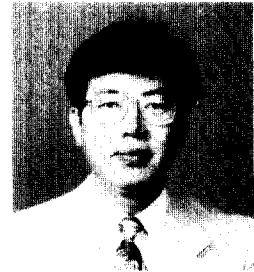


### 콘크리트 구조물의 크기효과

#### The Size Effect of Concrete Structures



김진근\*

#### 1. 서 언

자연 과학에서는 자연 현상을 어떻게 논리적이고도 타당한 방법으로 설명할 수 있을 것인가에 주안점을 두고 있다. 그러나 매우 복잡한 자연 현상은 현존의 이론으로 설명할 수 없는 것이 대부분이다. 따라서 그 현상을 이상화하거나 여러 가정을 도입하여 해석하고 있다. 이러한 경우, 가능하다면 발생하는 실제 현상에 가깝게 이상화하고 가정하여 해석하는 것이 학문적 관점에서 뿐만 아니라 그 자연 현상을 정확하게 파악할 수 있는 최선의 길일 것이다.

콘크리트는 균열에 의해 파괴가 일어난다. 구조물에서와 같은 거시적 관점에서 뿐만 아니라, 콘크리트 재료 내면의 미시적 관점에서도 항상 콘크리트는 균열에 의해 파괴가 일어난다. 이러한 현상은 콘크리트 재료가 갖고 있는 숙명적 특성이라고 할 수 있다. 왜냐하면, 콘크리트는 복합재료로서 또한 수경성 재료로서 만들어지면서 이미 내부에 수많은 공극과 미세균열을 포함하고 있기 때문

이다. 그러면 이러한 현상을 정확히 설명하기 위해서는 균열이 존재할 때 적용할 수 있는 파괴역학(fracture mechanics)의 이용은 너무나 당연한 일이라고 할 수 있겠다.

우리가 그렇게 철석같이 믿고 있는 콘크리트의 압축강도도 진정한 의미에서 재료 특성을 나타내는 상수가 될 수 없다고 한다면 믿을 수 있겠는가? 그러나 그것은 엄연한 사실이다. 그래서 최근에 콘크리트 구조 및 재료역학 분야에 파괴역학의 적용성에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다. 콘크리트 분야에서 파괴역학의 적용은 여러 형태로 나타날 수 있으나 첫째로는 재료 개발 분야이다. 앞에서 지적한 바와 같이 현존의 콘크리트는 만들어질 때부터 미세균열을 갖고 있다. 그러면 모든 콘크리트를 미세균열이 전혀 없는 콘크리트로는 만들 수 없다 하더라도 가능한 미세균열의 수와 크기를 줄이는 방법을 찾는 것으로서 콘크리트의 고강도화에 크게 이바지할 수 있을 것이다. 둘째로는 기준 및 시방서 규정식의 합리적인 설정이다. 기존의 규정식들은 대부분 반 경험적이고 반 실험식에 가깝다. 그러나 파괴역학에 근거하여 콘크리트의 파괴거동을 이해함으로써 보다 합리적인 규

\* 정회원, 한국과학기술원 토목공학과 부교수, 공박

정식의 유도가 가능한 것이다. 그 대표적인 예가 현재 이 글에서 다루고자 하는 규정식에 대한 크기효과의 적용이다. 셋째, 보다 정확한 재료 상수를 정의할 수 있으며, 이로부터 철근콘크리트 구조물의 해석이 보다 정확해질 수 있다. 현재까지 주로 적용되어 온 탄성, 소성해석에 의해서 콘크리트 구조물을 정확히 해석할 수는 없다. 이러한 문제는 앞으로 파괴역학 개념을 도입함으로써 해결 가능할 것으로 판단된다. 그리고 마지막으로 직접 콘크리트 구조물에의 적용이다. 댐과 같은 매스 콘크리트의 균열 문제의 경우 직접 파괴역학의 적용에 의해 해석이 가능할 뿐만 아니라 유일한 방법일 지도 모른다. 그러나 아직도 해결되지 않은 많은 문제점이 존재하고 있으며, 실제 적용에 대해서는 더 많은 연구가 요구되고 있는 것 또한 현실이다.

이 글에서는 이와 같은 일련의 연구 결과에 의해 밝혀진 크기효과(size effect)에 대하여 간단히 설명하고자 한다.

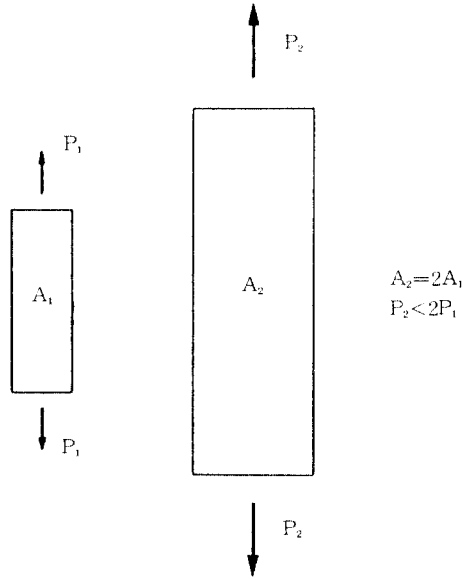


그림 1 크기효과란?

## 2. 크기효과 (size effect)

### 2.1 크기효과란?

크기효과란 구조물의 크기가 커지면 구조물이 저항할 수 있는 능력이 크기에 비례하여 커지지 못하고 평균 저항력은 떨어진다는 것을 말한다. 예로서 그림 1에서와 같이 인장력을 받는 크기(여기서는 단면적)가 서로 다른 2 개의 부재가 있다고 가정하자. 두 부재를 이루고 있는 재료는 동일하나 큰 부재의 단면적이 작은 것의 2배라고 하면, 그 저항 능력  $P_2$ 는  $P_1$ 의 2배가 되어야 할 것이나 2배보다 작은 경우를 우리는 흔히 크기효과라고 일컫는다. 재료에 균열이 없고 탄성 또는 소성 거동을 한다면 당연히 2배가 되어야 할 것이나 콘크리트 재료인 경우 그러하지 못하다.

그러면 크기효과는 왜 일어나는가?

그 첫번째 이유는 물체 내부에 균열이 있으면 응력 집중 현상(stress concentration)이 발생하

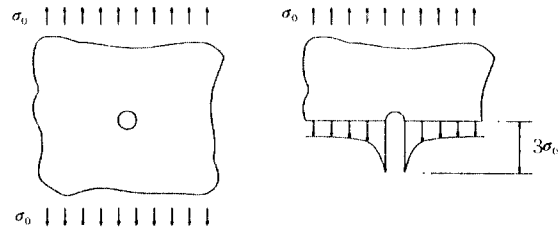


그림 2 응력 집중 현상

기 때문이다. 그 예로서 그림 2에서와 같이 원형의 구멍이 있는 무한히 큰 판넬에  $\sigma_0$ 의 인장력이 가해지고 있을 때 원형 구멍 끝에서의 응력은  $3\sigma_0$ 가 된다는 것은 잘 알려진 사실이다. 이와 같이 응력이 균등하게 분포되지 않기 때문에 크기에 따라 그 저항력에 차이가 난다. 두번째 이유는 모든 재료는 유한한 연성(ductility)을 갖고 있기 때문이다. 만약 응력 집중 현상이 일어난다 하더라도 재료가 무한한 연성과 완전 소성 거동을 한다면 모든 점에서 항복 응력에 도달할 수 있으므로 그 인장

저항 능력은 단면적에 비례할 것이다. 그러나 유한한 연성을 지니고 있기 때문에 큰 부재의 경우 모든 점에서 항복 응력에 도달하기 전에 응력 집중 현상이 먼저 일어난 곳에서 파괴가 된다. 그러나 매우 작은 부재의 경우 모든 곳에서 항복이 일어나 파괴에 이를 수 있다. 따라서 그 저항 능력의 차이가 있다.

콘크리트 재료는 어떠한가?

콘크리트 재료는 상당한 취성재료이며, 앞에서 지적한 바와 같이 내부에는 재료 그 자체가 이비 많은 미세균열을 갖고 있다. 따라서 콘크리트는 비록 눈으로 식별할 수 있는 균열이 없다 하더라도 모든 형태의 하중 하에서 정도의 차이는 있을지언정 미세균열단에서 응력 집중 현상이 일어나며, 취성재료이므로 곧 균열을 진전시키게 된다. 이에 따라 콘크리트는 항상 크기효과를 나타낸다. 이때 동일한 콘크리트도 동일한 크기효과를 나타내는 것은 아니고 하중 작용 형태에 따라 크기효과는 달라진다. 다시 말하면, 주균열이 생성되기 전에 미세균열이 콘크리트의 많은 부분에 나타나면 크기효과는 줄어들고, 미세균열 영역이 좁으면 크기효과는 커지게 된다. 콘크리트가 압축력을 받으면 인장력을 받을 때보다 미세균열 영역이 커지므로 크기효과는 줄어들고, 철근을 배근하면 크기효과가 나타나지 않는 철근 자체의 효과와 더불어 콘크리트의 미세균열 영역도 넓혀주기 때문에 크기효과는 줄어들게 된다.

### 2.2 선형 탄성체의 크기효과 모델식

선형 탄성체의 부재에 균열 길이  $a$ 가 존재할 때, 응력확대계수(stress intensity factor)  $K$ 는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \sigma_N \sqrt{\pi a} f(\alpha) \quad (1)$$

여기서,  $\sigma_N$ 은 공칭응력(nominal stress)이고,  $f(\alpha)$ 는 하중 형태와 부재 형상에 따른 함수이다.

선형 탄성체인 경우  $\sigma_N$  값이 점점 커져  $K$  값이 어느 임계값인 임계응력확대계수  $K_c$ 에 도달하면 균열이 진전되어 파괴에 이른다. 그리고 이  $K_c$  값은 재료가 동일하면 부재 크기에 관계없이 항상 동일한 값이다. 그러면 크기가  $d_1 (=ka_1)$ ,  $d_2 (=ka_2)$ 인 닦은 부재의 임계공칭응력(공칭강도, 즉 저항능력이 된다.) 값을 각각  $\sigma_{N1}$ ,  $\sigma_{N2}$ 라고 하면, 다음 식 (2)와 같은 관계가 성립된다. 이때, 닦은 형상이고 하중 형태가 같으면  $f(\alpha)$ 는 두 경우 동일하다.

$$\sigma_{N2} = \sigma_{N1} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{1/2} \quad (2)$$

즉,  $d_1 = 1$ 일 때의 공칭인장강도를 기준인장강도  $\sigma_0$ 로 할 때,  $d$ 일 때의 공칭인장강도  $\sigma_N$ 은 다음 식 (3)과 같이 된다.

$$\sigma_N = \sigma_0 / \sqrt{d} \quad (3)$$

여기서  $\sigma_N$ 은 공칭강도이고,  $d$ 를 특성길이(characteristic length)라고 한다. 식 (2)와 (3)에서 보면 저항능력을 나타내는 크기에 따른 공칭강도는 크기의 제곱근에 반비례함을 알 수 있다. 이 식 (3)은 다음 식 (4)와 같이 표현할 수 있으며, 그림 3에 나타나 있는 기울기가  $-1/2$ 인 직선의 식이 된다.

$$\log \sigma_N = \log \sigma_0 - \frac{1}{2} \log d \quad (4)$$

### 2.3 통계적 기법에 의한 크기효과 모델식

앞에서는 선형파괴역학에 근거한 크기효과 식의 유도에 관하여 설명하였는데, 실제로 이러한 크기효과에 대한 설명은 통계적 접근 방법으로 시작되었다. Griffith<sup>(1)</sup>의 최초의 파괴역학에 관한 논문에서 유리 재료로 된 시험체의 강도에 대한

크기효과를 설명할 때 직경에 비례하는 미세균열이 시험체 내부에 처음부터 존재한다는 가정에서 시작하였다. 그 이후 1939년 Weibull<sup>(2)</sup>이 weak-link-in-a-chain 개념에 따라 순수 통계적 접근법에 의해 크기효과를 설명하였다. 즉, 모든 물질은 내부에 수 많은 미세균열이 존재하며, 이러한 미세균열 중 가장 위험한 것의 크기는 구조체가 커지면 커질수록 클 가능성이 높다는 것이다. 이때 Griffith 가 가정한 바와 같이 미세균열의 크기가 구조체 크기에 비례하여 커지는 것은 아니며, 이러한 경우에는 크기효과는 d의 1/2 승이 아니라 1/2 보다 작은 값인 n 승에 반비례한다는 것이다. 이러한 Weibull 형태의 이론으로는 Weibull, Zaitsev and Wittmann<sup>(3)</sup>, Mihashi and Zaitsev<sup>(4)</sup>, 그리고 Carpinteri<sup>(5)</sup> 등이 있으며, Carpinteri<sup>(6)</sup>는 다음과 같이 응력에 대한 크기효과 식을 유도하였다. 응력에 대해서는 단면적에 관계되며, 최대응력에서의 파괴 단면적을 고려하는 요소로서  $\alpha = 2 - n$ 을 둘 수 있는데, 여기서  $0 \leq n < 1$ 의 값이고  $1 < \alpha \leq 2$ 이다. 두 구조체의 형상이 다른 형태이고 실 단면적에 대한 응력 (fractal tensile strength 라고 Carpinteri가 정의하였음)  $\sigma_u^*$ 가 재료 상수라고 보면, 한 번이  $d_1, d_2$ 인 다른 형상의 구조물에 대하여,

$$\sigma_u^* = \frac{F_1}{d_1^\alpha} = \frac{F_2}{d_2^\alpha} \quad (5)$$

가 된다. 여기서  $F_1$ 과  $F_2$ 는 두 구조체에 작용하는 인장강도이다. 반면, 실제 우리가 실측할 수 있는 공칭인장강도(nominal tensile strength)  $\sigma_{N1}$ 은 각각 다음과 같다.

$$\sigma_{N1} = \frac{F_1}{d_1^2} \quad (6)$$

$$\sigma_{N2} = \frac{F_2}{d_2^2}$$

식 (5)와 식 (6)으로 부터 아래 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{N2} = \sigma_{N1} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^{-n} \quad (7)$$

만약,  $d_1 = 1$  일 때의 공칭인장강도를 기준인장강도  $\sigma_0$ 로 할 때, d일 때의 공칭인장강도  $\sigma_N$ 은 다음 식 (8)과 같이 된다.

$$\sigma_N = \sigma_0 / d^n \quad (8)$$

이 식 (8)은 다음 식 (9)와 같이 달리 표현될 수 있다.

$$\log \sigma_N = \log \sigma_0 - n \log d \quad (9)$$

앞의 LEFM(선형탄성 파괴역학)에서 구한 크기효과가 log scale 좌표계에서 -1/2의 기울기를 갖는데 반하여 식 (8)은 -n의 기울기를 갖는 것을 의미하고 있으며, 그림 3에 나타나 있다. 이때, 전혀 미세균열이 없는 경우  $\alpha = 2$ , 즉  $n = 0$ 이 되어 크기효과를 나타내지 않으며, 강도 기준

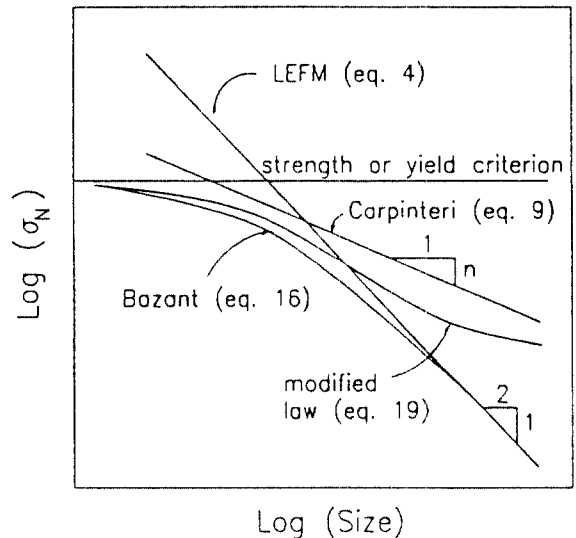


그림 3 여러 모델식의 비교

(strength criterion)을 따르게 된다.

2.4 비선형 파괴역학에 근거한 크기효과 모델식

콘크리트의 파괴는 상당히 큰 미세균열 영역이 발생한 후에 주균열이 서서히 형성되면서 일어나는데 이러한 경우 앞에서 설명한 LEFM(선형탄성 파괴역학)에 근거한 크기효과 식은 실제의 거동을 적절히 설명할 수 없다. 따라서 1960년 경 이후부터 비선형 파괴역학을 콘크리트 구조에 적용하기 위한 연구가 시작되었고 크기효과 설명을 위해서도 이 비선형 파괴역학을 도입하게 되었다. 그 대표적인 예로서 Bazant<sup>(7)</sup>는 1984년에 차원해석(dimensional analysis)과 상사법칙(similitude law)에 근거하여 다음과 같은 방법에 의하여 크기효과 식을 제안하였다.

$d, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ 을 주어진 구조물의 차원으로 놓는다.  $d$ 는 구조물의 특성차원(characteristic dimension)으로 그림 4의 보에서는 깊이를 나타낸다. 또한,  $\ell_1 = a$ (crack length) 등으로 나타낸다.

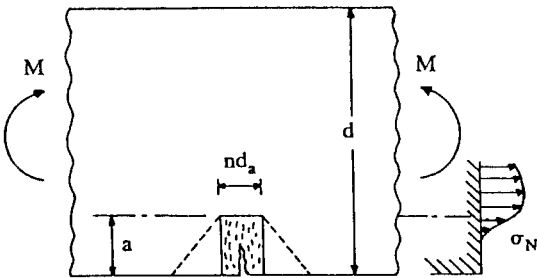


그림 4 균열 진행의 예

먼저 “fracture가 일어날 때 소요되는 총에너지 제공량(energy release)  $W$ 는 균열길이  $a$ 와 균열 진행영역(fracture process zone)의 면적  $nd_a$ 의 함수로 나타낸다.”는 가설을 세운다.  $\ell_1 = a/d, \alpha_2 = nd_a/d^2$ 과 같이 무차원량으로 놓으면 총에너지 제공량  $W$ 는 구조물의 체적  $d^2b$  및 에너지 밀

도  $\sigma_N^2/2E_c$ 에 비례하므로 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \frac{1}{2E_c} \left(\frac{P}{bd}\right)^2 bd^2 f(\alpha_1, \alpha_2, \xi_i) \quad (10)$$

균열이 발생할 조건은 식 (11)과 같다.

$$\frac{\partial W}{\partial a} = G_f b \quad (11)$$

chain rule에 의해

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} \quad (12)$$

가 된다. 여기서,

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, f_2 = \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}$$

라고 놓으면, 식 (11)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{f_1}{d} + \frac{f_2 nd_a}{d^2} \frac{P^2}{2bE_c} = G_f b \quad (13)$$

한편, 파괴진행영역의 응력-변형도를 그림 5와 같이 가정할 때 crack band theory<sup>(8)</sup>로 부터  $G_f$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

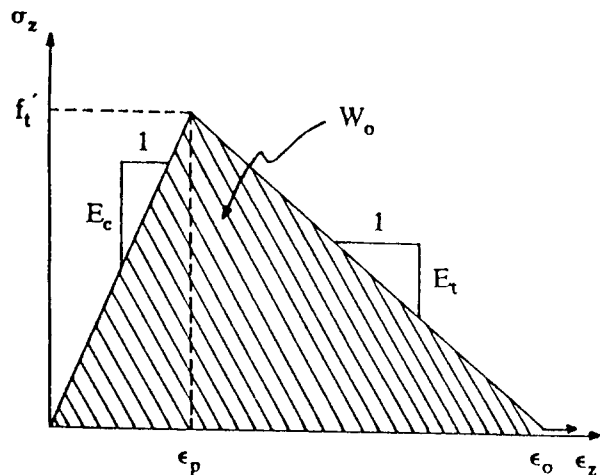


그림 5 균열 발생 영역에서의 이상화된 응력-변형도

$$\begin{aligned}
 G_I &= w_c \left(1 - \frac{E_c}{E_t}\right) \frac{(f_t')^2}{2E_c} \\
 &= \frac{1}{2} [f_t' \epsilon_p + f_t' (\epsilon_0 - \epsilon_p)] w_c \\
 &= W_0 w_c
 \end{aligned} \tag{14}$$

여기서,  $w_0 = \int \sigma_2 d\epsilon_2$ 이다.

식 (14)는 미세균열이 폭  $w_c$ 에 균등히 분포하고 소성변형을 수반하지 않을 때만 성립한다. 식 (14)를 식 (13)에 대입하여 정리하면 다음 식 (15)와 같다.

$$\sigma_N = \frac{Bf_t'}{\sqrt{1+d/(\lambda_0 d_a)}} = \frac{Bf_t'}{\sqrt{1+\lambda/\lambda_0}} \tag{15}$$

여기서,  $\sigma_N = P/(bd)$

$$B = \frac{1}{\sqrt{f_2}} \sqrt{1 - E_c/E_t}$$

$$\lambda_0 = n f_2 / f_1$$

$$\lambda = d / d_a$$

식 (15)는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\sigma_N = Bf_t' \left(1 + \frac{d}{d_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{16}$$

여기서,  $d_0 = \lambda_0 d_a$ 이다. 이 식의 경우  $d$ 가 굉장히 작은 경우 공칭인장강도는 크기  $d$ 에 관계없으며, 즉 크기효과가 나타나지 않고, 반면  $d$ 가 굉장히 큰 경우  $\sqrt{d}$ 에 반비례하게 되어 LEFM과 같은 결과를 갖는다. 이 또한 그림 3에 나타나고 있다.

한편, 이론적으로 Bazant의 크기효과 법칙은 그림 6에 나타나 있는 바와 같은 동일한 상대균열 길이  $(a/d)$ 를 가지는 기하학적으로 유사한 시험체에 대하여 성립한다. 그러나, notch와 같은 인위적인 초기균열이 없는 콘크리트 시험체의 경우, 부재의 크기가 증가하여도 부착균열과 같은 일정한 길이의 초기균열만이 존재하게 되어 비례하여 큰 균열을 갖는 것은 아니다. 따라서, 초기균열이

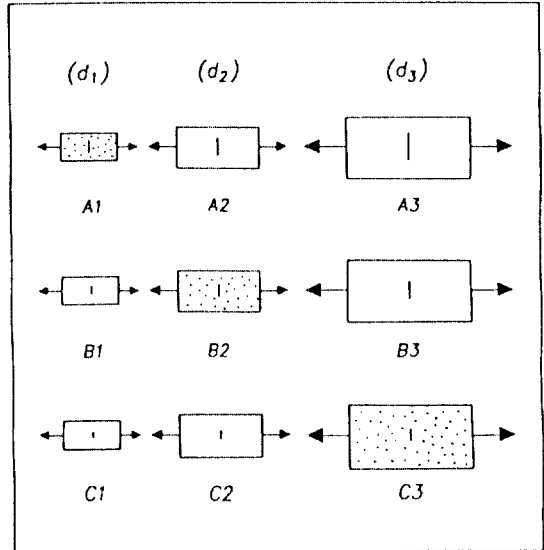


그림 6 유사 균열 시험체 및 비유사 균열 시험체 시리즈

없는 콘크리트 시험체의 경우 크기효과에 있어서  $a/d$ 의 효과를 고려해 주어야 한다. 이것은 식 (17)과 같이 Bazant 크기효과 식에서  $\lambda_0$ 를 단조 감소함수  $f(a/d)$ 로 치환함으로써 얻어질 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$\sigma_N = \frac{Bf_t'}{\sqrt{1 + \frac{d}{f(a/d)d_a}}} \tag{17}$$

식 (17)의 물리적 의미를 구체적으로 설명하기 위하여 그림 6에 인장력 하에 놓인 일련의 부재열 A, B, C를 도시하였다. A, B, C 부재열은 각각 모두 기하학적으로 유사한 공시체를 나타낸다. 따라서 각 부재열에 대한 크기효과는 Bazant의 크기효과 식을 따를 것이다. 즉, 함수  $f(a/d)$ 가 각 부재열별로 일정한 값을 가질 것이므로 결국 식 (17)은 Bazant의 크기효과 식과 같게 된다. 그러나, 대각선 방향으로 이루어진 부재열 A1, B2, C3를 생각해 보자. 이때 균열길이  $a$ 는 모두 같은 값을 가지며, 부재크기에 대한 균열길이의 비  $a/d$ 는 부재가 커질수록 작은 값을 갖게 된다.

따라서 정확한 크기효과를 나타내기 위해서는 식 (17)을 사용하여야 한다.

한편, 낫치와 같은 인위적인 초기균열을 두지 않은 콘크리트 부재에 있어서 동일한 최대골재크기를 사용한 경우 초기균열길이  $a_0$ 를 부재의 크기에 관계없이 일정하게 가정할 수 있음은 앞서 설명한 바와 같다. 또한, 식 (17)의 논거에서 언급한 초기균열길이  $a_0$ 와 파괴시의 균열길이  $a$ 는 분명히 다르나  $a_0$ 에서 진전한 균열길이의 양을 실험적으로나 이론적으로 정확히 구할 수 없으므로  $a_0$  혹은  $a$  어느 것이나 최대골재크기의 함수로 나타내어질 수 있다는 관점에서 대각선 방향의 부재열 A1, B2, C3의 기하학적 비유사성 자체에는 큰 영향을 미치지 않는 것으로 판단할 수 있다. 결과적으로 부재의 크기에 따라 변하는 매개변수  $f(a/d)$ 를 고려하여 수정된 크기효과의 경향을 나타내면 그림 7에 도시한 바와 같다. 그러나  $f(a/d)$ 를 구체적으로 정의할 수 없으므로 실용적인 범위내에서

의 회귀분석을 위하여 다음 식 (18)과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$\sigma_N = \frac{Bf_t'}{\sqrt{1 + \frac{d}{\lambda_0 d_a}}} + \alpha f_t' \quad (18)$$

여기서,  $\alpha$ 는 1 보다 작은 상수이다.

한편, 실제적으로 사용되고 있는 최대골재크기의 범위에 있어서는 미세균열의 폭에 관한 골재크기의 영향이 별로 없는 것으로 나타나 있다. 따라서 미세균열 폭을 일정하다고 가정하면, 위의 식 (18)은 식 (19)와 같이 나타낼 수도 있다.

$$\sigma_N = \frac{Bf_t'}{\sqrt{1 + d/\ell_0}} + \sigma_0 \quad (19)$$

이때,  $\ell_0$ 는 미세균열의 폭과 관련된 부재의 특성길이를 나타내며 하나의 실험상수로서 취급할 수 있다.  $\sigma_0$ 항은 부재의 크기에 무관한 것으로 초기균열을 유발시키는데 필요한 응력으로 해석된다. 이상의 논의로부터 초기균열을 두지 않은 즉, 비유사 균열이 있는 콘크리트 부재의 크기효과는 심한 강도의 감소 현상을 보이는 Bazant 크기효과 식보다는 현저히 완화된 크기효과 현상을 보인다는 것을 알 수 있다.

한편, 그림 3은 위에서 구하여진 모든 크기효과 모델식들을 비교하고 있다.

### 3. 콘크리트 구조물에서 크기효과의 실례

#### 3.1 인장

콘크리트의 인장강도는 일반적으로 3가지 방법, 즉, 직접인장강도(direct tensile strength), 할렬인장강도(splitting tensile strength) 및 휨인장강도(modulus of rupture)에 의해서 추정되고 있다. 엄밀한 의미의 인장강도는 직접인장강도를 뜻하나 실험상의 어려움으로 인해 잘 사용되지 않고 보통 할렬인장강도로 대신하고 있다. 할렬인

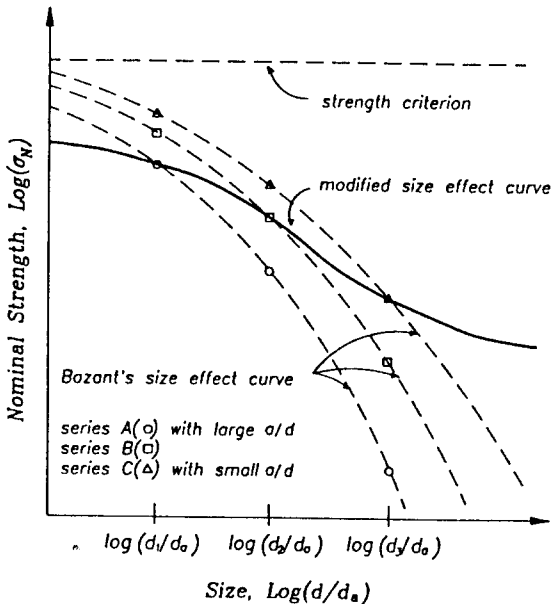


그림 7 수정된 크기효과의 경향

상실험은 실험 자체가 용이할 뿐만 아니라 실험 결과의 흠어짐(scattering)이 작아 많은 나라의 규준에서 이를 콘크리트의 인장강도를 판정하는 표준실험방법으로 채택하고 있다.

몇몇 연구자들<sup>(10-12)</sup>에 의해 콘크리트의 활렬인장강도에 있어서의 크기효과를 규명하기 위한 실험적 연구가 수행되었는데, Hasegawa<sup>(10)</sup>는 공시체의 폭을 50cm로 고정시키고 직경을 10cm에서 300cm까지 변화시켜 가면서 실험을 수행하였으며, 본 저자 등<sup>(11)</sup>은 공시체의 폭을 20cm로 고정시키고 직경을 10cm에서 160cm까지 변화시켜 실험을 수행하였다. 그림 8(a)는 두 실험의 결과를 Bazant가 제안한 크기효과 법칙 및 본 저자 등이 제안한 수정된 크기효과 법칙(modified size effect law)에 따라 회귀분석한 식들과 함께 도시한 것인데, 공시체의 직경이 20cm에서 100cm로 증가함에 따라 활렬인장강도가 40% 정도 감소하는 뚜렷한 크기효과를 보여주고 있다. 그러나, 그림에 나타나 있는 바와 같이 이러한 강도 감소의 경향은 공시체의 직경이 50~100cm 이상이 되면

상당히 낮아지고 있으며, 따라서, 실험 결과들의 경향은 Bazant 크기효과 법칙보다 수정된 크기효과 법칙과 더 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 유사한 경향이 Bazant & Kazemi<sup>(12)</sup>의 실험 결과에서도 관찰되었는데, 그림 8(b)는 그들의 실험 결과를 각 크기효과 법칙들의 회귀분석식과 함께 도시한 것이다. Hasegawa의 실험 결과와 유사하게 공시체의 직경이 어떤 크기 이상이 되면 더 이상의 강도 감소가 나타나지 않고 있는데, Bazant 등은 파괴 메카니즘이 전이되기 때문에 이러한 현상이 발생한다고 설명하였다. 즉, 작은 공시체의 경우, 활렬 균열을 유발시키는 하중이 재하점 부근 쐐기 영역(wedge-shaped region)의 마찰 미끄러짐(frictional slip)을 유발시키는 하중보다 상대적으로 커 파괴는 활렬 균열에 의해서 지배되는 반면, 매우 큰 공시체의 경우, 활렬파괴를 유발시키는 하중이 쐐기의 마찰 미끄러짐을 유발시키는 하중보다 낮아지게 되어 파괴는 쐐기의 마찰 미끄러짐에 의해서 지배된다는 것이다. 따라서, 공시체의 크기가 매우 커지게 되면 파괴시의 응력이 더

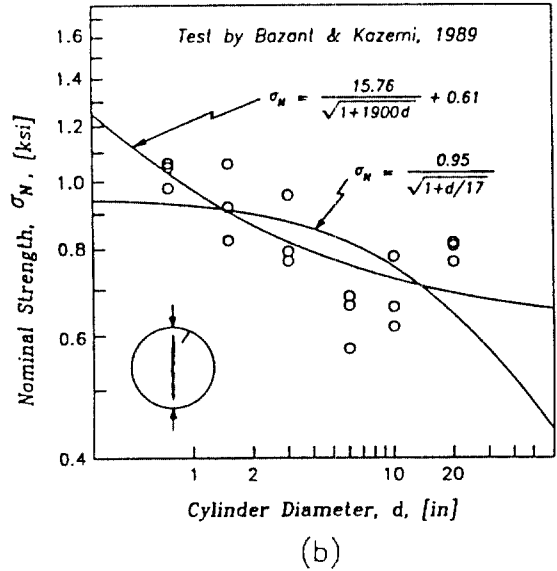
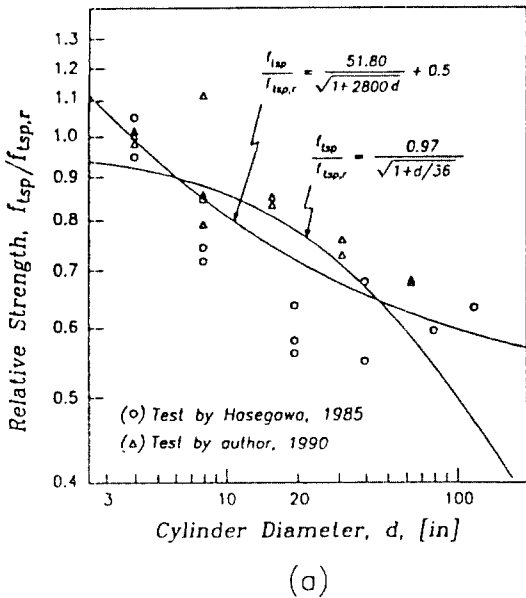


그림 8 활렬인장강도의 크기효과



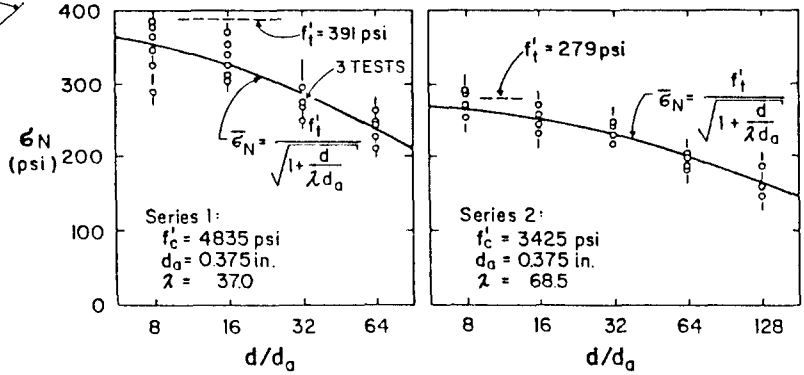
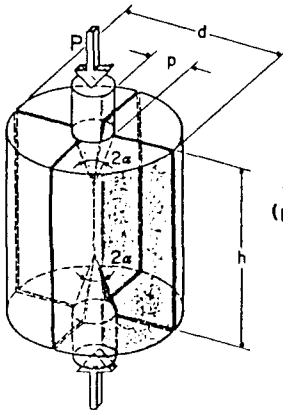


그림 9 Double-punch실험의 형태 및 실험 결과

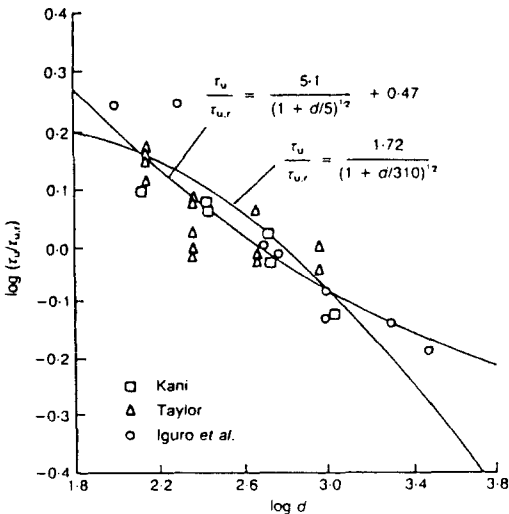
이상 감소하지 않는 하한값이 존재하게 된다는 것이다.

한편, Marti<sup>(13)</sup>는 직경을 7.6cm에서 122cm 까지 변화시킨 2개 시리즈의 원통형 콘크리트 공시체에 대하여 그림 9에 나타나 있는 바와 같은 double-punch 실험을 수행하여 그 크기효과를 규명하였다. 그림에서 알 수 있듯이 실험 결과는 Bazant의 크기효과 법칙과 잘 일치하는 경향을

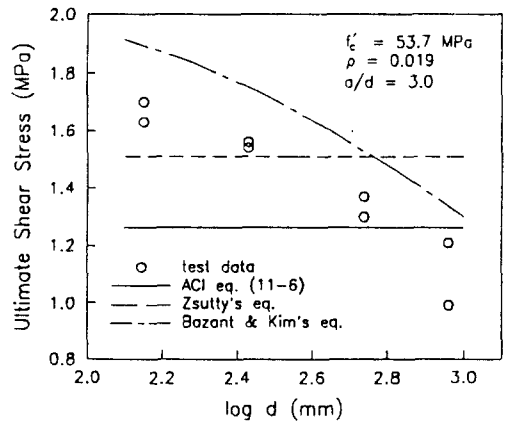
보여주었으며, 활렬인장실험에서와 같은 강도 감소 경향의 저하 현상은 나타나지 않았다.

### 3.2 전단

철근콘크리트 구조물의 대표적인 취성파괴의 일종인 보 전단파괴는 유효깊이가 증가함에 따라 전단강도가 감소하는 뚜렷한 크기효과를 나타내며, 이러한 현상은 다수의 연구자들에 의하여 실



(a) 그림 10 철근콘크리트 보 전단강도의 크기효과



(b)

험적으로 증명되어 왔다. 그림 10 (a)는 유효깊이 증가에 따른 철근콘크리트 보 전단강도 감소의 효과를 실험한 Kami<sup>(14)</sup>, Taylor<sup>(15)</sup>, Iguro<sup>(16)</sup> 등의 실험 결과를 상대강도로 나타낸 것인데, 두개의 실선은 각각 Bazant 크기효과 법칙과 수정된 크기효과 법칙에 따라 회귀분석한 결과를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 보의 유효깊이가 10cm 에서 300cm로 증가함에 따라 전단강도가 60% 이상 감소하는 매우 뚜렷한 크기효과를 보여주었다. 그림 10 (b)는 본 저자 등이 수행한 유효깊이에 따른 고강도 철근콘크리트 보의 전단강도 실험 결과<sup>(17)</sup>를 ACI 기준식, Zsutty 식 및 Bazant & Kim 식과 비교, 도시한 것인데, 유효깊이가 91.5cm인 대형 보의 경우, ACI 기준식이 안전측이 아니어서 대형 고강도 콘크리트 구조 부재의 전단강도를 판정할 때에는 이에 대한 고려가 필요할 것으로 사료되었다. Zsutty 식의 경우, 유효깊이가 27cm 인 보와 그 결과가 가장 근접하였는데, 그 이유는 실험실에서 전단강도 예측을 위한 실험틀은 대부분 이 정도 크기의 실험체를 사용하여 수행되었으며, Zsutty 식은 그 결과들을 조합하여 회귀분석한 모델식이기 때문인 것으로 판단된다. Bazant 크기효과 법칙에 근거하여 모델링된 Bazant & Kim 식의 경우, 예측값의 크기에 있어서는 실측치보다 다소 크게 평가하고 있는 것으로 나타났으나 유효깊이 증가에 따른 전단강도 감소의 경향에 있어서, 즉, 크기효과에 대해서는 실험 결과를 잘 예측하고 있는 것으로 사료된다.

한편, Bazant & Kazemi<sup>(18)</sup>는 최대골재 크기 8mm 의 마이크로 콘크리트(몰탈)를 사용한 철근 콘크리트 보에 대하여 유효깊이를 2cm 부터 33cm 까지 변화시켜 크기효과 실험을 수행하였다. 그들은 실험 결과로부터 사인장 파괴(diagonal shear failure)가 Bazant의 크기효과 법칙을 잘 따르는 파괴역학 형태의 뚜렷한 크기효과를 나타냄을 증명하였으며, 그림 11에 나타나 있는 바와 같이 Weibull의 통계학적 파괴 이론은 실험

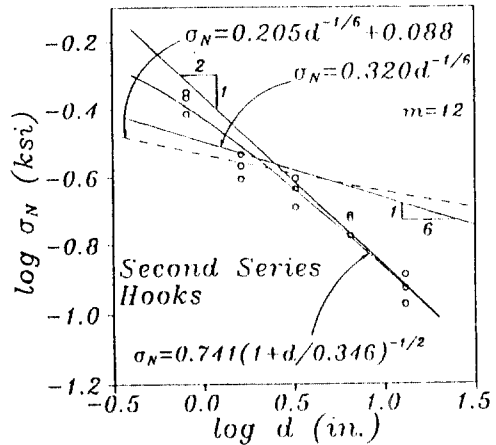


그림 11 Bazant 크기효과 법칙과 Weibull 크기효과와의 비교

결과를 잘 예측하지 못하므로 이를 사인장 파괴의 크기효과 해석에 적용하는 것은 적절치 못하다고 설명하였다.

Bazant & Cao<sup>(19)</sup>는 원형 철근콘크리트 슬래브에 대한 편칭 전단 실험을 수행하여 그 크기효과를 규명하였다. 그림 12는 그 결과를 도시한 것으로 보 전단강도에서와 같은 급격한 강도의 감소는 나타나고 있지 않으나, 유효깊이가 증가함에 따라 강도가 점진적으로 감소하는 경향을 보여주고 있다. 또한, 슬래브의 크기가 커질수록 최대하중 이후의 하중-처짐 곡선의 경사가 급해지는 현상을 보여주었다. 즉, 얇은 슬래브는 상대적으로 연성 거동을 하고 두꺼운 슬래브는 선형탄성파괴역학에 접근하는 취성 거동을 하는 것으로 나타났다.

### 3.3 압축

실린더 공시체의 크기가 커짐에 따라 콘크리트의 압축강도가 감소한다는 사실은 Gonnerman<sup>(20)</sup>에 의해 최초로 실험을 통하여 증명되었다. 그 후 많은 연구자들에 의해 콘크리트 압축강도의 크기효과에 관한 연구가 다양한 형태의 시험체에 대해서 수행되어 왔으며,<sup>(20-26)</sup> 인장이나 전단의 경우와 같이 강도의 급격한 감소는 발생하지 않으나 공시체의 크기가 커짐에 따라 콘크리트의 압축강

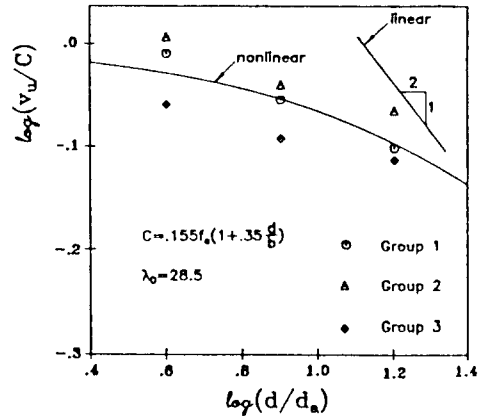
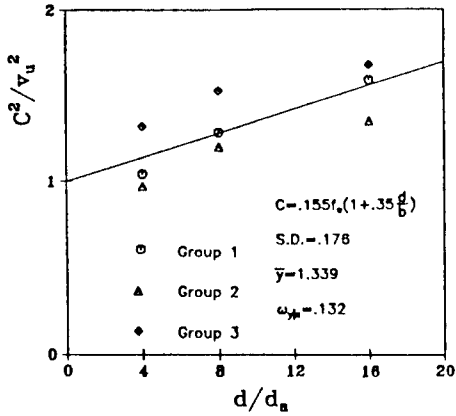


그림 12 편칭 전단강도의 크기효과

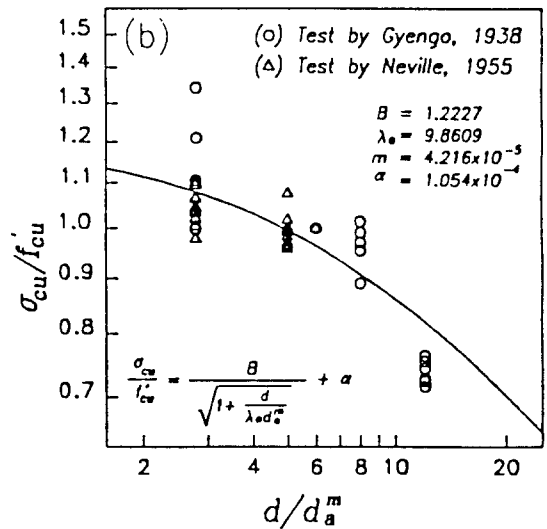
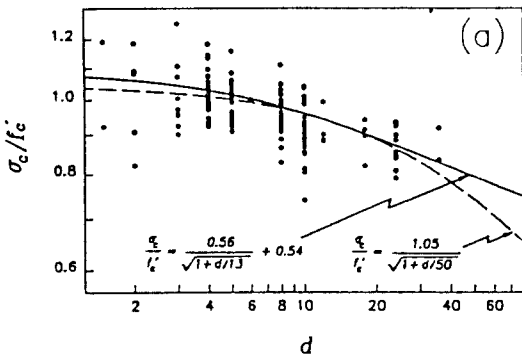


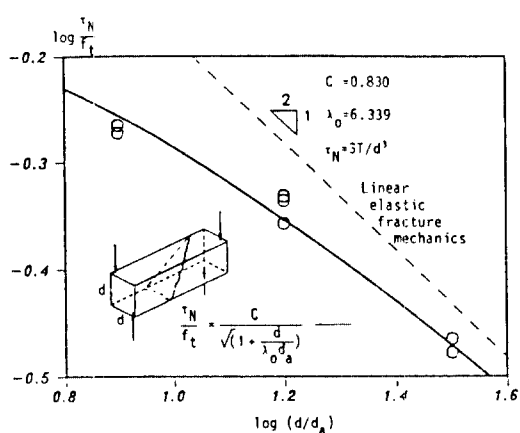
그림 13 콘크리트 압축강도의 크기효과

도가 감소하는 크기효과가 발생한다는 사실은 당연한 것으로 받아들여지고 있다.

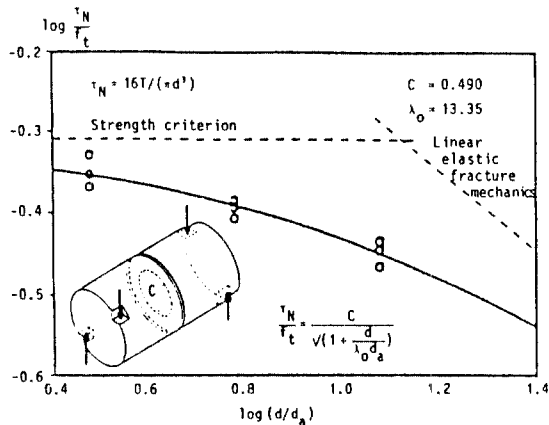
그림 13 (a)는 표준형 실린더 공시체의 직경에 따른 압축강도의 변화를 도시한 것으로, 직경이 증가함에 따라 압축강도가 점진적으로 감소함을 알 수 있다. 한편, 그림에서의 점선과 실선은 각각 Bazant 크기효과 법칙과 수정된 크기효과 법칙에 따라 회귀분석된 식인데, 압축강도의 경우 수정된 크기효과 법칙이 Bazant 크기효과 법칙보다 실험

치의 경향을 좀 더 잘 예측하고 있음을 알 수 있다.

우리나라, 미국, 일본 등지에서는 콘크리트의 압축강도를 판정하는 표준 공시체로 실린더형 공시체를 채택하고 있으나 유럽의 여러 나라에서는 실린더형 공시체 대신 정방형 공시체를 표준 공시체로 사용하고 있다. 그림 13 (b)는 정방형 공시체의 크기에 따른 압축강도의 변화를 도시한 것으로 실린더형 공시체의 경우와 유사하게 공시체의



(a)



(b)

그림 14 무근콘크리트 보의 비틀림에 관한 크기효과

크기가 증가함에 따라 압축강도가 서서히 감소하는 크기효과를 보여주고 있다.

### 3.4 비틀림

최근에 들어 Bazant 등<sup>(27)</sup>은 비틀림에 있어서의 크기효과를 규명하기 위하여 그림 14 (a)에 도시되어 있는 바와 같은 정방형의 무근콘크리트 보를 사용하여 실험을 수행하였다. 이들은 보의 높이를 3.75cm, 7.5cm, 15cm로 변화시켜 실험을 수행하였으며, 길이와 높이의 비(L/d)는 8/3로 고정시켰다. 여기서, 비틀림 강도  $\tau_N$ 은  $3T/d^3$  ( $T$  = 최대 토크,  $d$  = 정방형 단면의 한 변의 길이)로 정의하였다. 그림에서 알 수 있듯이 실험 결과는 뚜렷한 크기효과를 나타내고 있으며, Bazant 크기효과 법칙과 잘 일치하는 경향을 보여주고 있다. 한편, Bazant & Part<sup>(28)</sup>는 길이 - 직경비 (L/d)가 2인 원통형 공시체에 대하여 비틀림 실험을 수행하였다. 공시체는 그림 14 (b)에 나타나 있는 바와 같이 중앙부에 원통축과 직각 방향으로 깊이가  $d/4$  노치를 인위적으로 두었으며, 비틀림 강도는  $16T/\pi d^3$ 로 정의하였다. 실험 결과는 정방형 보의 경우와 유사하게 Bazant 크기효

과 법칙에 잘 부합되는 크기효과를 보여주었다.

비록 매우 제한된 실험 결과이기는 하나 앞의 실험 결과에 나타난 바와 같이 비틀림에 있어서도 전형적인 크기효과가 나타나고 있으며, 이러한 현상은 인장이나 전단의 경우에서와 유사하게 비선형 파괴역학에 의해 설명되어질 수 있을 것이다.

### 3.5 조인트

일반적으로 구조물 내부에 기하학적인 변화나 재료의 변화에 의해 존재하게 되는 불연속면을 조인트라고 한다. 예로서는 벽돌 사이의 조인트, 기제조된 슬래브 사이의 조인트, 콘크리트 표면과 보수 몰탈 사이의 조인트 그리고 PC 판넬 사이의 조인트 등이 있다.

조인트를 구성하는 재료의 성질을 선형탄성과 완전 탄소성의 두 가지 극단적인 경우로 가정하면, 선형탄성의 경우, 파괴시의 평균전단응력은  $\sqrt{d}$ ( $d$ 는 조인트의 길이)에 반비례하게 된다. 이것은 조인트의 길이가 길어지면 길어질수록 전달되는 전단응력강도는 감소한다는 것을 의미한다. 한편, 조인트를 구성하는 재료가 완전 탄소성 재료일 경우, 전달되는 전단응력 강도는 조인트의

길이에 영향을 받지 않게 되며, 따라서, 전달되는 전단력은 조인트의 길이에 비례한다.

만약 콘크리트 재료가 사용되었다고 가정하면, 고강도 재료일 경우 선형탄성 재료에 접근하는 거동을 할 것이고 강도가 감소할수록 완전 탄소성 재료에 접근하는 거동을 할 것이다. 그림 15는 Reinhardt<sup>(29)</sup>가 실험한 결과로서, 기 제조된 슬래브 조인트에 대하여 조인트 구성 재료인 몰탈의 강도와 조인트 길이를 변화시켰을 때의 평균전단강도의 변화를 도시하고 있다. 이때, 가해진 수직 응력은 0.15 MPa 이다. 그림에 나타나 있는 바와 같이 몰탈의 강도가 커질수록 크기효과가 크게 나

타나 선형탄성 재료에 접근하는 거동을 하고 있음을 알 수 있다.

#### 4. 기존 각국 표준에서의 크기효과

현재까지의 세계 여러나라 표준들은 몇몇 특별한 경우를 제외하고는 크기효과를 표준식에 반영하지 않고 있다. 그러나, 철근콘크리트 보 전단강도의 경우에는 파괴역학의 개념을 전단강도 해석에 도입하기 이전부터 크기효과에 관한 많은 연구가 수행되었으며, 많은 나라에서 크기효과를 도입한 예측식을 제안하고 있다. 따라서, 본 장에서는 철근콘크리트 보 전단강도를 중심으로 하여 각국의 표준식에 반영된 크기효과를 고찰해 보고자 한다.

##### 4.1 CEB-FIP (유럽)

스터럽이 없는 철근콘크리트 보의 전단강도를 예측하기 위한 CEB-FIP 표준<sup>(30)</sup>의 모델식은 다음과 같다.

$$v_c = 0.15(3d/a_v)^{\frac{1}{3}}(1 + \sqrt{200/d})(100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

윗 식의 유효깊이 항을 분석해 보면, 유효깊이가 매우 작은 보의 경우, 크기효과의 경향이 선형탄성 파괴역학(linear elastic fracture mechanics)에 근거한 크기효과에 접근하게 되며, 유효깊이가 매우 큰 보의 경우는 크기효과가 점점 감소하여 어떤 일정한 값에 수렴하게 된다. 후자의 경우는 이론적으로 비교적 타당한 것으로 판단되나, 전자의 경우, 콘크리트 구조물은 그 크기가 어느 정도 작아지게 되면 비선형 파괴역학을 따르는 거동을 보이다가 더욱 작아지게 되면 강도 기준(strength criterion)에 의해서 파괴가 발생한다는 일반적인 견해와는 다른 경향을 보여주고 있다.

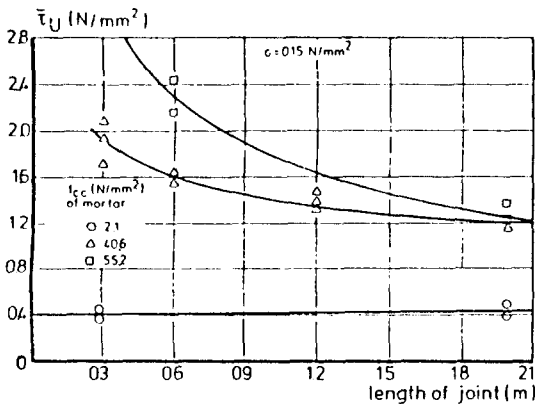
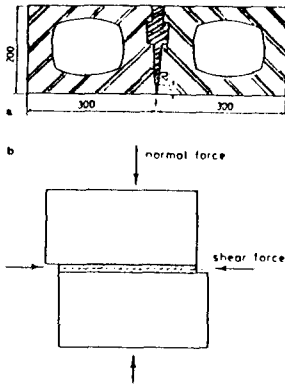


그림 15 조인트의 파괴시 전단강도에 관한 크기효과

4.2 BS 8110 (영국)

BS 8110 규준<sup>(31)</sup>은 철근콘크리트 보의 설계에 있어서 콘크리트가 부담하는 전단강도를 다음과 같이 제안하고 있다.

$$v_c = 0.79(100A_s/b_v d)^{\frac{1}{3}} (400/d)^{\frac{1}{4}} \times (f_{cu}/25)^{\frac{1}{3}} / \gamma_m \quad (21)$$

BS 8110 규준에서는 스티럽이 없는 철근콘크리트 보의 전단강도를 유효깊이의 1/4 승에 반비례한다고 가정하고 있는데, 이는 3 차원 유사성 (three dimensional similarity)을 가지는 구조물에 대한 Weibull의 통계학적 크기효과와 유사한 형태이다. 또한, Kani는 그의 실험 결과에 근거하여 보의 전단강도는 유효깊이의 1/4 승에 반비례한다고 제안하였으며, Gustafsson & Hillerborg<sup>(32)</sup>는 가상 균열 모델(fictitious crack model)에 근거하여 동일한 형태의 크기효과를 제안하였다.

4.3 일본토목학회 (일본)

일본토목학회에서 편찬한 콘크리트 표준시방서<sup>(33)</sup>에서는 전단강도 식의 형태 및 크기효과에 고려에 있어서 BS 8110 규준과 거의 동일한 다음과 같은 식을 제안하고 있다.

$$v_u = C.9^{\frac{4}{3}} \sqrt{100/d} \sqrt[3]{100\rho_t} \sqrt[3]{f_{ck}} \quad (22)$$

4.4 ACI (미국)

ACI 규준<sup>(34)</sup>에서는 현재까지 보 전단강도에 있어서의 크기효과를 고려해 주지 않고 있다. 그러나 ACI 논문집에 수록된 다수의 논문들이 철근콘크리트 보 전단강도에 관한 크기효과를 실험적으로 증명하고 있으며<sup>(11, 18)</sup>, 크기효과를 고려한 새로운 식을 제안하고 있다.<sup>(35, 36)</sup> 또한, ACI 규준 해설에서는 크기효과가 나타나고 있음을 지적하고 있다.

5. 결 언

이 글에서 논의된 크기효과(size effect)는 콘크리트 분야에서의 파괴역학 연구에 의한 하나의 작은 결과물에 지나지 않는다. 서언에서도 언급한 바와 같이 기존의 이론으로 모든 자연 현상을 설명할 수는 없는 것이다. 1960년 대 초까지, 즉, 콘크리트 구조에 파괴역학을 도입하기 이전까지는 실험에 의하여 나타나는 크기효과를 통계적 기법에 의해서만 설명되었으나, 그 이후 파괴역학의 적용으로 보다 합리적으로 그 현상을 설명할 수 있게 되었다. 이와 같이 새로운 이론의 적용으로 보다 나은 결과를 예측하는 것이 우리가 추구하는 길이 아닌가 본다. 물론 이 특집을 통하여 알 수 있듯이 콘크리트 구조물 또는 콘크리트 재료에 파괴역학을 적용함으로써 크기효과 외에도 많은 부분에서 보다 합리적인 해석이 가능할 것이며, 그러한 가능성을 위해 현재에도 많은 연구자가 이 분야에서 연구를 수행하고 있다. 또한 이미 부분적으로 콘크리트 재료, 구조 분야에 많이 응용되고 있다.

마지막으로 Elfgren 편집의 Fracture Mechanics of Concrete Structures<sup>(37)</sup>의 마지막 부분을 인용하면서 이 글을 끝내고자 한다.

"It is likely that in the near future the basics of fracture mechanics will be taught in all courses of concrete structures and that will form the base for all advanced design and analysis."

참 고 문 헌

1. Griffith, A. A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids," Philosophical Trans. Royal Society of London, A221, 1921, pp. 163-198.
2. Weibull, W., "Phenomenon of Rupture in Solids," Ingenioersvetenskap sakad Handl,

- Vol. 153, 1939, pp. 1-55.
3. Zaitsev, J. W., and Wittmann, F. H., "A Statistical Approach to the Study of the Mechanical Behavior of Porous Materials under Multiaxial State of Stress," Proceedings of 1973 Symp. on Mechanical Behavior on Materials, Kyoto, Japan, 1974, 705 pp.
  4. Mihashi, H., and Zaitsev, J. W., "Statistical Nature of Crack Propagation," Section 4-2 in Report to RILEM TC 50-FMC, ed. Wittmann, F. H., 1981.
  5. Carpinteri, L., "Mechanical Damage and Crack Growth in Concrete," Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
  6. Carpinteri, L., "Fractal Nature of Material Microstructure and Size Effects on Apparent Mechanical Properties," L. F. M. - Internal Report No. 1/92, Oct. 1992, 29 pp.
  7. Bazant, Z. P., "Size Effect in Blunt Fracture : Concrete, Rock, Metal", J. Engng. Mech., ASCE, Vol. 110, No. 4, 1984, pp. 518-535.
  8. Bazant, Z. P. , and Oh, B. H., "Crack Band Theory for Fracture of Concrete," Mater. and Struct. , Vol. 16. , No. 93, 1983, pp. 155-177.
  9. Kim, J. K. , and Eo, S. H., "Size Effect in Concrete Specimens with Dissimilar Initial Cracks," Magazine of Concrete Research, Vol. 42, No. 153, 1990, pp. 233-238.
  10. 長谷川俊昭, 鹽屋俊幸, 岡田武二, "コンクリートの割裂引張強度に關する寸法效果," 第7回コンクリート工學年次講演會論文集, 日本コンクリート工學協會, 1985, pp.309-312.
  11. 김진근, 구현상, 임선택, "크기가 다른 원형공시체의 할렬인장 실험을 통한 모르타르와 콘크리트의 파괴인성 연구," 콘크리트학회 논문집, 제2권, 제3호, 1990, pp.89-95.
  12. Bazant, Z. P., and Kazemi, M. T., "Size Dependence of Diagonal Shear Failure of Concrete Beams," Internal Report, Department of Civil Engineering, Northwestern Univ., Evanston, 1989.
  13. Marti, P., "Size Effect in Double-Punch Tests on Concrete Cylinders," ACI Materials J., Proceedings Vol. 83, No. 6, 1989, pp.597-601.
  14. Kani, G. N. J., "How Safe Are Our Large Reinforced Concrete Beams?," ACI J. , Proceedings Vol. 64, No. 3, 1967, pp.128-141.
  15. Taylor, H. P. J., "Shear Strength of Large Beams," Proceedings, ASCE, Vol. 98, ST11, 1972, pp. 2473-2490.
  16. Iguro, M., Shioya, T., Nojiri, Y., and Akiyama, H., "Experimental Studies on the Shear Strength of Large Reinforced Concrete Beams Under Uniformly Distributed Load," Proceedings, JSCE, No. 348, 1984, pp.175-184.
  17. 김진근, 박연동, "고강도 철근콘크리트 보의 전단 강도에 관한 크기효과," 한국콘크리트학회 가을 학술발표회 논문집, 제4권 2호, 1992, pp.155-160.
  18. Bazant, Z. P., and Kazemi, M. T., "Size Effect on Diagonal Shear Failure of Beams without Stirrups," ACI Structural J., Proceedings Vol. 88, No. 3, 1991, pp. 268-276.
  19. Bazant, Z. P., and Cao, Z., "Size Effect in Punching Shear Failure of Slabs," ACI Structural J., Proceedings Vol. 84, No. 1, 1987, pp. 44-53.
  20. Gonnerman, H. F., "Effect of Size and Shape of Test Specimen on Compressive Strength of Concrete," Proceedings, ASTM, Vol. 25, 1925, pp.237-250.
  21. Blanks, R. F., and McNamara, C. C., "Mass Concrete Tests in Large Cylinders," ACI J., Proceedings Vol. 31, No. 3, 1935, pp. 280-303.
  22. Dept. of the Interior, Bureau of Reclamation, Boulder Canyon Project, Final Report, Part VII-Cement and Concrete Investigations, Bulletin 4, Mass Concrete Investigations, 1925.
  23. Kesler, C. E., "Effect of Length to Diameter Ratio on Compressive Strength-An ASTM Cooperative Investigation," Proceedings, ASTM, Vol. 59, 1959, pp. 1216-1229.
  24. Gyengo, T., "Effect of Test Specimen and

- Gradation of Aggregate on Compressive Strength of Concrete," ACI J., Proceedings Vol. 34, No. 3, 1938, pp. 269-284.
25. Neville, A. M., "The Influence of Size of Concrete Test Cubes on Mean Strength and Standard Deviation," Magazine of Concrete Research, Vol. 8, No. 23, 1956, pp. 101-110.
  26. Murdock, J. W., and Kesler, C. E., "Effect of Length to Diameter Ratio of Specimen on the Apparent Compressive Strength of Concrete," ASTM Bulletin, No. 221, 1957, pp.68-73.
  27. Bazant, Z. P., Sener, S., and Prat, P. C., "Size Effect Tests of Torsional Failure of Plain and Reinforced Concrete Beams," Materials and Structures, Vol. 21, 1988, pp. 425-430.
  28. Bazant, Z. P., and Prat, P. C., "Measurement of Mode III Fracture Energy of Concrete," Nuclear Engineering and Design, Vol. 106, 1-8.
  29. Reinhardt, H. W., "Length Influence on Bond Shear Strength of Joints in Composite Precast Concrete Slabs," Intern. J. Cement Composites and Lightweight Concrete, Vol. 4, No. 3, 1982, pp. 139-143.
  30. CEB-FIP Model Code 1990, Comite Euro-International du Beton(CEB), Switzerland, July 1991.
  31. British Standards Institution, "BS 8110 : Structural Use of Concrete," BSI, London, 1985.
  32. Gustafsson, P. J., and Hillerborg, A., "Sensitivity in Shear Strength of Longitudinally Reinforced Concrete Beams to Fracture Energy of Concrete," ACI Structural J., Proceedings Vol. 85, No. 3, 1988, pp. 286-294.
  33. 日本土木學會, "コンクリート標準示方書," 1986.
  34. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete(ACI 318-89)," American Concrete Institute, Detroit, 1989, 353 pp.
  35. Bazant, Z. P., and Kim, J. K., "Size Effect in Shear Failure of Longitudinally Reinforced Beams," ACI J., Proceedings Vol. 81, No. 5, 1984, pp.456-467.
  36. Bazant, Z. P., and Sun, H. H., "Size Effect in Diagonal Shear Failure : Influence of Aggregate Size and Stirrups," ACI Materials J., Proceedings Vol.84, No. 4, 1987, pp.259-272.
  37. RILEM Technical Committee 90-FMA, "Fracture Mechanics of Concrete Structures," RILEM Report, ed. Elfgrén, L., 1987, 407 pp. 