

## Ritz 벡터를 이용한 변단면 보의 비선형 강제진동해석

Analysis of Nonlinear Forced Vibrations by  
Ritz Vectors for a Stepped Beam

심 재 수\*

Shim, Jae-Soo

박 명 균\*\*

Park, Mounng-Gyun

## Abstract

A Stepped beam with immovable ends under forced vibrations with large amplitude is investigated by using the finite element method and the Ritz vectors. Unlike the Eigen vectors, the Ritz vectors are generated by a simple recurrence relation. Moreover the Ritz vectors yield much faster convergence with respect to the number of vectors used than the use of Eigen vectors. The computer program is developed for nonlinear analysis using Ritz vectors instead of Eigen vectors and numerical examples are analysed for deflections and natural frequencies of stepped beam under various support conditions. Results show that the proposed method is valid and efficient.

## 1. 서 론

공학적으로 주기적 조화하중을 받는 경량유연 구조물의 진동은 심각한 휨진동을 일으키기 쉽다. 이러한 경우 선형해석 결과는 부정확하므로 비선형 진동해석이 필요하다. 본 논문에서는 유한변형에 기인하는 변위와 변형도 관계가 비선형인 기하학적인 비선형 해석에 대해 종래의 동적해석에서 보편적으로 사용하고 있는 Eigen벡터 대신 Ritz 벡터를 사용하여 양단 고정 및 힌지인 균열단면 및 변단면 보의 강제진동 해석을 수행하였다.

조화하중을 받는 보의 기하학적 비선형 해석으로 Yamaki와 Mori<sup>1)</sup>는 초기변형과 초기축방향 변

위의 영향을 고려하여 등분포 조화하중을 받는 양 단지인 보에서 비선형 강제 진동을 연구하여 해석적 해와 실험 결과를 비교하였고 Ray와 Bert<sup>2)</sup>는 비선형 진동해에 유한요소법을 사용하였다. Rao<sup>3)</sup>등은 비선형 변위 변형도 관계를 선형화하였고 Mei와 Umphai<sup>4, 5)</sup>는 비선형 강제 진동을 받는 보와 평판을 해석하기 위하여 유한요소법을 이용한 조화하중행렬을 발전시켰다. 또한 Xue<sup>6)</sup>는 조화하중행렬을 개선하였고 심<sup>7)</sup>은 변단면에 대해 비선형 해석을 할 수 있도록 하였다. 그러나 이러한 연구들은 Eigen 벡터들을 사용하므로 동적하중의 공간분포특성이 고려되지 않기 때문에 본 논

\* 정회원, 경희대학교 공과대학 토목공학과 교수

\*\* 현대 engineering 구조부

이 논문에 대한 토론을 1993년 9월30일까지 본학회에 보내주시면 1994년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

문에서는 Wilson<sup>8)</sup>이 제안한 Ritz 벡터, 김<sup>9)</sup>이 직교화시킨 Ritz 벡터를 이용하여 경제적으로 기하학적 비선형해석을 하는 것이 본 연구의 목적이다.

### 2. Ritz 벡터

Ritz 벡터를 구하는 알고리즘은 하중이 공간벡터와 시간의 적으로 나타낼 수 있다는 가정과 정적해석에서 구한 변위 벡터를 첫 Ritz벡터로 택하므로써 다음벡터들은 첫 Ritz벡터와 시스템의 특성치인 강성행렬과 질량행렬로부터 반복계산하여 보다 정확하고 경제적으로 동적해석을 할 수 있도록 계산되어 지는데 있다. Ritz벡터는 특히 비감쇄시스템에서 많이 사용되며 알고리즘은 아래와 같이 순환관계로부터 생성된다.<sup>9, 10)</sup>

$$[k] \{u\} = \{f\} \tag{1}$$

$$[k] \{y_1^*\} = [M] \{u\} \tag{2}$$

여기서 식(1) 정적해석이며 위의 방정식에서 구한 Ritz벡터는 다음단계에서 정규화 되어진다.

$$\{y_1\} = \{y_1^*\} / \|\{y_1^*\}\|_M \tag{3}$$

식(3)에서 초기벡터가 만들어지고, 다음과정의 단계에 의해 나머지 Ritz벡터가 만들어진다.

$$\{u_i\} = \{u_{i-1}\} - \{y_{i-1}\} \{y_{i-1}\}^T [M] \{u_{i-1}\} \quad i=2, \dots, m \tag{4}$$

$$[K] \{y_i^*\} = [M] \{u_i\} \tag{5}$$

$$c_j = \{y_j\}^T [M] \{y_i^{*(j)}\} \quad j=1, \dots, i-1 \tag{6}$$

$$\{y_i^{*(j+1)}\} = \{y_i^{*(j)}\} - c_j \{y_j\} \tag{7}$$

$$\{y_i\} = \{y_i^{*(i)}\} / \|\{y_i^{*(i)}\}\|_M \tag{8}$$

위 방정식에서 Ritz벡터는 Eigen벡터와 달리 간단한 순환관계(Recurrence Relation)에 의해 생성되며 생성시간도 적게 걸림을 표 5.에서 알 수 있다. 본 논문에서는 Ritz벡터로부터 고유치를 계산하여 해석적인해와 비교하였으며 다음과 같다.<sup>11)</sup>

$$\{y\}^T [k] \{y\} = \{\Lambda\} \tag{9}$$

$$\{y\}^T [M] \{y\} = \{I\} \tag{10}$$

여기서  $[\Lambda]$ 는 고유치행렬이고  $[I]$ 는 단위행렬이 된다.

### 3. 비선형 강제진동의 해석

#### 3-1. 비선형 강제 진동의 해석적인 해

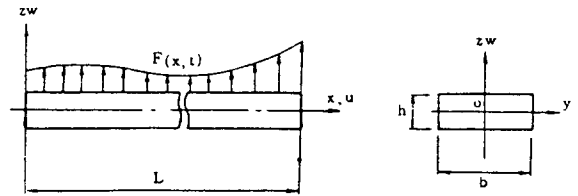


그림 1. 직사각형 횡단면보

그림 1과 같은 구형보에서 보의 높이 h와 폭 b의 값이 길이 L에 비하여 매우 작을 경우 비선형 강제진동의 지배 미분 방정식은 다음과 같다.<sup>12)</sup>

$$(EI w_{,xx}),_{xx} - N(t) w_{,xx} + m \ddot{w} = F(x, t) \tag{11}$$

여기서,

$$N(t) = \int_0^L \frac{1}{2} w, x^2 dx / \int_0^L \frac{1}{EA} dx$$

수직 변위  $w(x, t)$ 는  $\phi(x) Y(t)$ 로 치환되고  $\phi(x)$ 는 경계조건을 만족하는 진동현상 함수이다.

작용하는 하중을  $F_0 Y(t) / A_{mp}$ 로 나타내면  $F_0$ 는 하중계수, 모드진폭  $Y(t)$ 는 시간의 함수이며,  $A_{mp}$ 는  $Y(t)$ 의 최대진폭이다. 식 (11)은 다음과 같다.

$$m \phi \ddot{Y}(t) + (EI \phi_{,xx}),_{xx} Y(t) - N(t) \phi_{,xx} Y(t)^3 - F_0 Y(t) / A_{mp} = 0 \tag{12}$$

여기서,

$$N(t) = \frac{\int_0^L ((\phi, x)^2 dx)}{2 \int_0^L \frac{dx}{EA}}$$

Galerkin 방법을 사용하여 양변에  $\phi(x)$ 를 곱하고 보의 길이에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\int_0^L m \phi^2 \ddot{Y}(t) dx + \int_0^L (EI \phi_{,xx})_{,xx} \phi Y(t) dx - \int_0^L N(t) \phi_{,xx} \phi Y^3(t) dx - \int_0^L F_0 Y(t) / A_{mp} \phi dx = 0 \quad (13)$$

여기서

$$A_1 = \int_0^L m \phi^2 dx, \quad A_2 = \int_0^L (EI \phi_{,xx})_{,xx} \phi dx, \\ A_3 = - \int_0^L N(t) \phi_{,xx} \phi dx, \quad A_4 = \int_0^L \phi dx$$

라 정의하면 식(13)은 다음과 같다.

$$A_1 \ddot{Y}(t) + A_2 Y(t) + A_3 Y^3(t) - A^4 \frac{F_0}{A_{mp}} \ddot{Y}(t) = 0 \quad (14)$$

위식은 Duffing 방정식이고  $Y(t)$ 는 근사적으로  $A_{mp} \cos(\omega t)$ 이므로 비선형 항과 하중항은 각각 다음과 같다.

$$Y^3(t) \approx \frac{3}{4} A_{mp}^3 \cos(\omega t) \quad (15)$$

$$F_0 Y(t) / A_{mp} = F_0 \cos(\omega t) \quad (16)$$

식(15)와 (16)을 (14)에 대입하면 다음과 같다.

$$A_1 \omega^2 - A_2 - \frac{3}{4} A_3 A_{mp}^2 + A_4 F_0 / A_{mp} = 0 \quad (17)$$

여기서  $A_3$ 은 비선형 강성계수이고  $A_4$ 는 하중계수이므로 선형자유 진동의 경우에는  $A_3 = A_4 = 0$ 이므로 선형 고유 진동수  $\omega_L$ 은 고유벡터의 함수인  $A_1, A_2$ 에 의하여 계산된다.

식 (17)에서  $\omega L^2$ 로 양변을 나누어 정리하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} \frac{A_3}{A_1} \frac{A_{mp}^2}{\omega L^2} \frac{A_4}{A_1} \frac{F_0}{A_{mp} \omega L^2} \quad (18)$$

앞의  $A_1, A_2, A_3, A_4$  값은 유한요소법을 이용하여 구한 형상 함수  $\phi(x)$ 를 수치적분하여 구할 수 있다.

균일 단면 보와 변단면 보의  $\omega/\omega_L$ 비는 식(14)의 해석적 해와 식(18)의 perturbation해는 표 1

| B              | 횡단면   | 해석적 방법<br>(eq. 14)   | Perturbation<br>(eq. 18) | F.E.M(Ref.10)<br>(Eigen Vector) | F.E.M(본논문)<br>(Ritz Vector) |
|----------------|-------|----------------------|--------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| B <sub>0</sub> | 균일단면  | A 1.3770<br>C 1.3512 | 1.3670<br>1.3720         | 1.332<br>1.310                  | 1.335<br>1.351              |
| B <sub>0</sub> | 변 단 면 | A 1.324<br>C 1.3135  | 1.3405<br>1.3294         | 1.2673<br>1.261                 | 1.2949<br>1.2308            |

A: 비선형 강제진동해석에서의 첫번째 비선형치와 선형치와의 비

B: 비선형 강제진동해석에서의 마지막 비선형치와 선형치와의 비

$$B_{i,0} = \frac{\int_{l_{i-1}}^l \phi_i dx}{\int_{l_{i-1}}^l \phi_i^2 dx \cdot \text{Amp}}$$

표 2. 등분포 하중을 받는 한지점보의 강제진동 각속도비  $\omega/\omega_L$   
( $F_0 = 1321.64 \text{ lb/in}$ )

| B              | 횡단면   | 해석적 방법<br>(eq. 13)   | Perturbation<br>(eq. 17) | F.E.M(Ref.10)<br>(Eigen Vector) | F.E.M(본논문)<br>(Ritz Vector) |
|----------------|-------|----------------------|--------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| B <sub>0</sub> | 균일단면  | A 2.266<br>B 2.2131  | 2.235<br>2.256           | 2.034<br>2.030                  | 2.042<br>2.0475             |
| B <sub>0</sub> | 변 단 면 | A 2.2137<br>B 2.0457 | 2.1570<br>2.1006         | 1.864<br>1.822                  | 1.9145<br>1.914             |

A: 비선형 강제진동해석에서의 첫번째 비선형치와 선형치와의 비

B: 비선형 강제진동해석에서의 마지막 비선형치와 선형치와의 비

$$B_{i,0} = \frac{\int_{l_{i-1}}^l \phi_i dx}{\int_{l_{i-1}}^l \phi_i^2 dx \cdot \text{Amp}}$$

과 2에 있다.

### 3-2 비선형 강제 진동의 근사적 해

그림 2와 같은 보 요소에서 비선형 변위 변형도 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_{xx} = u_{,x} - Z w_{b,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad (19)$$

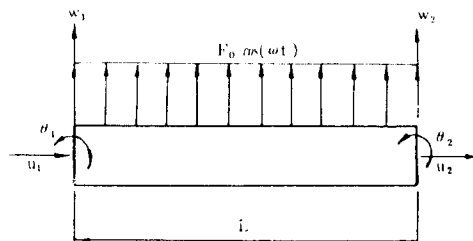


그림 2. 보요소

여기서  $w_{,x}$ 는 유한변형을 고려한 비선형항이고, 요소의 선형화 함수  $f$ 를 도입하면 다음과 같이 정의된다.<sup>7)</sup>

$$f=f(x)=\frac{1}{2} w_{,x} \quad (20)$$

식(20)의 선형화함수를 사용하면 식(19)는 다음과 같다.

$$\epsilon_{xx}=u_{,x}-Zw_{b,xx}+fw_{,x} \quad (21)$$

변위 함수와 일반화 좌표계는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$w=a_2+a_3x+a_5x^2+a_6x^3 \quad (22)$$

$$u=a_1+a_4x$$

$$\{a\}=[T]\{\delta\}$$

여기서  $T$ 는 변환행렬이다.

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & -3/L^2 & -2/L & 0 & 3/L^2 & -1/L \\ 0 & 2/L^3 & 1/L^2 & 0 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

부재의 임의의  $x$ 에서의 변위  $u$ ,  $w$ 와 이들의 미분을 요소의 절점 변위로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= [1 \ 0 \ 0 \ x \ 0 \ 0] \{a\} [T] \\ u_{,x} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \{a\} [T] \\ w &= [0 \ 1 \ x \ 0 \ x^2 \ x^3] \{a\} [T] \\ w_{,x} &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2x \ 3x^2] \{a\} [T] \\ w_{,xx} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 6x] \{a\} [T] \end{aligned} \quad (24)$$

위의 식(24)을 이용하여 요소의 운동에너지를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{2} m \int_0^L u_{,x}^2 dx + \frac{1}{2} m \int_0^L w_{,x}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [m_w] \{\delta\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{\delta\}^T [m_u] \{\delta\} \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [m] \{\delta\} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서  $[m_w]$ ,  $[m_u]$ ,  $[m]$ 은 각각 수직변위  $w$ 에 의한 요소 질량행렬, 축방향 변위  $u$ 에 의한 요소 질량행렬, 요소 질량행렬이다. 또한 식(24)을 이용하여 선형 변형에너지를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{2} \int_0^L EI w_{b,xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA u_{,x}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{Lw}^e] \{\delta\} + \\ &\frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{Lu}^e] \{\delta\} \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_L^e] \{\delta\} \end{aligned} \quad (26)$$

여기서  $[k_{Lw}^e]$ ,  $[k_{Lu}^e]$ ,  $[k_L^e]$ 는 각각 수직변위  $w$ 에 의한 강성행렬, 축방향 변위  $u$ 에 의한 강성행렬, 선형 강성행렬이며 비선형에 관계되는 변형에너지로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_{NL} &= \int_0^L EA f u_{,x} w_{,x} dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA f^2 w_{,x}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{NL}^e] \{\delta\} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서  $[k_{NL}^e]$ 는 요소의 비선형 강성행렬

3-3 변단면 보의 조화하중 행렬  
강재 진동의 지배 방정식은 식(13)인데 균일단면보라면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m\ddot{Y}(t) + \left[ \int_0^L (EI\phi_{,xx}), xxY(t)\phi dx - \int_0^L N(t)\phi_{,xx}\phi Y^3(t) dx - \int_0^L F_0 Y(t) / A_{mp}\phi dx \right] \\ / \int_0^L \phi^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$F_0 \int_0^L \phi dx$ 를  $A_{mp} \int_0^L \phi^2 dx$ 로 나눈것을  $B^0$ 이라하면,  $B^0 Y(t)$ 는 선형 스프링력으로 볼 수 있고  $B^0$ 는 작

용하중  $F(x, t)$ 와 형상함수  $\phi$ 의 함수이며 전 보의 길이에 대하여 일정한 스프링상수와 같다.

여기서  $i$ 번째 요소에 조화하중이 작용한다면 그 요소의 포텐셜에너지는

$$V_i^e = \frac{1}{2} B_i^o \int_{L_{i-1}}^{L_i} O w^2 dx \quad (29)$$

$$= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [h] \{\delta\}$$

여기서  $[h]$ 는 요소의 조화하중 행렬이고  $B_i^o$ 는 요소  $i$ 에서는 일정하며 다음과 같다.

$$B_i^o = \int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi dx F_{oi} / \int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i^2 dx A_{mp} \quad (30)$$

식(2)와 식(25), (26), (27), (29)을 결합하여 비선형 강제진동에 대한 Ritz 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

$$([K_L] + [K_{NL}] - [H]) \{Y\} = [M] \{u\} \quad (31)$$

여기서  $[K_L]$ ,  $[K_{NL}]$ ,  $[H]$ ,  $[M]$ 는 각각 선형 강성행렬, 비선형 강성행렬, 조화하중행렬, 질량행렬이고  $\{u\}$ ,  $\{Y\}$ 는 각각 정적해석에서 구한 변위 및 Ritz벡터이다.

2-4 계산 과정

해를 구하는 과정은 미소변형에 의한 선형 해와 유한변형에 의한 비선형 해의 두 부분으로 구성된다.

(1) 미소 변형의 자유 진동 선형 해

선형해의 해석은 선형해를 구하는 과정으로 계산된 선형 Ritz벡터는 비선형해의 초기값이 된다.

$$[K_L] \{Y\} = [M] \{u\} \quad (32)$$

(2) 비선형 해

비선형해를 구하는 방법으로 반복법이 사용되는데 비선형 강성행렬  $[K_{NL}]$ 과 조화하중행렬  $[H]$ 은 Ritz 벡터  $\{Y_{i-1}\}$ 에 의하여 형성되고 이때의  $\{Y_{i-1}\}$ 은 이전 단계의 반복 시행시 구한 Ritz 벡터

로 주어진 최대 진폭에 의하여 정규화된다.

$$([K_L] + [K_{NL}] - [H]) \{Y\} = [M] \{u\} \quad (33)$$

비선형 강제 진동 문제를 해석하기 위한 흐름도는 그림 3과 같으며 수렴조건은 진동수 노름을 사용하였으며 다음과 같다.

$$e = \left| \frac{\Delta \omega_i}{\omega_i} \right| < \text{Tol} (10^{-8}) \quad (34)$$

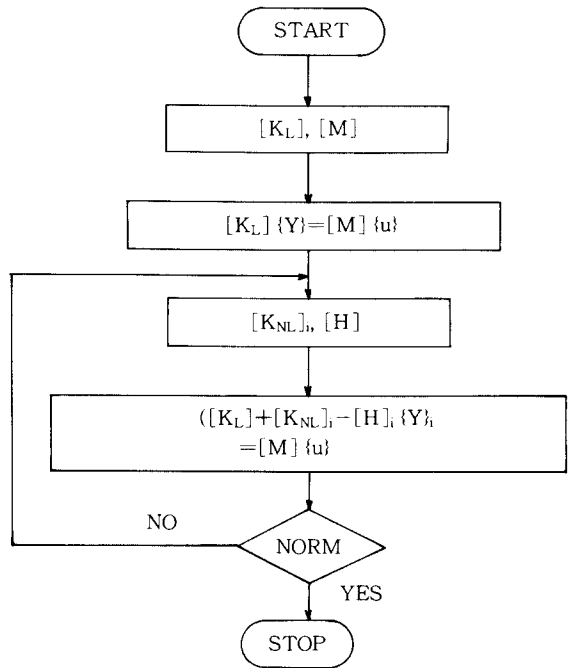


그림 3. 흐름도

2-5 예제

그림 4와 같은 균일단면보와 변단면보의 경우를 해석하였다.

두께  $H=8.313in$ (stepped 보 :  $H_1=1.2H$ )

폭  $b=3H=24.939in$

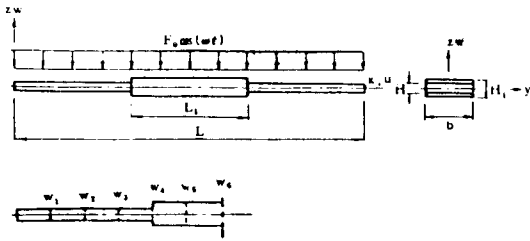


그림 4. 변단면보

길이  $L=240\text{in}$  (stepped 보 :  $L_1=1/3L$ )  
 질량  $m=0.002587 \text{ lb/in}^3$   
 포아송비  $\nu=0.3$

앞서 가정한 두  $B_1^\circ$ 에 의한 양단 고정과 양단힌

표 3. 강제진동해석에서의 각속도

| 보 형태 | 강제진동 해석결과 |            |            |          |
|------|-----------|------------|------------|----------|
|      |           | $\omega_L$ | $\omega_1$ | $\omega$ |
|      | REF.10    | 183.232    | 243.011    | 243.876  |
|      | 본논문       | 183.192    | 244.650    | 244.584  |
|      | REF.10    | 190.029    | 244.618    | 244.404  |
|      | 본논문       | 190.009    | 246.047    | 245.832  |
|      | REF.10    | 80.828     | 164.196    | 164.078  |
|      | 본논문       | 80.811     | 165.518    | 165.461  |
|      | REF.10    | 88.658     | 169.018    | 167.762  |
|      | 본논문       | 88.648     | 169.719    | 168.550  |

$\omega_L$  : 선형 각속도(rad/s)

$\omega_1$  : 비선형의 첫번째 각속도(rad/s)

$\omega$  : 비선형의 마지막 각속도(rad/s)

$F_0=3276.12 \text{ lb/in}$ (양단 고정보)

$1321.64 \text{ lb/in}$ (양단 힌지보)

지의 경우의 해석결과는 각각 표1과 2에 있다. 보의 양단과 단면의 변화에 따른 강제진동의 고유진동수들은 표3에 있고, 진동 모우드는 표 4에 있다.

### 3. 결 론

본 연구는 Ritz벡터를 이용하여 변단면 보 구조의 유한변형에 의한 기하학적 비선형 강제 진동문제를 해석하였다.

그 과정은 비선형 변위-변형도 관계식을 선형화하고 선형 진동을 해석한 결과인 Ritz벡터를 조화하중행렬의 계산과 비선형해석에서의 초기벡터로 하여 계산하였다.

계산된 Ritz벡터는 조화하중행렬을 수정하고 반복계산하여 Norm이 수렴된 후 비선형진동의 고유치 및 고유벡터를 구하였다. Ritz벡터의 계산 과정에서 계산된 값과 정확한(Exact)해와의 비교를 위해 Ritz벡터로 부터 고유치를 계산하여 진동수비를 비교하였다.

본 해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Ritz벡터 알고리즘으로 강제진동해석을 위한 비선형 유한요소 프로그램을 개발하였다.
2. 수정된 조화하중의 도입으로 변단면 및 임의의 영역에 하중이 작용하는 보의 해석이 가능하였다.
3. Eigen벡터를 이용한 해석보다 Ritz벡터를 사용할 경우 반복계산횟수가 적어지고, 계산시간이 절약되므로(표5) 경제적인 비선형 동적해석이 가능하다.

표 4. 비선형 강제진동의 벡터값

| 보 형태                 | 벡터 형태       | $w_1$   | $w_2$   | $w_3$   | $w_4$    | $w_5$     | $w_6$ |
|----------------------|-------------|---------|---------|---------|----------|-----------|-------|
| Uniform Clamped Beam | 본논문(Ritz)   | 1.15734 | 3.76349 | 6.79184 | 9.49798  | 11.34543  | 12.   |
|                      | Ref.(Eigen) | 1.15081 | 3.74737 | 6.77310 | 9.48472  | 11.34135  | 12.   |
| Stepped Clamped Beam | 본논문(Ritz)   | 1.26738 | 4.06991 | 7.21732 | 9.80825  | 11.426668 | 12.   |
|                      | Ref.(Eigen) | 1.26154 | 4.05580 | 7.20113 | 9.79771  | 11.42347  | 12.   |
| Uniform Clamped Beam | 본논문(Ritz)   | 3.10126 | 5.99292 | 8.47108 | 10.38350 | 11.58846  | 12.   |
|                      | Ref.(Eigen) | 3.09636 | 5.98514 | 8.47108 | 10.38350 | 11.58846  | 12.   |
| Stepped hinged Beam  | 본논문(Ritz)   | 3.27856 | 6.30546 | 8.83306 | 10.61845 | 11.64573  | 12.   |
|                      | Ref.(Eigen) | 3.27285 | 6.29627 | 8.82453 | 10.61343 | 11.64427  | 12.   |

표 5. C.P.U. 계산시간 및 계산 반복횟수

| 보 형태 | C.P.U 계산시간 |         | 반복횟수(Iteration Number) |
|------|------------|---------|------------------------|
|      | REF.10     | 49(sec) | 20                     |
|      | 본논문        | 9(sec)  | 11                     |
|      | REF.10     | 36(sec) | 11                     |
|      | 본논문        | 9(sec)  | 10                     |
|      | REF.10     | 30(sec) | 15                     |
|      | 본논문        | 11(sec) | 13                     |
|      | REF.10     | 33(sec) | 17                     |
|      | 본논문        | 11(sec) | 16                     |

4. 비선형진동의 각속도와 선형진동의 각속도비는 해석적인 방법에 의한 비와 대체로 부합된다.

5. 비선형 Eigen벡터의 비선형 Ritz벡터값은 대체로 부합된다.

참 고 문 헌

1. Yamaki, N. and Mori, A., "Nonlinear Vibrations of a Clamped Beam with Initial Deflection and Initial Axial Displacement. Part 1 : Theory", Journal of Sound and Vibration Vol.71, 1980, pp.333-346.
2. Ray, J.D. and Bert, C.W., "Nonlinear Vibration of a Beam with Pinned Ends", Journal of Engineering for Industry, Vol.91, November 1969, pp.997-1004.
3. Roo, G.V., Raju, K.K. and Raju I.S., "Finite Element Formulation for the large Amplitude Free Vibration of Beam and Orthotropic Circular Plate", Journal of Computers and Structures, Vol. 6, 1976, pp.169-172.

4. Mei, C., "Finite Element Displacement Method for Large Amplitude Free Flexural Vibration of Beams and Plates", Journal of Computers and Structures, Vol.3, 1973, pp. 163-174.
5. Mei,C. and Decha Umphai, K., "A Finite element Method for Nonlinear Forced Vibrations of Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol.102, 1985, pp.369-380.
6. Xue, Y.X., "Analysis and Design Sensitivity Computation of Nonlinear Free and Forced Vibration of Stepped Beam.", Old Dominion University, 1987, pp.12-35.
7. 심재수, 함원식 "양단고정된 변단면보의 자유 및 강제진동의 비선형해석", 한국전산구조공학회 논문집 제3권 제2호, 1990년 6월.
8. Wilson, E.L., Yuan, M.W., and Dickens, J. M., "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors.", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.10, 1982, 241-252.
9. 김춘호 "Dynamic Analysis of Structures by Updated Ritz Vectors.", 경희대학교, 1990, 12, pp.8-10.
10. Wilson, E.L., Joo, K.J. "Generation of Ritz Vectors for Adaptive Finite Element Dynamic Analysis.", Critical Engineering System, 1987, May, pp.265-277.
11. Humar, J.L., "Dynamics of Structures", Prentice-Hall., 1990.
12. 심재수, 함원식 "보의 자유 및 강제 진동의 비선형 해석" 경희대학교 재료과학 기술연구소 연구논문 제2집, 1989.

(접수일자 : 1992. 10. 27)