두개의 영역으로 분기시킨다. 예를들면 X_i 의 이산집합을 $\{d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}, d_{i5}, d_{i6}\}$ 이라 하였을 때, X_i 가 $d_{i3} \leq X_i \leq d_{i4}$ 에 있다고 가정하면, X_i 는 $d_{i1} \leq X_i \leq d_{i3}$ 와 $d_{i4} \leq X_i \leq d_{i6}$ 로 나누어지고 두개의 새로운 문제가 생성되며, 이 생성된 문제를 후보문제(candidate problem)라 한다. 후보문제가 생성되면 이산값으로 선택된 문제는 고정되고, 나머지 변수는 연속변수로 고려하여 비선형

최적화문제를 풀게 된다. 여기서, 얻어진 해로부터 이산값이 아닌 또다른 설계변수를 선택하여, 계속해서 후보문제들을 생성한다. 여기서 이전에 분기된 설계변수는 부분공간에서 변화되는 것을 허용한다. 그리고, 모든 이산설계값이 얻어질 때까지 반복된다.

분기한계법의 두번째 개념은 한계(bounding)를 규정하는 것이다. 분기되어 생성된 후보문제들은 설계변수가 증가함에 따라 지수적으로 증가하고, 대단히 많은 최적화문제를 풀이하게 된다. 이 경우에 계산비용은 터무니 없이 커져 사실상 최적해를 얻기가 불가능하게 된다. 따라서, 후보문제들에 적절한 한계를 부과하게 되면 분기되어야 할 후보문제들에 대해서는 최적화문제를 풀이하지 않아도 된다. 이산최적화 과정 중 한계를 부과하므로써 나타나는 이와같은 현상을 분기끝(fathomed)이라 한다. 분기끝이 될 수 있는 조건은 두가지가 있다. 하나는 최적해가 비가능 해이면, 더 이상의 최적해가 존재하지 않는다고 보며, 또 하나는 이미 얻어진 이산최적해의 목적함수 값보다 더

큰 목적함수 값을 가질 경우에 더 좋은 이산최적해가 존재하지 않는다고 본다.

이상과 같이 이산최적해를 얻기 위해 도출된 알고리즘의 전체적인 흐름도는 Fig. 1과 같다.

3.2 제안된 알고리즘의 신뢰도 검증

본 논문에서 제안된 알고리즘의 신뢰도를 검증하기 위해 2개의 이산형 설계변수를 갖는 단철근 직사각형보 단면설계를 고려하였다. 비교검증에 유리한 도해법을 이용하기 위해 설계변수는 단면의 총높이 h 와 인장철근단면적 A_s 로 제한하였으며 제약조건으로는 설계휨강도, 연성 그리고 단면치수에 대한 제약을 고려하였다.

적용 구조물의 재료특성 및 상수값은 Table 1과 같고, 강도설계법에 의해 이산최적화문제를 형성하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize } F(X) = 666.0h + 2,148.9375A_s$$

Subject to :

$$G(1) = \frac{18,907.56}{25.0(h-7.0)A_s - 9.804 A_s^2} - 1.0 \leq 0$$

$$G(2) = \frac{A_s}{0.517h - 3.619} - 1.0 \leq 0$$

$$G(3) = \frac{0.1h - 0.7}{A_s} - 1.0 \leq 0$$

$$G(4) = \frac{25.0}{h - 7.0} - 1.0 \leq 0$$

$$G(5) = \frac{h - 7.0}{75.0} - 1.0 \leq 0$$

$$h \in [52.0, 53.0, 54.0, 55.0, 56.0, 57.0, 58.0, 59.0, 60.0, 61.0, 62.0, 63.0, 64.0, 65.0, 66.0, 67.0, 68.0, 69.0, 70.0, 71.0, 72.0]$$

$$A_s \in [4D19, 3D22, 6D16, 10D13, 2D29, 7D16, 5D19, 3D25, 4D22, 8D16, 6D19, 9D16, 2D35, 3D29, 5D22, 10D16, 7D19, 4D25, 8D19]$$

Table 1 Material properties and given value ($b=25\text{cm}$)

Material properties		Cost for materials	
σ_k	210 kg/cm ²	C_c	0.03552 won/cm ³
σ_y	3,500 kg/cm ²	C_s	2.86525 won/cm ³
Span length	Ultimate moment	Effective depth	
L	M_u	22.5 t.m	d
			$h-7.0$ cm

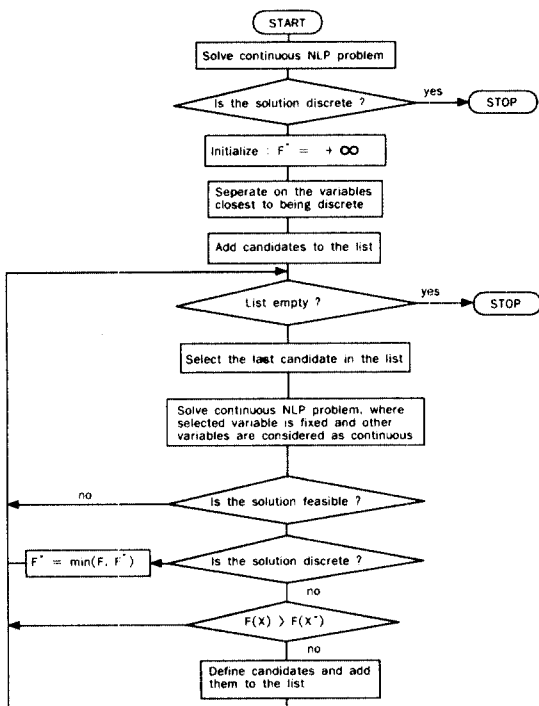


Fig. 1 Flow chart of the proposed optimum algorithm

제안된 알고리즘에 의해 최적설계를 수행한 최적화 결과는 Table 2와 같다. Table 2에서 알 수 있듯이 연속최적해는 $h=62.99$ cm, $A_s=15.10$ cm² 이고, 이산최적해는 $h=62.0$ cm, $A_s=4-D22(15.48$ cm²)로 된다. Fig. 2는 얻어진 결과를 검증하기 위해 도해법으로 풀이한 결과를 나타냈고, Fig. 3은 설계변수의 이산집합으로부터 연속최적해 주변에 나타날 수 있는 모든 이산값들을 표시하였다.

Fig. 2와 Fig. 3으로부터 알 수 있듯이 이산값들 중 B점[62.0cm, 4-D22(15.48 cm²)]의 목적함수

Table 2 Optimum results of the test problem

Point	X1 cm	X2(A _s) cm ²	F(X) won	Remarks
A	62.99	15.10	74,409.4	continuous optimization
B*	62.00	4-D22(15.48)	74,557.6	discrete optimization by proposed algorithm
C	62.00	3-D25(15.20)	73,955.9	IFDS
D	63.00	3-D25(15.20)	74,621.9	rounded-up solution FDS
E	63.00	4-D22(15.48)	75,223.6	FDS
F	62.00	8-D16(15.89)	75,438.6	FDS
G	61.00	8-D16(15.89)	74,772.6	FDS
H	61.00	4-D22(15.48)	73,891.6	IFDS
I	61.00	3-D25(15.20)	73,289.9	IFDS
J	64.00	3-D25(15.20)	75,287.9	FDS
K	65.00	5-D19(14.33)	74,084.3	IFDS
L	66.00	5-D19(14.33)	74,750.3	FDS

주 1) IFDS : infeasible discrete solution
2) FDS : feasible discrete solution

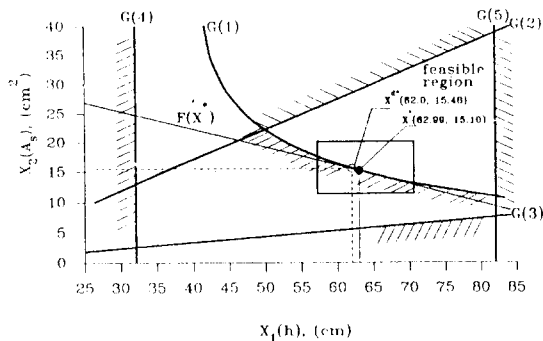


Fig. 2 Graphical design space for test problem

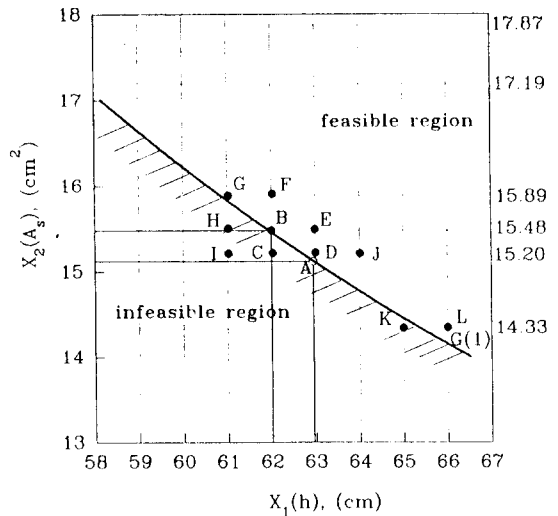


Fig. 3 Various discrete values nearby continuous optimum value

값이 제일 작으므로 이산최적해가 됨을 알 수 있다. 이는 제안된 알고리즘에 의한 결과치와도 잘 일치하므로 이산설계변수를 갖는 철근콘크리트 보의 최적설계에 신뢰성 있게 적용 할 수 있다고 판단된다.

또한, rounded-up method에 의해 얻어진 결과와 비교했을 때도 목적함수값이 작으므로 제안된 방법이 효율적임을 알 수 있다.

4. 수치에 및 결과분석

4.1 단순지지된 R.C.보

제안된 알고리즘의 적용성과 효율성을 검토하기 위하여 Fig. 4와 같이 단순지지된 R.C.보를 고려하였고, 이때 설계에 사용된 상수들은 Table 3과 같다.

수치에 사용된 지간 L은 900 cm로 가정했으며, 활하중 18 kg/cm와 사하중 9 kg/cm 및 자중을 받고 있다. 이 경우, 설계변수와 제약조건은 각각, 9개와 24개로 하여 이산최적설계문제를 형성하였으며, 제공된 각 설계변수들의 이산집합은 Table 6~10과 같다.

최적설계를 수행한 결과는 Table 4에, 최적단면은 Fig. 4에 나타내었다.

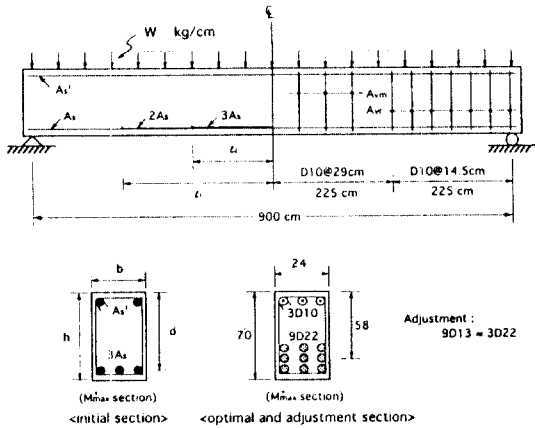


Fig. 4 Optimal design of simply supported R.C. beam

Table 3 Material properties and given value

Material properties		Cost for materials	
σ_{ck}	280 kg/cm ²	C _c	0.0477 won/cm ³
σ_y	3,500(4,200) kg/cm ²		
W _c	2.5 t/m ³	C _s	2.86525 won/cm ³

주: () 안은 2경간연속보의 경우

Table 4 Results of optimum design of simply supported R.C.beam

Design variable	Initial value	Continuous optimum	Discrete optimum	Rounded up method
X1(h)	90.00	69.62	70.00	70.00
X2(b)	40.00	23.24	24.00	24.00
X3(d)	75.00	57.98	58.00	58.00
X4(l_1)	350.00	317.90	320.00	320.00
X5(l_2)	450.00	425.42	430.00	430.00
X6(A _s)	12.00	11.402	11.400 * (9-D13)	11.460 (4-D19)
X7(A _s ')	3.00	2.534	2.139 (3-D10)	2.534 (2-D13)
X8(A _{st})	1.00	0.713	0.713 (D10)	0.713 (D10)
X9(A _{vm})	1.00	0.713	0.713 (D10)	0.713 (D10)
Cost (Won)	273,410	170,110	172,389	173,820

주) * : 3층 배열중 한 층에 배치된 철근의 면적임

X1~X5의 단위는 cm

X6~X9의 단위는 cm²

Table 4에서 알 수 있듯이 이산최적해가 연속최적해보다 크게 나타나지만 이는 비교 목적상의 값이며 실제설계실무에 반영한다는 점에서 rounded-up method에 의한 최적해보다 작게 나타나 제안된 알고리즘이 효율성 있게 적용될 수 있음을 알 수 있다.

보의 중앙단면에서 요구되는 인장철근의 면적은 $A_s = 9 - D13 (11.40 \text{ cm}^2)$ 으로 설계되었지만 Fig. 4에서 처럼 1/3 값이므로 9-D22인 $34.84 \text{ cm}^2 (\geq 34.2 \text{ cm}^2)$ 로 조정하였다. 그리고, 압축 및 전단철근은 각각 3-D10 과 D10으로 나타났고, 인장철근은 3개씩 3층으로 배치될 수 있도록 선택되었다. 또한 전단철근으로 사용된 캐스터립의 간격은 각각 14.5 cm, 29cm임을 알 수 있다.

4.2 2경간연속 R.C.보

여기서 고려된 연속보의 대상 모형은 Fig. 5와 같고, 이때 설계에 사용된 상수들은 Table 3과 같다. 수치예에 사용된 지간 L은 1,200 cm로 가정했으며, 활하중 23 kg/cm와 사하중 15 kg/cm 및 자중을 받고 있다. 이 경우, 설계변수와 제약조건은 각각, 11개와 35개로 하여 이산최적설계문제를 형성하였으며, 제공된 각 설계변수들의 이산집합은 Table 6~10과 같다.

최적설계를 수행한 결과는 Table 5에, 최적단면은 Fig. 5에 나타내었다.

Table 5에서 알 수 있듯이 이산최적해와 rounded-up method에 의한 최적해의 비교에서, 본 연구에 의해 얻어진 이산최적해가 경제적인 설계가 됨을 알 수 있다.

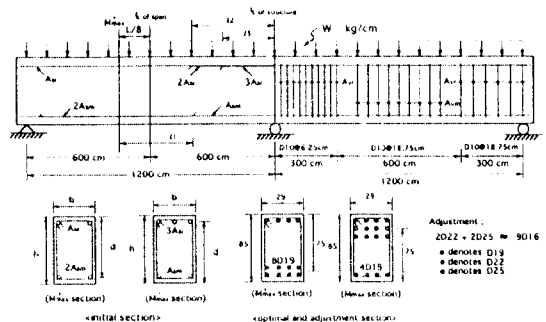


Fig. 5 Optimal design of two-span continuous R.C. beam

Table 5 Results of optimum design of two-span continuous R.C. beam

Design variable	Initial value	Continuous optimum	Discrete optimum	Rounded-up method
X1(h)	90.00	84.13	85.00	85.00
X2(b)	40.00	28.07	29.00	30.00
X3(d)	80.00	75.05	75.00	75.00
X4(l_1)	400.00	393.30	400.00	395.00
X5(l_2)	300.00	257.20	260.00	260.00
X6(l_3)	200.00	160.00	160.00	160.00
X7(A_{sm})	22.00	9.25	11.46* (4-D19)	9.93 (5-D16)
X8(A_{sf})	20.00	18.08	17.87* (9-D16)	19.35 (5-D22)
X9(A_{vt})	2.50	1.577	2.139 (3-D10)	2.139 (3-D10)
X10(A_{vm})	2.00	1.513	1.426 (2-D10)	2.139 (3-D10)
X11(A_{vt})	2.50	0.723	0.713 (D10)	1.267 (2-D13)
Cost(Won)	1,005,920	615,925	662,586	693,596

주) * : 2층 배열중 한 층에 배치된 철근의 면적임
 ** : 3층 배열중 한 층에 배치된 철근의 면적임
 X1~X6의 단위는 cm
 X7~X11의 단위는 cm²

하부, 상부철근은 각각 4-D19, 9-D16으로, 전단철근은 3-D10, 2-D10과 D10으로 나타났다. 또한, 전단철근으로 사용된 페스터립의 간격은 유효높이가 75 cm 이므로 각각 6.25 cm, 18.75 cm 임을 알 수 있다.

길이방향철근의 수는 Table 5에 나타난 하부철근(X7)과 상부철근(X8)의 최적결과에 따라 적당한 조합으로 조정할 수 있다. Fig. 5의 최적단면에서 최대부모멘트단면의 상부철근량은 9-D16(17.87 cm²)의 3배를 3층으로 배열하기 위해 조정단면에서 2-D22(7.742 cm²)와 2-D25(10.134 cm²)를 합한 값의 3배로 조정될 수 있고, 최대정모멘트단면의 하부철근량은 4-D19(11.46 cm²)를 2배로하여 조정하지 않고 이산최적해 결과를 그대로 사용할 수 있다.

Table 6 Design space for longitudinal reinforcing bars (1)

Designn number (X6, X7)	Bar type	Area (cm ²)	Design number (X6)	Bar type	Area (cm ²)
1	1-D35 2-D10*	9.560 1.426	6	6-D16	11.91
2	2-D25 3-D10*	10.130 2.139	7	10-D13	12.67
3	9-D13 2-D13*	11.40 2.534	8	2-D29	12.85
4	4-D19 4-D10*	11.46 2.852	9	7-D16	13.90
5	3-D22 3 D13*	11.61 3.801	10	5-D19	14.33

(2)

Designn number (X6, X7)	Bar type	Area (cm ²)	Design number (X6, X7)	Bar type	Area (cm ²)
1	4-D19 5-D19*	11.46 14.33	5	5-D22 6-D19*	19.35 17.19
2	7-D16 8-D16*	13.90 15.89	6	4-D25 8-D19*	20.27 22.92
3	4-D22 6-D19*	15.48 17.19	7	8-D19 6-D22*	22.92 23.22
4	8-D16 9-D16*	15.89 17.87	8	6-D22	23.22

주) (1) : Simply supported R.C. beam
 (2) : Two-span continuous R.C. beam
 * : Compressive reinforcing bars

Table 7 Design space for widths of beam(increments of 1cm)

Design number (X2)	Member width (cm)	Design number (X2)	Member width (cm)
1	20.00	9	28.00
2	21.00	10	29.00
3	22.00	11	30.00
4	23.00	12	31.00
5	24.00	13	32.00
6	25.00	14	33.00
7	26.00	15	34.00
8	27.00	16	35.00

Table 8 Design space for overall depths and effective depths of beam(increments of 1cm)

Design number (X1,X3)	Overall depths (cm)	Effective depths(cm)		Design number (X1,X3)	Overall depths (cm)	Effective depths(cm)	
		(1)	(2)			(1)	(2)
1	60.00	50.00	58.00	16	75.00		74.00
2	61.00	51.00	59.00	17	76.00		75.00
3	62.00	52.00	60.00	18	77.00		76.00
4	63.00	53.00	61.00	19	78.00		
5	64.00	54.00	62.00	20	79.00		
6	65.00	55.00	63.00	21	80.00		
7	66.00	56.00	64.00	22	81.00		
8	67.00	57.00	65.00	23	82.00		
9	68.00	58.00	66.00	24	83.00		
10	69.00	59.00	67.00	25	84.00		
11	70.00	60.00	68.00	26	85.00		
12	71.00	61.00	69.00	27	86.00		
13	72.00	62.00	70.00	28	87.00		
14	73.00	63.00	71.00	29	89.00		
15	74.00	64.00	72.00	30	90.00		

주)(1):Effective depth of simply supported R.C. beam
 (2):Effective depth of two-span continuous R.C. beam
 Simply supported R.C. beam:h=60~85
 Two-span continuous R.C. beam:h=70~89

Table 9 Design space for web reinforcing bars

Design number (X8,X9,X10,X11)	1	2	3	4	5
Bar type	1-D10	1-D13	2-D10	2-D13	3-D10
Area(cm ²)	0.713	1.267	1.426	2.139	2.534

5. 결 론

본 논문은 R.C.보 최적설계에 있어서 상세설계를 포함하는 실제설계의 가능성을 제시하기 위하여, 첫째 단계에서 연속최적해를 구하고, 둘째 단계에서 분기한계법을 이용하여 이산최적해를 얻을 수 있는 이산비선형최적화 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘의 신뢰성을 입증하기 위해 2개의 이산설계변수를 갖는 단철근 직사각형을 고려하였고, 단순지지원 R.C.보 및 2경간연속 R.C.보의 수치예를 수행해 본 결과 다음과 같은 결

Table 10 Design space for cutoff points of longitudinal reinforcing bars(increments of 5cm)

Design number	Simply supported beam	
	X4(l ₂)	X5(l ₁)
1	300.00	410.00
2	305.00	415.00
3	310.00	420.00
4	315.00	425.00
5	320.00	430.00
6	325.00	435.00
7	330.00	440.00
8	335.00	445.00
9	340.00	450.00
10	345.00	
11	350.00	

Design number	Two-span continuous beam			Design number	Two-span continuous beam		
	X4(l ₁)	X5(l ₂)	X6(l ₃)		X4(l ₁)	X5(l ₂)	X6(l ₃)
1	350.00	200.00	120.00	15	420.00	270.00	190.00
2	355.00	205.00	125.00	16	425.00	275.00	195.00
3	360.00	210.00	130.00	17	430.00	280.00	200.00
4	365.00	215.00	135.00	18	435.00	285.00	205.00
5	370.00	220.00	140.00	19	440.00	290.00	210.00
6	375.00	225.00	145.00	20	445.00	295.00	215.00
7	380.00	230.00	150.00	21	450.00	300.00	220.00
8	385.00	235.00	155.00	22		305.00	225.00
9	390.00	240.00	160.00	23		310.00	230.00
10	395.00	245.00	165.00	24		315.00	235.00
11	400.00	250.00	170.00	25		320.00	240.00
12	405.00	255.00	175.00	26			245.00
13	410.00	260.00	180.00	27			250.00
14	415.00	265.00	185.00				

론을 얻었다.

1. 제안된 알고리즘을 2개의 이산설계변수를 갖는 단철근 직사각형보 최적설계에 적용해 본 결과 연속최적해 부근의 이산값들 중에서 이산최적해를 정확하게 구할 수 있었으며, 도해법과 rounded-up method의 결과와 직, 간접적으로 비교했을 때 이산최적해에 효율적이고 신뢰성 있게 수렴함을 알 수 있다.
2. 수치예에 적용한 결과 분기한계법에 의한 이산

최적해가 rounded-up method에 의한 이산최적해보다 더 경제적이고 안정된 값을 얻을 수 있으므로 분기한계법이 효율적인 방법임을 알 수 있다.

3. 철근콘크리트보 최적설계에서 시방서상의 적용 가능한 제반사항을 제약조건식으로 표현하고 설계변수를 이산형설계변수로 고려하므로써 보다 실제적이고 경제적인 설계가 되었고, 실제설계업무에 본 알고리즘이 효율적으로 적용될 수 있다고 판단된다.

참 고 문 헌

1. 건설부, “콘크리트 표준시방서”, 대한토목학회, 1989.
2. 건설부, “철근콘크리트 설계편람”, 대한토목학회, 1991.
3. Lai, Y.S., and Achenbach, J.D., “Discrete Search Optimization Method”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, No. ST1, Jan., 1973, pp. 119~131.
4. Toakley, A.R., “Optimum Design Using Available Sections”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST5, May, 1968, pp. 1219~1241.
5. Twisdale, L.A., and Khachaturian, N., “Optimization of Structures by Dynamic Programming”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 101, No. ST5, May, 1975, pp. 1000~1019.
6. Liebman, J.S., Khachaturian, N., and Chanaratna, V., “Discrete Structural Optimization”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 107, No. ST11, Nov., 1981, pp. 2177~2197.
7. Yang, M.F., Shao, C.A., and Tsai, T.H., “A Code-Based Optimum Design of Reinforced Concrete Structures”, World Scientific, Vol. 2, 1992, pp. 942~951.
8. Olson, G.R., and Vanderplaats, G.N., “Method for Nonlinear Optimization with Discrete Design Variables”, AIAA Journal, Vol. 27, No. 11, Nov., 1989, pp. 1584~1589.
9. Hager, K., and Balling, R., “New Approach for Discrete Structural Optimization”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 114, No. 5, May, 1988, pp. 1120~1134.
10. Salajegheh, E., and Vanderplaats, G.N., “Efficient Optimum Design of Structures with Discrete Design Variables”, (in Press, Int. Journal of the Space Structures), 1992.
11. Ringertz, U.T., “On Method for Discrete Structural Optimization”, Engineering Optimization, Vol. 13, 1988, pp. 47~64.

(접수일자 : 1993. 8. 19)