

인장력을 받는 龜裂板의 應力擴大係數 算定을 위한 P-version 龜裂모델

P-version Crack Model for Computation of Stress Intensity Factor of Cracked Panels Subjected to Membrane Forces

윤	영	필*
Yun,	Y.	P.
우	광	성**
Woo,	K.	S.
박	병	기***
Park,	B.	K.
신	영	식****
Shin,	Y.	S.

요 약

續分型 르장드르 多項式과 假想 龜裂擴張法을 사용한 p-version 龜裂모델이 線形 彈性破壞力學에서 應力擴大係數를 算定할 수 있도록 제안되었다. 이 모델의 큰 長點은 少數의 要素를 사용하기 때문에 入力資料를 最少化할 수 있고 龜裂先端 부근에서 높은 正確도와 빠른 收斂率을 얻을 수 있다는 것이다. 이 연구를 통해 얻어진 두 가지 結論은 다음과 같다. 첫째, 變形에너지의 正解인 極限值가 收斂區間에 있는 連續된 3개의 p-version 유한요소 결과로부터 推定할 수 있다는 것이다. 둘째, 인장력을 받는 龜裂板 解析에서 p-version의 收斂率은 均等 또는 類似均等 要素分割에 근거를 둔 h-version 모델에 비해 거의 2배 가량 빠름을 알 수 있다.

Abstract

The p-version crack model based on integrals of Legendre polynomial and virtual crack extension method is proposed with its potential for application to stress intensity factor computations in linear elastic fracture mechanics. The main advantage of this model is that the data preparation effort is minimal because only a small number of elements are used and high accuracy and the rapid convergence can be achieved in the vicinity of crack tip. There are two important findings from this study. Firstly, the limit value, the strain energy of the exact solution, can be estimated with successive three p-version approximations by ascertaining that the approximations enter the asymptotic range. Sec-

* 목포전문대 토목공학과 부교수
 ** 전남대학교 토목공학과 조교수
 *** 전남대학교 토목공학과 교수
 **** 영남대학교 토목공학과 부교수

이 논문에 대한 토론을 1994년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1994년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

only, the rate of convergence of p-version model is almost twice that of h-version model on the basis of uniform or quasiuniform mesh refinement for the cracked panel problem subjected to tension.

1. 序 論

破壊力學 개념의 起源은 1921년에 발표된 Griffith^[1]의 破壞強度理論이라 할 수 있는데 에너지 개념에 근거를 둔 에너지放出率(strain energy release rate)을 이용하여 完全脆性材料내에 存在하는 龜裂의 不安定傳播를 설명하였다. 1940년대에 Irwin^[2]은 Griffith이론을 塑性變形이 다소 일어나는 延性材料의 破壞현상에도 적용할 수 있도록 이론을 확장하였다. 또한, Irwin이 導入한 應力擴大係數는 그 形이 간단하면서 物理的意味가 명료하다는 점 뿐만 아니라 에너지放出率 G 값과 일대일로 대응된다는 등의 利點이 있기 때문에 現在 가장 一般的으로 사용되는 破壞力學의 媒介變數이다. 龜裂先端에서의 응력 및 변위장은 幾何學的 形狀, 荷重 및 境界條件의 복합적인 函數이므로 이론적인 正解를 구하는 데는 많은 어려움이 있는 관계로 光彈性法(photo-elasticity) 등에 의한 實驗的인 方法 및 境界積分法(boundary integral method)과 有限要素法에 의한 近似解析이 많이 사용되고 있다. 한편, 龜裂問題는 $r^{-1/2}$ 형태의 應力特異性이 발생되어 r 이 0에 접근하게 되면 特異點 즉, 龜裂先端(crack tip)에서 應력이 無限大가 되는 까닭에 理論的 接近이 어렵게 된다. 그러므로, 근사해법이 모색되어 1970년 以後 유한요소법에 근거를 둔 많은 論文들이 발표되었는데 近似解의 正確度 및 收斂性을 높이기 위해 여러 가지 方法이 提案되었다.

破壊力學 解析에 있어서 유한요소법에 의한 應力擴大係數(stress intensity factor)의 算定은 Gallagher^[3]에 의하면 다음 네 가지로 분류될 수 있는데 (1) 直接法(direct method) (2) 에너지法(energy method) (3) 重疊法(superposition method) (4) 特異函數法(singularity function method)이다. 여러 研究者들은 初期龜裂(initial flaws)을 갖는 구조물의 해석에 있어서 特異舉動이 표현되지 않은 一般的인 h-version 要素의 적

용성을 연구하였는데 다음과 같은 問題에 直面하게 되었다. 첫째로, 龜裂先端에서 부터 거리 r 만큼 떨어진 점까지의 應力分布가 無限應力에서 有限應力으로의 急激한 轉移現狀을 從來의 要素는 表現되지 않는다는 점이다. 둘째는, 龜裂先端에서의 急激한 應力傾斜(stress gradient)를 나타내기 위해 龜裂先端에서의 要素分割을 매우 조밀하게 하여야 함으로 많은 自由度의 증가에 따른 컴퓨터 CPU 時間의 소요뿐만 아니라 많은 要素分割에 비하여 解의 信賴性에도 문제점을 안고 있다.

이러한 요구에 副應하기 위해 應力特異 舉動을 표현할 수 있는 特別한 龜裂先端 要素(crack-tip element)가 제안되어 解의 正確度 및 信賴性을 높일 수 있게 되었다. 特別要素의 部類는 세 가지로 요약해볼 수 있는데 첫째는, 要素의 節點을 이동시키면서 Jacobian Matrix의 行列式(determinant)을 0으로 유도하여 特異舉動을 묘사하고자 하는 연구인데 Byskov^[4]는 三角形 龜裂先端要素를 제안하였고 Hardy^[5]는 3:1의 形狀比를 갖는 四角形 龜裂先端要素를 개발하였는데 8절점을 갖는 變位形 要素이다. Barsoum^[6]은 20절점을 갖는 固體要素를 제안하였는데 邊節點(side node)의 中間節點(mid node)을 均열선단으로 1/4되는 위치에 이동시킴으로 특이거동을 표현하였다. 둘째는, 複合要素(hybrid element)의 定式化를 이용하였다. 이 研究의 중요한 利點은 應力擴大係數가 獨立的인 變數로 표시되어 直接的으로 計算할 수 있게 하는 것이다. 이 形式의 定式화는 Tong등^[7]에 의해 처음 시도되었는데 多項式 補間法에 기초를 둔 收斂率은 $r^{-1/2}$ 의 應력특이성에 대하여 多項式 近似值의 次數와 관계없다고 결론지었다. 이 結論은 단지 h-收斂 方法에 근거를 둔 때만 가능하다는 것이 p-收斂 方法을 사용한 여러 연구자들에 의해 밝혀졌다. 이러한 複合要素에서 과생된 變種의 복합요소들도 제안되어 있는데 Kang^[8]은 翕거동을 받는 有限板의 解析에 hybrid mongrel 特異要素를 사용하였다. 셋째는, 均열선단을 제외

한 영역에서는 종래의 變位要素를 그대로 사용하고 龜裂先端에서는 종래의 변위함수에 응력특이를 표현하는 이론적 변위함수를 더해 주는 방식으로 특이거동을 나타내는 補強混合要素(enriched mixed element)로 Benzely^[9], Heyliger^[10] 등에 의해 제안되었다. 즉, 균열선단에서 특이함수를 정의하는 방식인데 유한요소 정식화를 위해 混合變分法(mixed variational method)가 필요하게 된다.

平面 龜裂 問題를 갖는 p-收斂에 基礎를 둔 해석은 p-version 소프트웨어 COMET-X^[11]를 사용한 Mehta^[12]의 논문이 최초이다. 여기서 사용된 요소는 르장드르 다항식(Legendre polynomial)을 형상함수로 사용한 삼각형 요소이고 중요한 結論은 解析모델링이 매우 單純하며 收斂性을 검토하기 위해 自由度 數의 증가에 따른 에너지 正規值(energy norm)의 相對誤差를 계산하면 收斂率이 等媒介變數 要素를 사용하여 均等要素分割(uniform mesh refinement)을 한 h-收斂 방식에 비해 2배 가량 빠름을 보여주고 있다. 이 결과는 後에 Babuska^[13]에 의해 理論的으로 입증된다. 즉, p-收斂率이 均等要素分割에 基礎를 둔 h-收斂率보다 더 느리지 않으며 應力特異가 매우 심한 문제에서는 2배가량 빠르다고 수학적으로 豫測하였다. 한편, Woo^[14,15]는 龜裂을 갖는 圓筒形 쉘구조(cylindrical shells)와 軸對稱 回轉體(axisymmetric solids)에 p-version 유한요소법을 적용하여 좋은 결과를 보여주고 있다.

本 研究에서는 階層的 概念에 기초한 積分型 르장드르함수를 形狀函數로 사용한 四邊形要素를 사용하며 應力特異性을 표현하기 위해 어떠한 特異函數나 特別要素 개념을 사용하지 않아서 適用範圍의 限界를 갖지않는 p-version 一般要素가 사용되었는데 그 이유는 解析에 사용되는 高次 르장드르함수에 근거를 둔 변위함수가 $-1 < x < 1$ 에서 정의되었을 때 兩端에서의 接線기울기는 變形度를 나타내게 되며 이 변형도는 곧 應力傾斜(stress gradient)를 나타내는데 이 기울기가 매우 가파르게 되므로 $r^{-1/2}$ 응력경사를 갖는 균열 문제의 應力擴大係數 산정에 어떠한 特異函數나 特別要素를 사용하지 않고도 잘 표현할 수 있게

된다. 本 研究에서는 引張力을 받는 一邊 龜裂(single edged crack), 兩邊 龜裂(double edged crack)과 中央 龜裂(central crack)의 평판을 불과 4개의 요소를 사용하여 모델링하였으며 형상함수의 次數는 收斂性 조사를 한 결과 8次까지를 사용하였으며, 요소방정식을 풀기위해 Iron이 제안한 Frontal Solver가 이용되어 既存의 數值解析 結果 및 實驗式과 비교되었다. 한편, p-version 모델에는 자유도의 逆數와 變形에너지 放出率 사이에 強한 線形性을 발견할 수 있어서 Babuska가 제안한 p-version 유한해석의 誤差推定式을 사용한 外插方程式(extrapolation equation)을 유도하였으며 이를 이용하면 자유도가 無限大일 때의 응력확대계수를 구할 수 있는데 이 값을 極限值(limit value)이라 정의하였다. 또한, 응력확대계수를 구하기 위해서는 假想 龜裂擴張法(virtual crack extension method)을 채택하여 사용하였다.

2. P-version 龜裂모델

2.1 積分型 르장드르 形狀函數

積分型 르장드르 多項式(integrals of Legendre polynomial)을 사용한 形狀函數는 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 의 正規領域에서 정의되며 3개의 그룹으로 大別할 수 있다. 제1그룹은 四邊의 꼭지점에서 정의되는 $p=1$ 인 線形 형상함수로 基本 모우드(basic mode)라 하며 형상함수가 1차일 때의 等媒介變數 要素의 형상함수와 일치한다. 제2그룹은 形狀函數의 次數 p가 2이상일 때 꼭지점을 제외한 4개의 변에 추가되는 모우드로 周邊 모우드(edge mode)라 한다. 이 모우드는 節點의 좌표값을 갖지 않고 그림 1과 같이 단지 基本 모우드에 추가되면서 任意의 變位場을 정의하게 된다. 그러나, 幾何學的 形狀을 표현할 때는 基本 모우드만이 사용되는 반면에 變位場을 표현할 때는 모든 節點의 형상함수가 사용되는 까닭에 低媒介變數 要素(subparametric element)라 한다. 그러므로, 임의의 곡선경계를 나타내기 위해서는 基本 모우드만으로는 불가능하므로 적절한 寫像(mapping)이 필요하게 되므로 통상 超有限寫像(transfinite

mapping)이 이용된다. 한편, 周邊 모우드는 식 (1)과 같이 정의된다.

$$\{P_i(\xi) \mid i \geq 2, \xi \in [-1, 1], P_i(-1) = P_i(1) = 0\} \quad (1)$$

여기서, $P_i(\xi)$ 는 積分型 르장드르 함수로 식(2)와 같다.

$$P_i(\xi) = \int_{-1}^{\xi} L_{i-1}(t) dt \quad (2)$$

한편, $L_{i-1}(t)$ 는 Rodrigues에 의해 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (3)$$

제3그룹은 内部 모우드(internal mode)라 하며 유한요소 解가 수립될 수 있는 條件中 하나인 完全性(completeness)을 만족시켜 주기 위한 모우

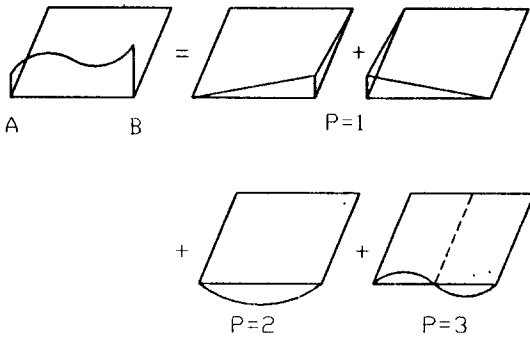


그림 1. 形狀函數 조합으로 정의되는 周邊 모우드

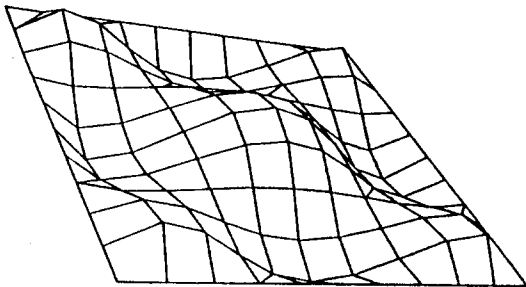


그림 2. p=8차 일 때의 内部 모우드

드로 $i+j=p$ 라고 했을 때 p가 4次 이상부터 발생하게 되며 식(4)와 같이 나타내며 要素의 邊에서는 모두 0이 됨을 만족시켜 준다.

$$N_i = P_i(\xi) \cdot P_j(\eta) \quad \text{for } i, j \geq 2 \quad (4)$$

그림 2에서 보는 바와 같이 p=8일 때의 内部 모우드는 불룩한 形狀을 나타내므로 거품 모우드(bubble mode)라고도 한다.

2.2 應力擴大係數의 算定

有限要素法을 사용하여 應力擴大係數를 산정하는 방법에는 假想龜裂擴張法(virtual crack extension method), 에너지 放出率法(energy release rate method), J-積分法 및 C.O.D.(Crack Opening Displacement)法과 C.S.D.(Crack Sliding Displacement)法으로 대별되는 變位法등이 있다. 假想龜裂擴張法과 에너지 放出率法은 모두 에너지법에 기초한 방법으로 龜裂進展 길이에 대한 變形에너지의 변화량인 에너지 放出率 G를 계산하여 應力확대계수를 산정하는 방법이며 龜裂進展 길이를 어떻게 表現하느냐에 따라 방법을 달리한다. J-적분법은 龜裂先端을 포함하는 임의의 경로(contour)에 대해 균열선단에서 貯藏된 에너지 값으로 特性지어지는 J값이 일정하다는 개념으로부터 Rice^[16]가 제안한 積分經路式을 사용해서 J를 구한다. 만약, 線形彈性인 경우는 $J=G$ 가 된다. 마지막으로 變位法은 龜裂先端으로부터 일정거리 r만큼 떨어진 몇 개의 점에서의 應力확대계수를 理論式으로 구한 후 거리 r에 대한 應力확대계수의 그래프를 사용하여 그래프의 接線이 $r=0$ 되는 점의 값이 균열선단에서의 應力확대계수로 간주하는 방법이다. 本 研究에서는 Parks^[17]와 Hellen^[18]에 의해 제안된 假想龜裂擴張法이 채택되었는데 이 방법은 假想龜裂 길이 δa 가 일정범위를 넘게 되면 에너지 放出率 G값이 不安定한 값을 보이게 되므로^[19] 적절한 δa 값을 결정하기 위한 敏感度 調査(sensitivity test)가 수행되어 安定된 G값을 갖는 δa 의 구간이 제시되었다. 本 研究에서는 龜裂길이가 a일 때 δa 는 $10^{-7} a$ 가 사용되었다.

한편, 龜裂面(crack surface)의 변화에 따른 에

너지 放出率은 物體力(body force)를 무시하였을 때 통상 식(5)와 같이 정의된다. 즉,

$$\int_0^a G(s) \cdot \delta a(s) ds = -\frac{1}{2} \{u\}^T \cdot \Delta[K] \cdot \{u\} \quad (5)$$

여기서, $G(s)$ 는 Griffith 에너지 값이고 J 와 같다. $\delta a(s)$ 는 假想龜裂 길이를 나타내는데 本研究에서는 그림 3과 같이 單位두께(unit thickness) 1을 갖는 龜裂平板을 고려하므로 龜裂面 s 의 영향은 무시한다. 그리고, $\{u\}$ 는 유한요소법으로 계산된 절점변위의 벡터를 표시하고 $\Delta[K]$ 는 假想龜裂에 따른 剛性度 행렬의 변화를 나타내며 식(6)과 같다.

$$\Delta[K] = [K]_{a+\delta a} - [K]_a \quad (6)$$

그러므로, $\delta a(s)$ 에 따른 變形에너지의 增減을 δU

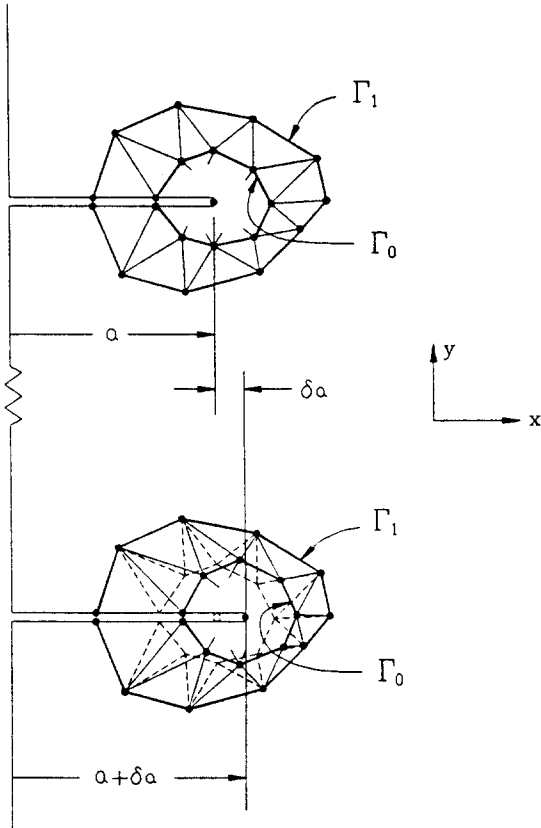


그림 3. 假想龜裂擴張法

라 할 때 에너지 放出率(energy release rate) $G(s)$ 는 식(7)과 같이 구할 수 있다.

$$G(s) = \frac{\delta U}{\delta a(s)} \quad (7)$$

한편, 引張 모드(opening mode)와 剪斷 모드(sliding mode)에 대한 에너지 방출률 G_I 와 G_{II} 는 응력확대계수 K_I 와 K_{II} 와 직접적인 관계를 갖는다. 즉,

$$K_I = \left[\frac{8\mu G_I}{1+\kappa} \right]^{1/2} \quad K_{II} = \left[\frac{8\mu G_{II}}{1+\kappa} \right]^{1/2} \quad (8)$$

여기서, μ 는 材料의 剪斷係數를 나타내며 ν 를 포아송 비라 할 때 κ 는 아래 식과 같다.

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{평면변형} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{평면응력} \end{cases} \quad (9)$$

한편, 引張 모드인 경우의 응력확대계수 K_I 은 幾何學의 形狀에 영향을 받게 되는데 식(10)과 같이 정의된다.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot F(a/b) \quad (10)$$

여기서, $F(a/b)$ 는 補正係數(correction factor) 또는 形狀係數(shape factor)라 하며 균열길이 a 와 平板의 幅 b 의 함수가 된다.

2.3 極限值(Limit Value)의 算定

一般的으로 有限要素 解析은 自由度가 增加되면서 正解에 收斂되는데 自由度가 增加되는 것을 擴張(extension)이라 하며 自由度가 增加되는 要因에는 解析方式에 따라 두 가지로 分類해 볼 수 있다. 즉, 요소의 個數를 잘게 分割하면서 增加되는 h -擴張(h -extension)과 形狀函數의 次數를 높이면서 增加되는 p -擴張(p -extension)이다. 그러므로, 유한요소의 解는 自由度의 增加에 따라 特定點에서의 變位 및 應力등의 單편적인 값이 正解에 수렴되는 것으로 收斂性を 파악할 수 있으며 이러한 방법을 局部 收斂性(local convergence)이라 하고 또 다른 방법은 自由度가 增加함에 따라

라 連續體내의 전체적인 거동을 표현하는 汎函數 (functional) 즉, 총포텐셜 에너지 값이 正解에 수렴되는 것으로 收斂性을 파악할 수 있는데 이러한 방법을 全體 收斂性(global convergence)라 한다. 한편, 本 研究에서는 p-擴張法을 사용하므로 이에 대한 解의 收斂性의 收斂區間(asymptotic range)은 Babuska^[13]가 제안한 아래 식이 유효하다.

$$|U(u_{ex}) - U(u_{fe})| \leq \frac{\kappa}{N_p^{2\alpha}} \quad (12)$$

여기서, $U(u_{ex})$ 는 實際變形 에너지(exact strain energy), $U(u_{fe})$ 는 유한요소법에 의한 近似變形 에너지(approximate strain energy), 2α 는 應力 特異 정도를 나타내며 通常 收斂率을 의미한다. 그리고, κ 는 임의의 陽數, N_p 는 형상함수의 次數가 p일 때의 自由度를 나타낸다. 한편, 유한요소의 解가 收斂區間內에 있을 정도의 充分한 자유도를 갖고 있다고 假定할 때 식(11)은 不等號 대신 等號로 대치할 수 있게 된다. 같은 概念으로 연속된 p-2, p-1, p일 때의 近似變形 에너지도 收斂區間內에 있다고 假定하면 收斂性에 대한 세 개의 方程式을 세울 수 있게 되므로 未知數 $2\alpha, \kappa$ 를 제거하여 정리하면 식(12)을 유도할 수 있다. 이 식을 사용하여 에너지 放出率을 구하는데 필요한 變形에너지의 精確한 값을 예측할 수 있게 되며 이러한 방법에 의해 계산된 實際變形 에너지를 極限值(limit value)라 정의한다. 이 값은 自由度가 無限大일 때의 유한요소법을 통해 추정할 수 있는 正解로 종래의 유한요소 방식인 h-擴張法을 통해 구할 때는 要素를 分割할때 均等要素分割 또는 이에 가까운 要素分割을 할 때만 가능하므로 幾何學的 形狀이 不規則할 때는 적용하기가 어렵게 된다. 그러나, p-擴張法은 幾何形狀을 표현할 수 있는 最少 個數로 모델링된 초기체눈을 그대로 사용하며 형상함수의 차수를 집중적으로 증가시키는 방식이므로 아무런 制限을 받지 않고 적용할 수 있다. 그러면, 實際變形 에너지를 구하는 外插方程式(extrapolation equation)는 다음과 같다.

$$\frac{\text{LOG} \frac{U_{ex} - U_p}{U_{ex} - U_{p-1}}}{\text{LOG} \frac{U_{ex} - U_{p-1}}{U_{ex} - U_{p-2}}} = \frac{\text{LOG} \frac{N_{p-1}}{N_p}}{\text{LOG} \frac{N_{p-2}}{N_{p-1}}} \quad (12)$$

여기서, U_{p-2}, U_{p-1}, U_p 와 N_{p-2}, N_{p-1}, N_p 는 형상함수가 p-2, p-1, p일 때의 유한요소법에 의해 계산된 變形에너지와 自由度 數를 각각 나타낸다.

3. 數值解析例

앞에서 제안된 p-version 龜裂모델의 성능을 보이기 위해 引張力을 받는 龜裂板해석을 하였는데 均열의 위치에 따라 中央龜裂板, 兩邊龜裂板 및 一邊龜裂板으로 나누어 수행하였다. 이에 대한 形狀과 p-version 유한요소 모델이 그림 4에 나타나 있다. 사용된 p-version 모델은 p의 次數가 8次이며 要素數는 4개로 四邊形 階層要素가 사용되었으며 평판의 두께는 단위두께 1.0이 사용되어 平面

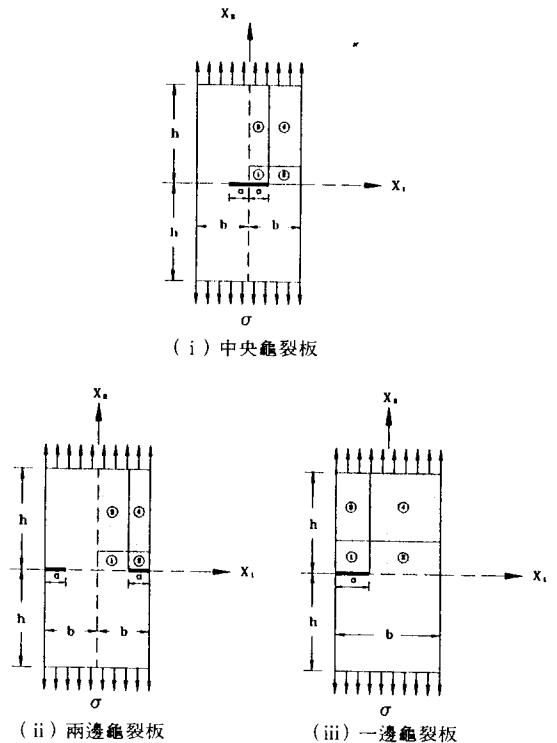


그림 4. 引張力을 받는 龜裂板의 形狀과 p-version 유한요소 모델

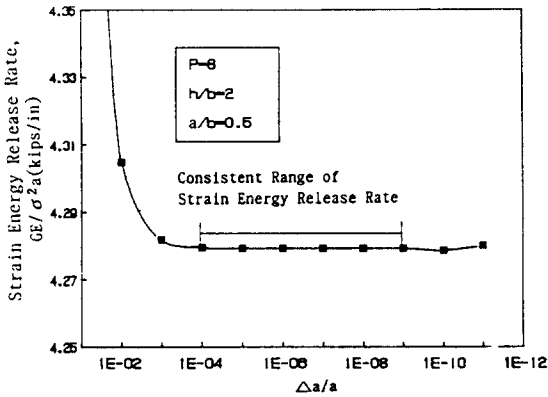


그림 5. 中央龜裂板에서 假想龜裂이에 대한 變形에너지 放出率의 敏感度

應力 상태로 가정하여 해석되었고 h/b 는 2로 가정하였다. 그리고, 假想龜裂길이 δa 는 龜裂길이를 a 라 할 때 그림 5에서 보는 바와 같이 假想龜裂 길이의 변화에 따른 變形에너지 放出率의 敏感度를 조사하면 중앙균열판의 경우 δa 가 $10^{-4} a$ 에서 $10^{-9} a$ 까지는 變形에너지 放出率이 안정한 구간으로 판단할 수 있다. 一邊龜裂 및 兩邊龜裂의 경우도 이와 같은 敏感度 調査를 실시한 결과 δa 를 $10^{-7} a$ 를 사용하였다.

한편, 식(12)을 사용하여 自由度가 無限大일 때의 極限值인 中央龜裂板의 正規화된 에너지 방출률과 應력확대계수를 정의하는데 필요한 補正係數(correction factor) F 는 p 의 次數가 수렴구간에 있는 5, 6, 7次를 사용하여 구하였으며 표 1과 같다. 즉, $p=8$ 일 때의 補正係數 F 가 1.05475인데

표 1. 中央龜裂板의 補正係數 F 의 比較

P-level	N.D.F	$GE/\sigma^2 a$	補正係數 F
4	84	3.20031	1.00930
5	121	3.33790	1.03077
6	166	3.41298	1.04230
7	219	3.46186	1.04973
8	280	3.49500	1.05475
∞	∞	3.61517	1.07273
Irwin	-	3.46410	1.05008
Brown	-	3.57766	1.06715
Fedderson	-	3.62762	1.07457
Dixon	-	3.53429	1.06066
Crack Handbook	-	-	1.075

비하여 外插法에 의한 極限值는 1.07273으로 Tada^[20]의 Crack Handbook의 實驗式으로부터 제시된 1.075에 더욱 근사함을 보여준다.

또한, 補正係數 F 는 앞에서 설명한 바와 같이 幾何學的 形狀 즉, h/b 와 a/b 의 함수가 되는데 Rooke등^[21]의 결과와 그림 6에 비교되었는데 $p=8$ 次인 4個 要素로 모델링된 p -version 결과와 잘 일치됨을 알 수 있다. 그림 7에서는 초기체를 $p=1$ 次인 2×2 체눈망으로 시작하여 h -收斂 유한요소법은 均等要素分割을 통해 正解에 수렴시키고 p -收斂 유한요소법은 $p=1$ 에서 점차적으로 증가시키면서 正解에 수렴되고 있다. 收斂율을 비교하기 위해 自由度와 에너지 正規值(norm)를 로그(log) 좌표계에 그려보면 相對誤差 1%에 접근하기 위해서 h -收斂 방식은 自由度 數가 14960이 필요한 반면 p -收斂 방식은 불과 377의 自由度 數를

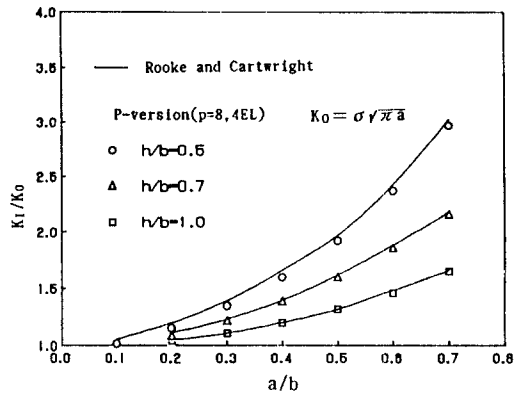


그림 6. 中央龜裂板의 龜裂進展 길이에 대한 補正係數

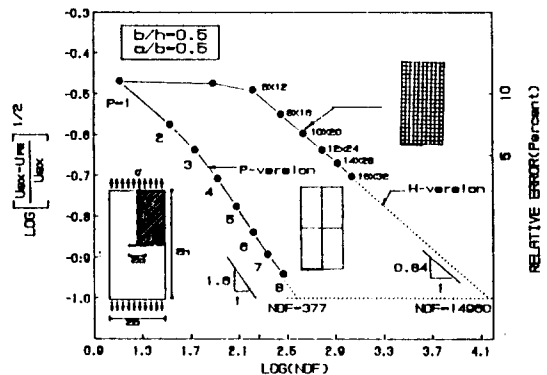


그림 7. 中央龜裂板의 h -version 모델과 p -version 모델의 收斂率

필요로 한다. 아울러 수렴률은 그래프의 기울기로 비교할 수 있는데 거의 2배 가량 p-收斂 방식이 큼을 알 수 있다.

둘째 例題로 兩邊龜裂板 문제가 해석되었는데 그림 8에서는 균열판과 균열의 길이가 각각 $h/b=2$ 와 $a/b=1/3$ 일 때 變形에너지 방출률의 極限值가 산정되었는데 그림에서 보듯이 自由度の 逆數와 變形에너지 방출률과의 관계는 $p=5$ 次 부터 강한 선형성을 보여주고 있다. 이 결과는 식 (12)의 外插방정식이 유효함을 입증해 준다. 그림 9에서는 균열진전 길이에 따른 補正係數값이 여러 연구자들의 결과와 비교되었는데 중앙균열판의 경우와 같이 p-收斂 방식은 높은 精度를 보여주고 있다.

마지막의 예제는 一邊龜裂板으로 표 2에서는 龜裂先端的 응력특이를 해석하기 위해 여러 연구자

표 2. 龜裂板 解析을 위한 有限要素

Investigator	Method of determining Stress Intensity Factor	Element Formulation	Element Shape at Crack tip
Watwood	Energy Release	Displacement	Quadrilateral
Anderson	Energy Release	Displacement	Quadrilateral
Tracy	Singular Function	Displacement	Triangle
Walsh	Singular Function	Hybrid	Rectangle
Byskov	Singular Function	Displacement	Triangle
Fix	Singular Function	Displacement	Square
Pian	Singular Function	Hybrid	Quadrilateral
Benzley	Singular Function	Displacement	Quadrilateral
P-version	Virtual Crack Extension	Displacement	Quadrilateral (Subparametric)

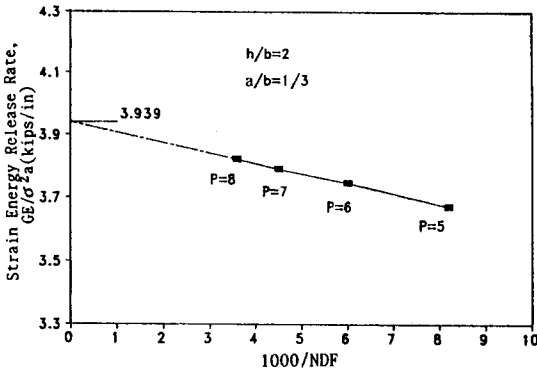


그림 8. 變形에너지 放出率의 極限值 算定

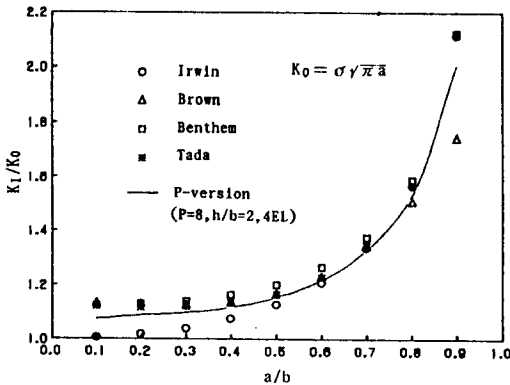


그림 9. 兩邊龜裂板의 龜裂進展 길이에 대한 補正係數

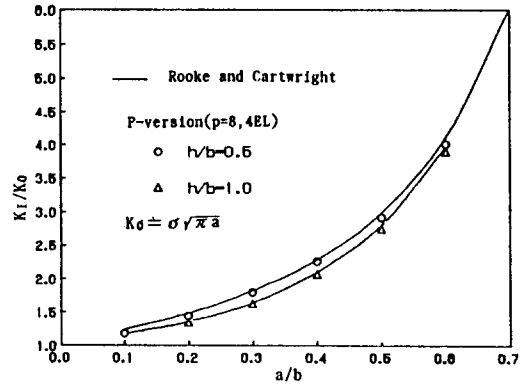
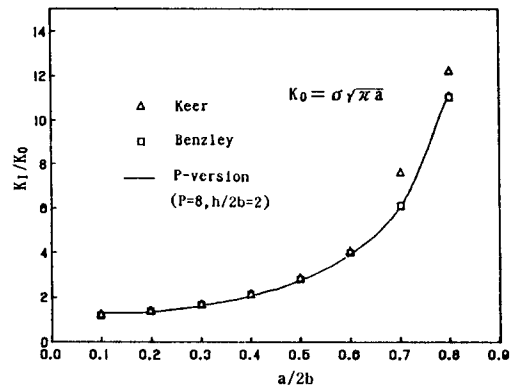


그림 10. 平面應力상태에서 一邊龜裂板의 補正係數



들에 의해 제안된 有限要素들이 나타나 있다. 이 문제는 平面應力 상태와 平面變形 상태로 나누어 각각 비교하여 보았다. 먼저, 平面應力 상태로 해석한 p-收斂 모델의 결과는 Rooke등^[21]의 값과 그림 10에 비교되어 높은 精度의 보정계수를 보여주고 있다. 한편, 平面變形 상태로 해석한 p-收斂 모델과 역시 평면변형 상태에서 補強混合要素(enriched mixed element)를 사용하여 110개로 요소분할한 Benzely^[9]의 값등과 비교되어 그림 11과 같이 좋은 일치를 보여주고 있다.

4. 結 論

現在 사용되고 있는 h-version 유한요소법에 의한 龜裂解析은 應力特異가 발생하는 龜裂先端에서 從來의 等媒介變數 要素의 경우 매우 잘게 分割해야 하며 要素分割에 따른 自由度的 增加에 비하여 收斂率이 낮음과 동시에 正確도와 信賴性이 떨어지는 문제점을 보여준다. 이를 해결하기 위해 제시된 많은 特別要素들이 있지만 역시 適用性的의 한계를 보여 준다. 本 研究에서 제안된 p-version 龜裂모델은 特異函數나 混合變分原理등을 사용한 다든가 중간절점을 4분점 위치에 이동시키는 등의 특별한 개념을 사용하지 않으면서도 높은 正確도와 빠른 收斂率을 보여주며 또한, 불과 4개의 요소를 사용하여 균열판해석을 효율적으로 할 수 있는 모델의 단순성을 큰 장점으로 꼽을 수 있다. 本 연구를 통해 얻어진 중요한 결론은 다음 두 가지로 요약해 볼 수 있다. 첫째는, 그림 7에서 보는 바와 같이 收斂率은 등매개변수 요소를 사용하여 均等 要素分割을 통한 h-version 모델에 비해 p-version 모델이 2배 가량 빠름을 알 수 있었고 둘째는, 收斂區間에 있는 3개의 연속적인 p-version 해석결과를 갖고 極限值를 추정할 수 있다는 사실이다. 이 결과를 사용하면 자유도가 무한대일 때의 正解(exact solution)를 유한요소법을 사용하여 결정할 수 있게 된다.

감사의 글

본 연구는 1993년도 포항종합제철주식회사의

연구비 지원으로 수행되었으므로 이에 깊은 감사를 포함합니다.

5. 參考文獻

- (1) A.A. Griffith, "The Phenomena of Rupture and Flaw in Solids," *Phil. Trans., Royal Society of London*, Vol.A-221, pp.163-198 (1920)
- (2) G.R. Irwin, "Fracture Dynamics," in *Fracturing of Metals*, American Society of Metals, Cleveland (1948)
- (3) R.H. Gallagher, "Survey and Evaluation of the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics Analysis," *Proceedings of First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Berlin, Vol.6, pp.637-648 (1972)
- (4) E. Byskov, "The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method with Cracked Elements," *Int. J. Frac. Mech.*, Vol.6, No.2, pp.159-167 (1970)
- (5) R.H. Hardy, "A High-order Finite Element for Two-dimensional Crack Problems," *Ph.D. Dissertaion*, Georgia Institute of Technology (1974)
- (6) R.S. Barsoum, "A Degenerate Solid Element for Linear Fracture Analysis of Plate Bending and General Shells," *Int. J. Num. Mech. Eng.*, Vol.10, pp.551-564 (1976)
- (7) P. Tong and T.H.H. Pian, "On the Convergence of the Finite Element Method for Problems with Singularity", *Int. J. Solids Struct.*, Vol.9, pp.313-321 (1973)
- (8) C.H. Kang and G. DE Saxce, "Computation of stress intensity factors for plate bending problem in fracture mechanics by hybrid mongrel finite element," *Computers & Structures*, Vol.42, pp.581-589 (1992)
- (9) S.E. Benzely, "Representation of singularities with isoparametric finite elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.10, pp.1281-1287 (1974)
- (10) P.R. Heyliger and R.D. Kriz, "Stress intensity factors by enriched mixed finite elements," *Int.*

- J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.28, pp.1461-1473 (1989)
- (11) P.K. Basu, M.P. Rossow and B.A. Szabo, "Technical Documentation and User's Manual: COMET-X," *Report No. R-340*, Federal Railroad Administration (1977)
- (12) A.K. Mehta, "P-convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechanics," *Doctoral Dissertation*, Washington University, St. Louis, Missouri (1978)
- (13) I. Babuska and B.A. Szabo, "On the Rates of Convergence of the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.18, pp.323-341 (1982)
- (14) 우광성, "균열 셀의 파괴역학해석을 위한 선진 유한요소기법," *전산구조공학*, 제3권, 제3호, 101-111 (1991)
- (15) 우광성의 2인, "계층적 축대칭요소에 의한 P-version 모델," *대한토목학회*, 제12권, 제4-1호, 67-76 (1992)
- (16) J.R. Rice, "A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks," *Trans. ASME J. Appl. Mech*, Vol.35, pp.379-386 (1968)
- (17) D.M. Parks, "A stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors," *Int. J. Fracture*, Vol.10, No.4, pp.487-502 (1974)
- (18) T.K. Hellen, "On the method of virtual crack extensions," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.9, 1, pp.187-208 (1975)
- (19) 우광성, 이채규, "P-version 유한요소법에 의한 피로균열해석," *전산구조공학*, 제5권, 제3호, 97-103 (1992)
- (20) H. Tada, P. Paris and G.R. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Second Edition, Paris Production Inc. (1985)
- (21) D.P. Rooke and D.J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, Her Majesty's Stationery Office (1976)

(접수일자 : 1993. 4. 14)