

# 유한요소해석에서 r-h형 적응법에 관한 연구 A Study on the r-h methods in Finite Element Analysis

김 동 일\*  
Kim, Dong-Il  
유 형 선\*\*  
Yoo, Hyeong-Seon

## 요 약

최근 유한요소해석에서 보다 정확한 해를 위한 적응해석법에 대해 많은 연구가 이루어지고 있다. 본 논문은 요소 면적당의 오차를 균일화하여 절점을 최적의 위치로 변화시키는 r법과 오차가 큰 요소를 같은 모양의 요소로 세분시키는 h법을 혼합한 rh형 적응해석법을 사용하였다. 그 결과 같은 자유도에서 h법과 rh법의 오차 감소율과 수렴속도는 거의 같게 나타났지만, rh법은 h법만 사용했을 때보다 전체 자유도 증가를 최대한 억제 한 상태에서 정확한 유한요소해를 얻을 수 있었다.

## Abstract

Recently, many researches are being dealt with the adaptive method for improving the accuracy of finite element solution. This paper deals with rh-methods that are the combination of r and h-method : r-method is to relocate the nodes for the grid optimization, h-method is to divide the elements with great error into the equal shape. As a results, rh-method has the same error decrease and convergence as h-method in the same degree of freedom, but it has more exact result of finite element in the state of restraining degrees of freedom than h-method alone.

### 1. 머리말

미분 방정식의 해를 구하는 유한요소법은 공학의 많은 분야에서 응용되고 있으며 정확한 해를 얻기 위한 오차해석과 적응 해석법에 대한 많은 연구가 되어지고 있다.

해의 정확도를 높이기 위한 後誤差 해석방법에는 자유도를 고정한 채 절점의 위치를 최적의 위치로 변화 시키는 r법<sup>(1)</sup>, 오차가 큰 요소를 같은

형태의 요소로 세분화 시키는 h법<sup>(1)</sup>, 오차가 큰 요소의 형상함수 차수를 증가 시키는 p법<sup>(1)</sup>이 있으며 이러한 방법을 혼합한 rp법<sup>(2)</sup>, hp법<sup>(3,4)</sup>이 있으며 이론상 h법과 p법은 오차를 무한히 줄일 수 있으나 자유도와 剛性行列의 크기가 계속 증가하고 r법은 오차의 수렴에 한계가 있으며 자유도와 剛性行列의 크기는 증가하지 않는다.

본 논문은 자동 또는 수동으로 요소분할을 하였을 때 특이영역에서 발생하는 解의 오차를 줄이기

\* 仁荷大學校 自動化工學科 大學生  
\*\* 정희원, 仁荷大學校 自動化工學科

이 논문에 대한 토론을 1994년 3월 30일까지 본학회에 보내 주시면 1994년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

위해 위의 방법중 r법을 사용하여 자유도의 증가를 최대한 억제한 상태에서 절점의 위치를 재배열하여 오차가 큰 요소는 면적이 줄고 오차가 작은 요소는 상대적으로 면적이 커져 일차적으로 상대 오차를 줄인 후에 h법으로 오차가 큰 요소를 세분하여 오차를 줄이는 rh법을 사용함으로써 주어진 영역에서 해의 오차를 줄여 요소를 최적화 시키고 h법만을 사용했을 때보다 컴퓨터의 메모리 사용량을 최소화시킨다.

## 2. 오차이론 및 격자최적설계

### 2.1 오차의 크기

유한요소법에서 정확한 근사해를 구하는 것은 중요한 문제이다. 미분방정식은 요약하여 아래와 같은 형태로 표현된다.<sup>(5,6)</sup>

$$Lu = f \text{ in } \Omega \quad (2.1)$$

$L$ : 線形微分子       $u$ : 未知函數  
 $f$ : 既知函數       $\Omega$ : 解析領域

(2.1)식은 근사함수(weak formulation)로 다음과 같이 나타내어진다.

$$a(u, v) = F(v) \text{ for every } v \in V \quad (2.2)$$

$a(u, v)$ :  $U \times V$ 에서 정의되어진 쌍일차(bilinear) 쌍연속(bicontinuous)  $V$ -elliptic 함수

$F(v)$ :  $V$ 에서의 有界函數

$V$ : Sobolev 副空間

근사치의 오차(e)는 다음과 같이 표현된다.

$$e = u - u_n \quad (2.3)$$

$$u_n = \sum_{i=1}^M a_i N_i$$

$N_i, i=1, 2, \dots, M$ : 형상함수

$u_n$ : (2.2)식에서 절점과 함께 결정되어지는 변수

$a_i$ : 근사치  $u_n$ 의 절점값과 함께 주어지는 값

오차(e)는 여러가지 正規化의 형태로 나타내어질 수 있으며 가장 널리 쓰이는 것은 아래와 같이 정의된 에너지 正規化의 형태이다.

$$\|v\| = a(v, v) \quad (2.4)$$

또한 이러한 오차는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$\|u - u_n\| \leq Ch^{\min(m-1, p)} \quad (2.5)$$

$h$ : 가장 큰 요소의 특성 길이

$p$ : 기본함수의 차수

$m$ : 특이점에서의 차수의 크기

(a measure of the order of the singularity in the problem)

$C$ : 양의 정수

유한요소법에서 格子를 고정시키고  $p \Rightarrow \infty$ 로 하는 것도 가능하다. 오차의 측정과 보간은  $h$ 뿐만 아니라  $p$ 로써 표현할 필요가 있다. 이와 같은 것은 Babuska와 Dorr<sup>(7)</sup>에 의해서 이루어졌다.

$$\|u - u_n\| \leq Ch^{\min(p, m-1)} p^{-(m-1)+\epsilon}, \epsilon > 0 \quad (2.6)$$

(2.6)식은  $p$ 가 증가함에 따라 수렴하는 것을 알 수 있다.

### 2.2 유한요소 근사값

유한요소의 오차, 보간오차와 그 오차한계는 Sobolev 공간  $H^m(\Omega)$ 에서 正規化와 準正規化의 형태로 측정되어진다.<sup>(8)</sup>

正規化

$$\|v\|_{m, \Omega} =$$

$$\left\{ \int_{\Omega} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} \left[ \frac{\partial^{(\alpha_1 + \alpha_2)} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(2.7)

準正規化

$$|v|_{m, \Omega} = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m} \left[ \frac{\partial^{(\alpha_1 + \alpha_2)} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

m: 미분차수  
 $\alpha_1, \alpha_2$ : 양의 정수

2.3 보간오차 이론

유한요소해의 공간을 차수  $k \geq 1$ 이고  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ 라 하자. 이 때  $h_K$ 를 요소  $K$ 의 특성길이라 하면  $K$ 에 독립하는 양의 상수  $C$ 가 존재하고 모든 유한요소에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\|u - u_I\|_{m, K} \leq C h_K^{k+1-m} |u|_{k+1, K} \quad 0 \leq m \leq k \quad (2.9)$$

위의 결과는 격자의 최적화를 위하여 기본이 되는 식이다.

이제 다음과 같이 정의된 함수  $B(u, h)$ 를 생각하자.

$$B = \left\{ \sum_{K=1}^M h_K^{\beta} |u|_{k+1, K}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_M)$$

$\beta$ : 주어진 변수

대부분의 문제에서의 正規化은  $H^1(\Omega)$ 에서의 正規化과 동일하므로 (2.9)식과  $B$ 의 정의를 이용하면

$$\|u - u_n\|_{1, \Omega} \leq C B(u, h), \quad \beta = 2k \quad (2.11)$$

요소면적  $A_K$ 의 항을 사용해도 비슷한 결과가 가능하다. 균일한 요소에서  $K$ 에 무관한 상수  $\sigma$ 가 존재한다. 즉, (2.9)식을 이용하여

$$\begin{aligned} \|u - u_I\|_{m, K} &\leq \sigma C A^{\frac{1}{2}(k+1-m)} |u|_{k+1, K} \\ \|u - u_n\|_{1, \Omega} &\leq \sigma C B(u, A), \quad \beta = k \\ A &= (A_1, A_2, \dots, A_M) \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.4 격자 최적화

함수  $B$ 는 격자의 최적화를 위한 기준이 된다. 1차원 문제에 있어서는  $B$ 는 요소길이의 함수로써 나타내어지고, 2차원 문제에 있어서는 요소의 면적이 사용된다.<sup>(8)</sup>

(1) 1차원 격자

다음에 대하여 요소길이  $h=(h_1, h_2, \dots, h_M)$  벡터를 구한다.

$$\text{Minimize } B^2(u, h) = \sum_{K=1}^M h_K^{\beta} |u|_{k+1, K}^2 \quad (2.13.a)$$

$$\text{제약조건 } \sum_{K=1}^M h_K = 1 \quad (2.13.b)$$

$$h_K \geq 0 \quad (2.13.c)$$

$$\beta = 2k$$

(2) 2차원 격자

고정된 경계의 영역에서 다음의 요소면적의 벡터를 구한다.

$$\text{Minimize } B^2(u, A) = \sum_{K=1}^M A_K^{\beta} |u|_{k+1, K}^2 \quad (2.14.a)$$

$$\text{제약조건 } \sum_{K=1}^M A_K = 1 \quad (2.14.b)$$

$$A_K \geq 0 \quad (2.14.c)$$

2.5 적응해석법

최적적자 설계에 기본을 두는 적응해석법은 아래 식으로 나타내어질 수 있다.

$$^1 \text{ Minimize (Maximum Ee)} \quad (2.15)$$

격자  $e=1,2,\dots,N_e$

Ee: e번째 유한요소 오차의 크기

Ne: 총 유한요소의 수

초기 오차해석 후에 (2.15)식에 의하여 적용 해석이 실행되면 오차가 큰 요소 순으로 선택하여 최적조건이 되도록 r과 rh법에 의해 격자가 다시 구성되고 선택된 요소의 오차는 감소한다.

$$Ee = \text{상수} \quad \text{for } e=1,2,\dots,N_e \quad (2.16)$$

모든 요소의 오차값이 일정해져 (2.16)식이 만족된 근사해가 얻어질 때까지 반복된다. 적응해석법에는 다음과 같은 것들이 있다.

(1) r법

가장 오래된 방법중의 하나로서 각 요소의 오차값에 따라 격자점이 움직여 오차가 큰 요소의 면적은 줄어들고 상대적으로 오차가 작은 요소는 면적이 증가하게 된다. 이 때 반복수행됨에 따라 새로운 절점은 다음 조건을 만족해야 된다.

$$f_K = A_K |\hat{u}|^2_{k+1,K} = \text{상수} \quad (2.17)$$

절점의 위치는 절점근처 요소의  $f_K$  값에 의해 결정된다. 만일  $f_K$ 의 크기가 평균치보다 크면 요소 K 주위로 이동하여  $f_K$ 의 크기가 감소한다. 절점은 항상 두개의 요소에 의하여 공유되어 있기 때문에 절점의 이동 폭은 상대적인  $f_K$ 의 값에 의존한다.

v번째 반복 후 변한 새로운 절점의 위치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(1)</sup>

$$x_n^{v+1} = \frac{\sum_{K \in (N)} \bar{X}_K^v (F_K/A_K)^v}{\sum_{K \in (N)} (F_K/A_K)^v} \quad (2.18)$$

v: 반복수

$x_n^{v+1}$ : v+1번째 절점의 새로운 위치

{N}:  $x_n$ 을 포함하는 요소들의 집합

$\bar{X}_K^v$ : v번째 반복된 경우, 요소 K의 기하학적 중심

$$F_K \equiv A_K^\beta |\hat{u}|^2_{k+1,K}, \quad \beta = k \quad (2차원의 경우)$$

(2) h법

큰 오차를 포함하고 있는 요소를 몇개의 요소로 세분하는 것으로 h법은 r법이나 p법과는 달리 초기분할을 거칠게 하여도 안정된 해를 얻기위해 계속 요소를 세분하기 때문에 이상적인 분할상태를 얻을 수 있다.

h법에서 유의점은 각 절점에서의 연속성이 만족되어야 한다. 즉 h법은 한 가지 형상함수를 사용하므로 Fig.1(a)에서 처럼 근처요소가 세분되지 않으면 5번 절점은 a요소에 공유되지 않는다. 따라서 5번 절점은 연속하지 않게 된다.

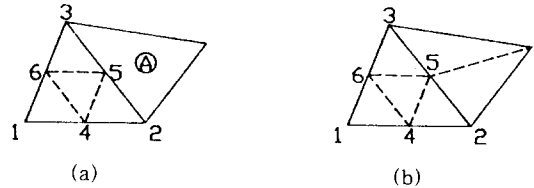


Fig 1. h-method for node continuity

세분화된 절점의 연속성을 만족하기 위해 다음과 같은 두가지 방법이 있다.

1). Fig.1(a)에서 세분화된 요소의 2-5-3의 모서리에서 5번 절점은 아래와 같은 제약조건을 갖는다.

$$u_5 = \frac{1}{2} (u_2 + u_3) \quad (2.19)$$

2). Fig.1(b)와 같이 5번 절점을 주변요소의 대각선 꼭지점과 연결시켜 세분한다. 이 방법은 삼각형 요소에 많이 사용된다.

본 논문은 이차원 사각형 요소를 사용하였으므로 첫번째 방법을 사용하였으며 이 때 (2.8)식과 (2.14)식에 의해 오차가 큰 요소는 4개의 요소로 분할한다. 또한, Fig.7에서와 같이 인접한 요소를 검토하여 분할 과정에서 한 번을 2개로만 분할하며<sup>(9)</sup> 사용되어진 형상함수는 아래와 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \zeta_i)(1 + \eta_i) \quad (2.20)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

3. 모델선정 및 해석과정

3.1 해석 예

본 논문의 rh법을 적용시키기 위해서 Fig.2와 같은 L형 모델을 선정하였다. 경계는 온도가 0°C로 고정되어 있으며 단위면적당 발열량은 일정하고 열전달계수는 k=1로 하였다.

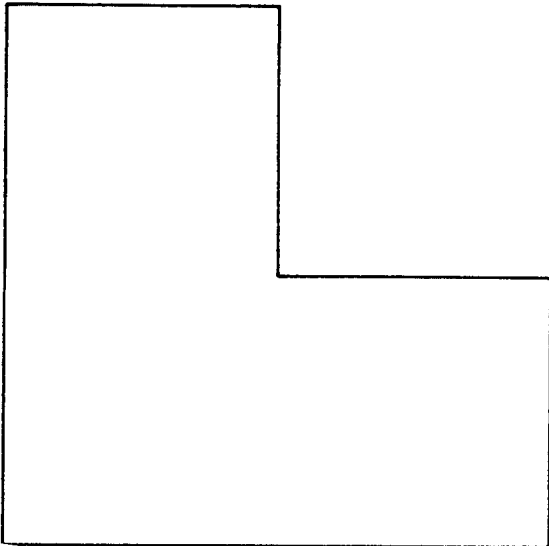


Fig 2. L-shape domain for analysis

지배 방정식은 다음과 같다.

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = \bar{Q} \quad \text{in } \Omega \quad (3.1)$$

(3.1)식의 경계조건은 경계에서

$$u = 0 \quad (3.2)$$

Galerkin 방법을 적용하면

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} u_j = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.3)$$

여기에서

$$K_{ij} = \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$Q_i = \int_{\Omega} \bar{Q} N_i dx dy$$

3.2 프로그램 구성

본 연구 시스템에 사용된 프로그램은 rh법의 특성을 연구하기 위해 FORTRAN으로 새로이 만들어졌으며 한번의 프로그램 수행 후 각 요소의 오차를 계산한 후에 r법에 의해 격자를 최적의 위치로 옮긴 후 오차가 큰 요소를 다시 h법에 의해 요소를 분할하여 오차를 감소시킨다. 프로그램은 Fig.3과 같이 구성되어 있으며 각 주프로그램과 부프로그램은 다음을 수행한다.<sup>(10)</sup>

-Subroutine AUTOXY

프로그램 수행시 최소의 입력 데이터로 영역을 자동으로 분할한다.

-Subroutine GAUSSQ

가우스 적분을 위하여 가우스점과 가중치(weight factor)를 결정한다.

-Subroutine PROCE

유한요소 방정식  $[K]\{T\}=\{Q\}$ 에서 강성행렬  $[K]$ 와 힘벡터(load vector)  $\{Q\}$ 를 합성한다.

-Subroutine GSOLU

가우스 소거법으로  $[K]\{T\}=\{Q\}$ 에서  $\{T\}$ 의 값을 구한다.

-Subroutine ERROR

각 요소의 오차값을 구한다.

-Subroutine HIEROR

최고 오차값의 요소의 수를 결정한다.

-Subroutine CENTRD

각요소의 기하학적 중심을 구한다.

-Subroutine RMETHD

절점을 최적의 위치로 변화시켜 오차를 줄인다.

-Subroutine HMETHD

오차가 큰 요소를 세분하여 오차를 줄인다.

- Subroutine HCONTI  
h법에서 절점의 연속성을 만족시켜 주도록 제약조건을 부여한다.
- Subroutine DWG  
그래픽을 화면에 출력한다.
- Subroutine SFR  
2차원 평면에서 형상함수와 형상함수의 미분값을 정의한다.
- Subroutine JACOB  
형상함수의 자코비안(Jacobian) 행렬과 카르테시안(Cartesian) 미분값을 구한다.
- Subroutine NEWCOR  
r법을 위한 새로운 좌표값을 구한다.
- Subroutine RHCOOR  
rh법에서 요소를 세분시켜 준다.

러가지 방법으로 계속되어지고 있다.<sup>(11,12)</sup> 또한, h법 수행 후에도 새로운 절점이 생기면 모든 절점의 번호를 새로이 작성하여 최종 강성행렬이 밴드(band)가 되도록 구성하였다.

(2) 요소의 최적설계를 위해 r법, h법, rh법을 임의로 선택할 수 있게 하였다.

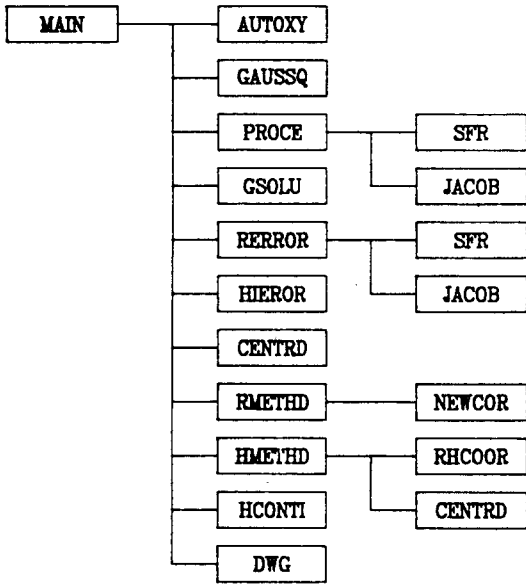


Fig 3. Program block-diagram

### 3.3 프로그램실행 및 특성

(1) 초기 영역에서의 분할은 입력을 다각형의 꼭지점을 가지고 자동분할되므로 입력을 최소화 하였다. 이 때 경계에서는 여러가지 형태의 요소가 나오며 이 경계요소를 최적화 하기 위한 연구(Automatic Mesh Generation)가 여

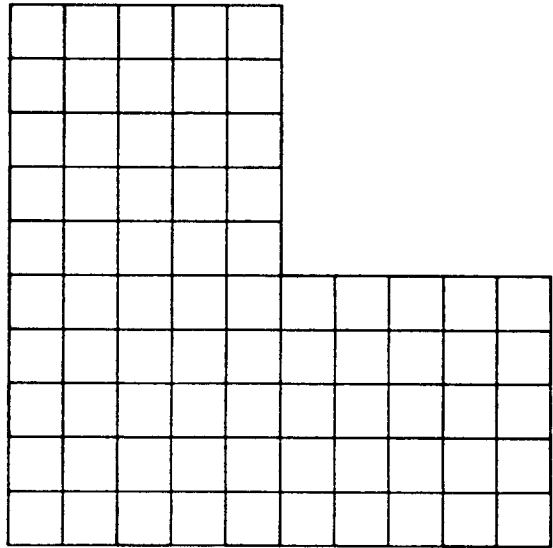


Fig 4. Square mesh for finite element solution

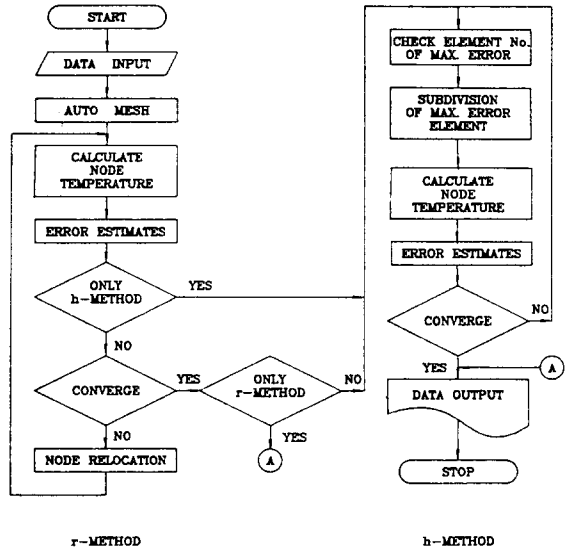


Fig 5. Flow chart for rh-method

(3) 오차해석은 (2.8)식에 의해 각 요소의 오차가 계산되어지며 r법은 (2.18)식에 의해 절점이 최적의 위치로 옮기고 h법은 (2.19)식에 의해 오차가 큰 요소를 다시 분할하여 (2.16)식이 만족되어질 때까지 반복수행한다.

(4) r법, h법, rh법에 따라 절점의 변화, 오차의 변화를 각종 소프트웨어를 통해 시각적으로 볼 수 있으므로 오차가 집중되는 곳을 쉽게 찾을 수 있으며, 요소의 면적 중심을 X, Y 좌표로, 오차를 Z축으로 하여 오차의 분포가 균일화되는 것을 확인할 수 있다.

4. 결과분석 및 고찰

4.1 자유도변화에 따른 오차변화

오차의 크기는 (2.8)식의 準正規化를 사용했으며 h법과 rh법에서 한번의 반복수행마다 오차가 큰 요소를 4, 6, 8개씩 선택하여 실행해 그 때 생기는 자유도에 따라 오차값을 상대비교 하였다.

Fig.6은 r법의 변화로서 오차가 큰 요소는 면적이 감소하여 오차값이 작아지고 상대적으로 오차가 작은 요소는 면적과 오차가 증가하여 전반적으로

오차의 값이 초기보다 균일하게 된다. 그러나 어느 정도 반복수행된 후에는 오차가 증가하게 된다. Fig.7, 8, 9는 h법의 변화로서 오차가 많은 요소가 집중적으로 세분되어 최고오차와 오차의 표준편차 값이 감소함을 알 수 있다. Fig.10, 11, 12는 rh법의 변화로서 r법을 시행한후 h법을 사용하므로 절점이 이동된 상태에서 오차가 많은 부분을 세분한다. h법과 마찬가지로 최고 오차와 오차의 표준편차값이 감소함을 알 수 있다.

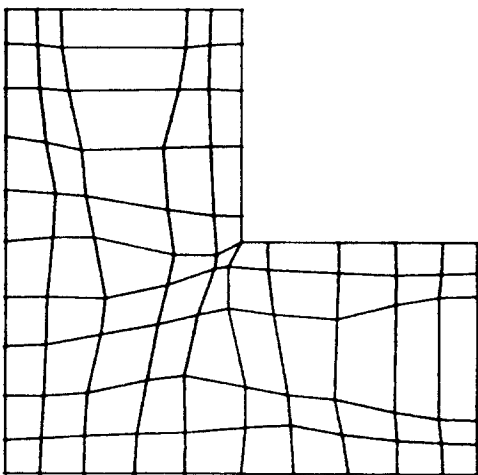
4.2 오차분포와 온도분포의 변화

Fig.13(b)의 r법후의 오차분포를 보면 모서리부분에 큰 오차가 남아있는 것을 알 수 있다.

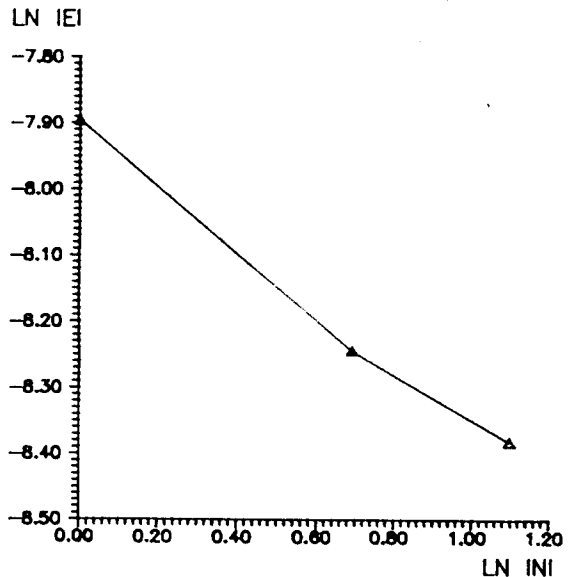
Fig.13(c), (d)는 각각 h법과 rh법 후의 오차분포를 나타낸 것으로 모든 영역에서 오차가 거의 균일하게 변화됨을 알 수 있다. Fig.14, 15, 16, 17는 영역에서의 온도분포로 h법과 rh법을 적용했을 때 오차가 많았던 모서리부분들이 더 세밀하게 요소가 변화되어 온도가 계산되었다.

4.3 h법과 rh법의 비교

오차의 감소속도는 같은 자유도에서 h법과 rh

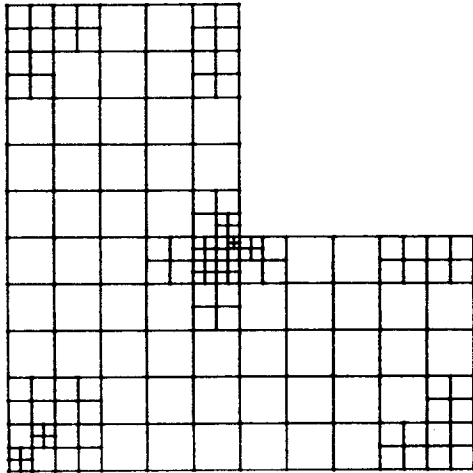


(a) N=3

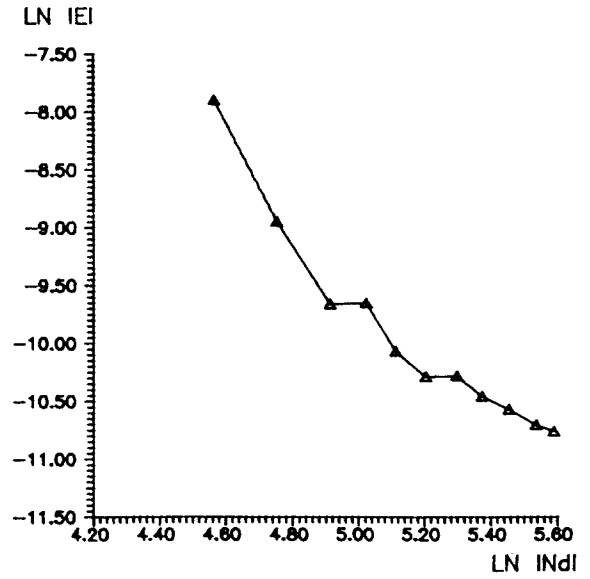


(b) Plot of the error and iterations (N : No. of iteration)

Fig 6. r-method

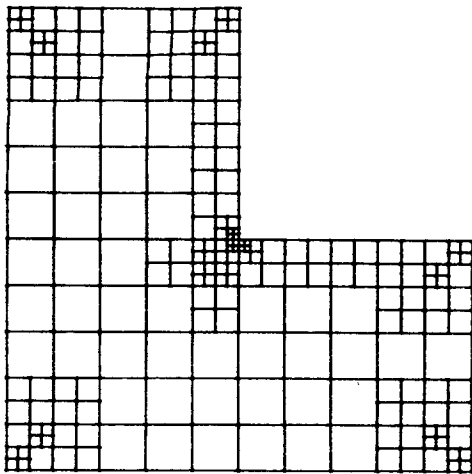


(a) Nd=216

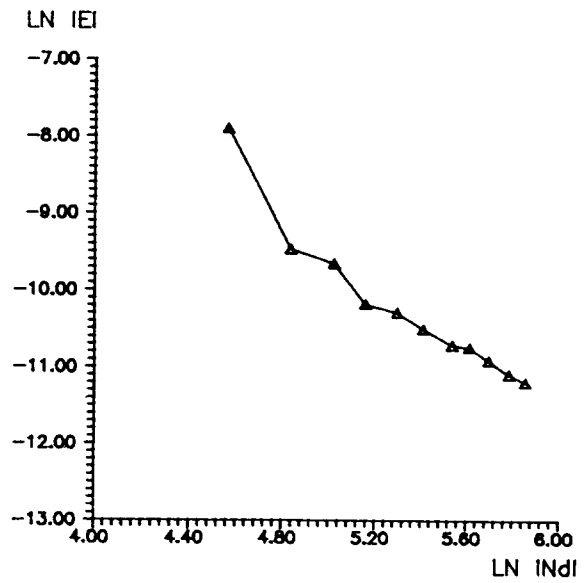


(b) Plot of the error and DOF  
(Nd : Degree of Freedom)

Fig 7. h-method(subdivision 4 element at a iteration)



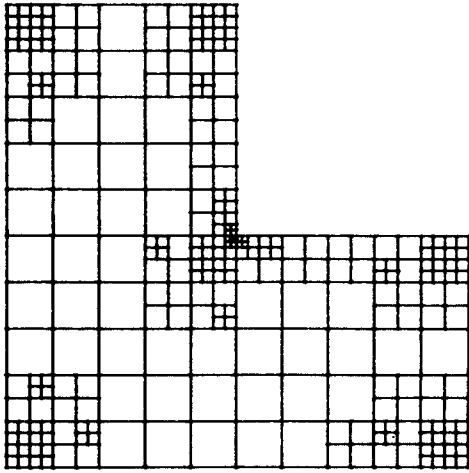
(a) Nd=298



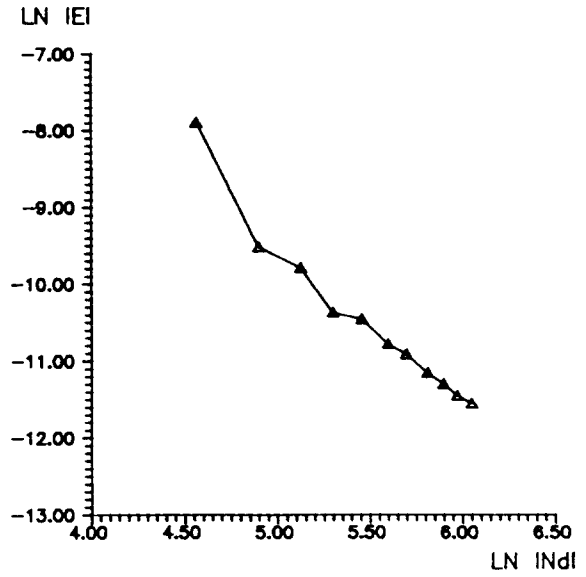
(b) Plot of the error and DOF  
(Nd : Degree of Freedom)

Fig 8. h-method(subdivision 6 element at a iteration)



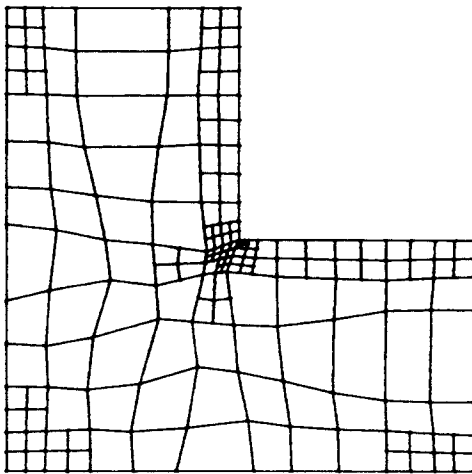


(a) Nd=392

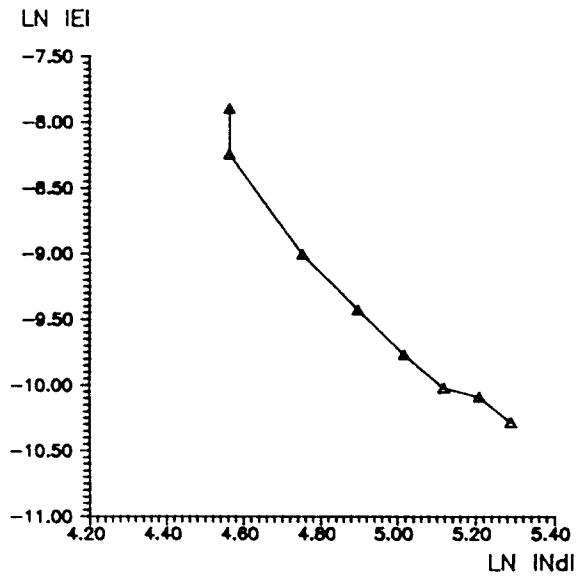


(b) Plot of the error and DOF  
(Nd : Degree of Freedom)

Fig 9. h-method(subdivision 8 element at a iteration)

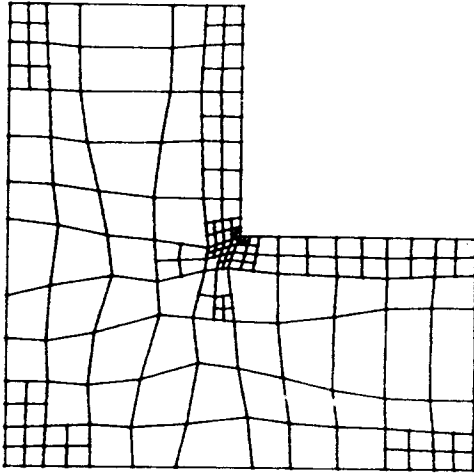


(a) Nd=198

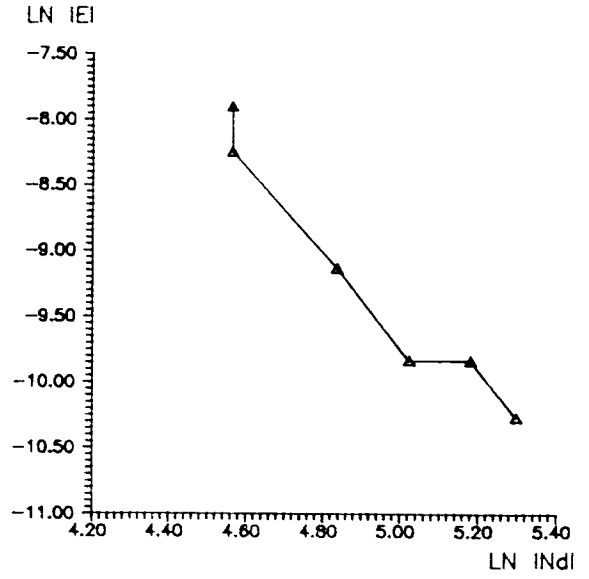


(b) Plot of the error and DOF  
(Nd : Degree of Freedom)

Fig 10. rh-method(subdivision 4 element at a iteration)

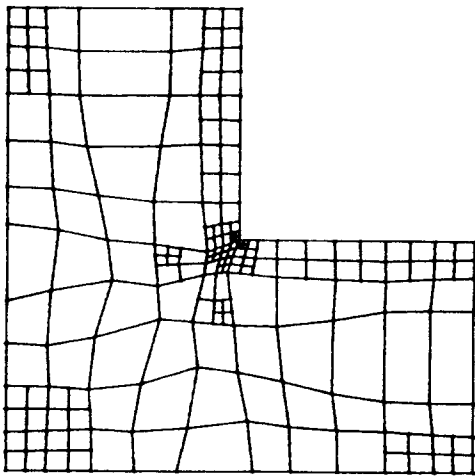


(a) Nd=222

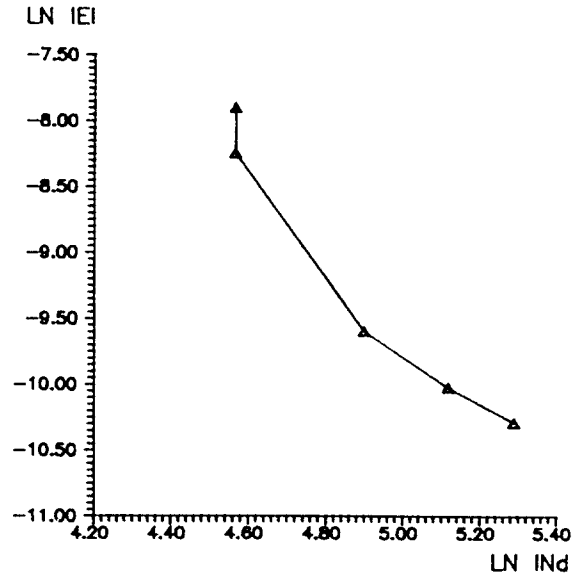


(b) Plot of the error and DOF  
(Nd : Degree of Freedom)

Fig 11. rh-method(subdivision 6 element at a iteration)



(a) Nd=230



(b) Plot of the error and DOF  
(Nd : Degree of Freedom)

Fig 12. rh-method(subdivision 8 element at a iteration)

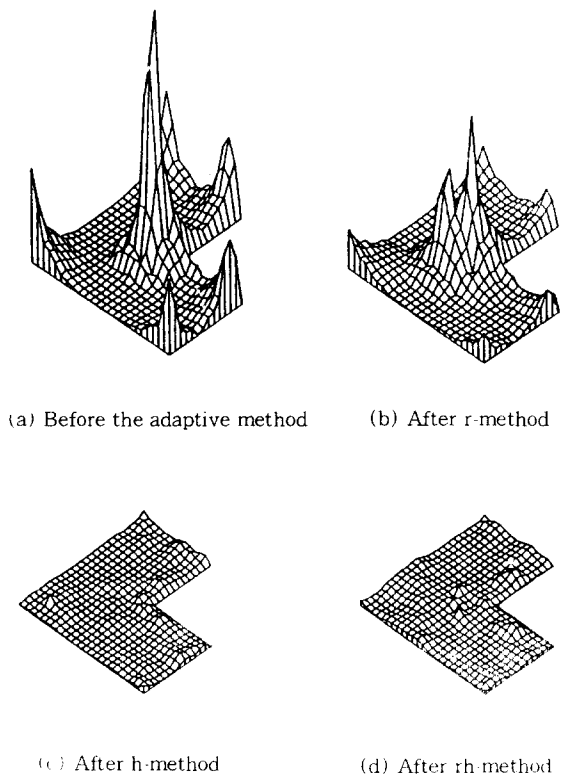


Fig 13. 3D plot of the error distribution

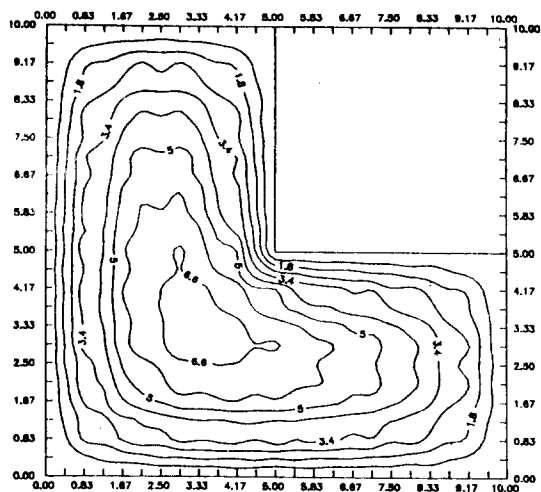


Fig 14. Initial temperature distribution

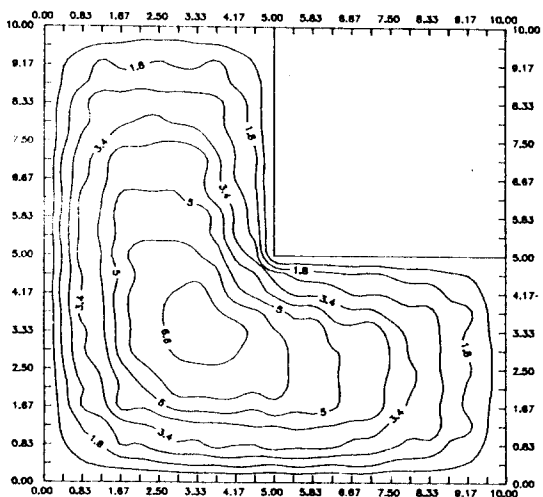


Fig 15. Temperature distribution of r-method

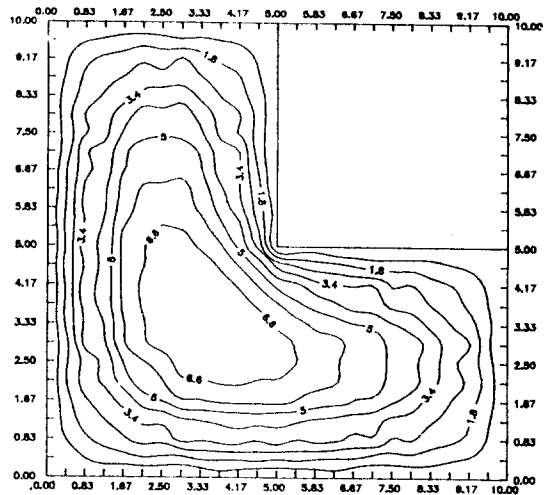


Fig 16. Temperature distribution of h-method

범이 거의 같게 나타났고 요소의 크기가 어느 한 계치 이상 작아지면 오차가 더 이상 감소하지 않게 된다.

따라서 rh법의 경우 r법을 먼저 시행했을 때 모서리부분의 요소가 작아진 상태에서 h법이 수행되므로, h법만 했을 때보다 적은 자유도에서 수렴하게 됨으로 선체 강성행렬의 크기가 작고 컴퓨터 메모리를 효율적으로 사용함으로 개인용 컴퓨터에서 실행시킬 수 있었다.

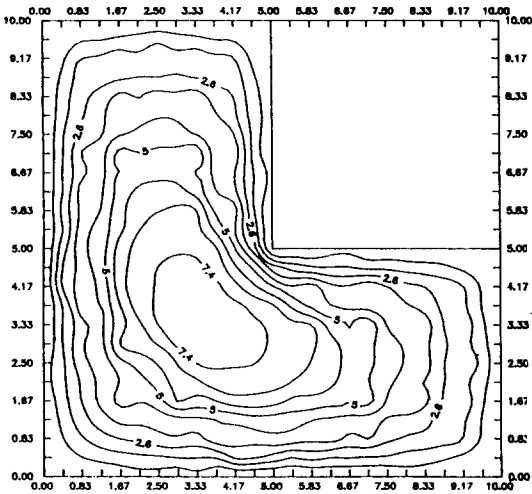


Fig 17. Temperature ditribution of rh-method

### 5. 결 론

본 논문은 유한요소해의 정확도를 높이기 위해 적응해석법중 r법과 h법을 혼합한 rh법을 적용하여 격자를 최적화하고 요소를 세분화하여 오차를 감소시켰다.

#### (1) 오차의 수렴률

r법에서는 표준편차를  $3.72 \times 10^{-4}$ 에서  $2.82 \times 10^{-4}$ 까지 감소시킬 수 있었다. h법의 경우는  $2.56 \times 10^{-5}$ 까지, rh법은  $3.42 \times 10^{-5}$ 까지 감소되어 h법과 rh법의 경우 거의 비슷한 오차감소율을 보였다.

#### (2) 오차의 수렴속도

같은 자유도에서 h법과 rh법의 오차의 수렴 속도가 거의 같고, h법과 rh법에서 한 번의 반복수행시 세분되는 요소의 수를 증가시킴으로써 일정한 범위까지 오차를 감소시키는데 까지 반복횟수를 줄임으로써 컴퓨터 실행시간을 줄일 수 있었다.

#### (3) 자유도 증가억제

rh법이 적은 자유도에서 h법 보다 먼저 수렴을 하며, 전체적인 자유도를 최대한 억제한 상태에서 오차를 감소 시켰다. 따라서 본 논문은 요소면적당의 오차를 균일화하여 절점을 최적의 위치로 변화시킨 상태에서 오차가 큰 요소를 같은 모양의

요소로 세분 시키는 rh법을 사용하여 보다 정확한 유한요소 해를 얻을 수 있었다.

rh법은 오차의 수렴에 있어서는 h법과 비슷한 결과를 보였으나 동일한 오차의 한계에서 자유도의 크기는 매우 작아 일정 컴퓨터 메모리 한계에서 보다 많은 요소를 분할할 수 있고 개인용 컴퓨터에서도 後誤差를 크게 감소시킬 수 있었다.

### 참 고 문 헌

- [ 1 ] Noboru Kikuchi, Finite Element Methods in Mechanics, Cambridge University Press, pp.81-90, 1986.
- [ 2 ] 김동일, "유한요소 해석에서의 적응요소법에 관한 연구", 인하대 석사학위 논문, 1989.
- [ 3 ] O.C.Zienkiewicz, J.Z.Zhu, N.G.Gong, "Effective and practical h-p version adaptive analysis procedure for the finite element method", Int.J.Num.Mech.Eng., Vol.28, pp.879-891, 1989.
- [ 4 ] B.szabo, I.Babuska, Finite element analysis, John Wiley & Sons, Inc., pp.64-69, 1991.
- [ 5 ] D.W.Kelly, J.P.de S.R.Gago, O.C.Zienkiewicz, "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : part I-error analysis", Int.J.Num.Meth.Eng., Vol.19, pp.1593-1619, 1983.
- [ 6 ] J.P.de S.R.Gago, D.W.Kelly, O.C.Zienkiewicz, "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : part II-adaptive mesh refinement", Int.J.Num.Meth.Eng., Vol.19, pp.1621-1656, 1983.
- [ 7 ] I.Babuska, M.R.Dorr, "Error estimates for the combined h and p version of the finite element method", Numer. Math., Vol.37, pp.257-277, 1981.
- [ 8 ] A.R.Diaz, Noboru Kikuchi, J.E.Taylor, "A methods of grid optimization for finite element methods", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.41, pp.29-45, 1983.
- [ 9 ] L.Demkowicz, Ph.Devloo, J.T.Oden, "On an h-type mesh-refinement strategy based on

- minimization of interpolation errors”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.53, pp.67-89, 1985.
- [10] D.R.J.Owen, E.Hinton, Finite Element Programming, Academic Press, 1977.
- [11] 유형선, 김동일, “그래픽 에디터를 이용한 자동 요소분할에 관한 연구”, 한국 자동제어 학술회의 논문집, 1991.
- [12] 유형선, 조명철, “2차원 자동 요소분할 프로그램 개발에 관한 연구”, 한국정밀공학회지, 제9권 제2호, pp.44-51, 1992.
- (접수일자 : 1992. 4. 14)