

# 감도 최소화 기법을 이용한 다변수 플랜트의 강인한 제어기 설계

(Robust Controller Design of Multivariable Plant using Sensitivity Minimization)

李元圭\* · 金榮達\*

(Won-Kyu Lee · Young-Dal Kim)

## 요 약

본 논문에서는 플랜트 모델에 불확실성이 존재하는 경우에도 강인 안정도를 보장하는 제어기 설계 문제를 연구하였다. 먼저 강인 안정도 및 감도 특성을 특이치 한계를 이용하여 기술하고 이들 설계 조건을 만족하는 제어기 설계 기법을 Diophantine 방정식과 감도 평가 함수의 최소화에 의해 제시하였다. Diophantine 방정식의 해를 구하기 위해 칼만 필터의 설계와 필터의 주파수 역 특성을 조사하였고, 원하는 특이치 형성을 통해 저감도 특성을 만족하는 특성 다항식 행렬을 구하였다. 그리고 제어기에 설계 자유도를 주어 감도 평가 함수를 최소화하는 제어기 매개 변수 계산 방법을 Routh배열을 이용하여 제시하였다.

제안된 강인한 제어기 설계 기법을 모델에 적용하여 검토해 본 결과 만족스러운 결과를 얻을 수 있었다.

## Abstract

In the paper, the controller design problem guaranteeing robust stability is studied for plant model with uncertainties.

At first, robust stability and sensitivity are described by using the singular value and its plot. And the design technique accomplishing the design specification is presented by Diophantine equation and the minimization of the sensitivity cost function.

In order to solve the equation, Kalman filter is designed and the frequency domain characteristics are examined. Also, the characteristic polynomial matrix satisfying low sensitivity is obtained through the desired singular value shaping.

The computing of free parameter minimizing the sensitivity is obtained by using Routh array.

Finally, numerical example for illustrating the design technique is given.

## 1. 서 론

피드백 시스템의 설계 목적은 강인 안정도,

감도 특성, 외란 응답 특성과 같은 피이드백 특성을 향상시키는 데 있다. 그런데 제어 시스템 설계시 사용하는 수학적 모델은 언제나 실제 시

\* 正會員：大田産業大學校 電氣工學科 副教授

\*\* 正會員：大田産業大學校 電氣工學科 助教

接受日字：1993年 9月 2日

시스템에 대한 불완전한 묘사로 어떠한 경우든 간에 모델에 포함되는 매개변수들은 변하기 쉽고 불확실하다.

따라서 플랜트 모델에 존재하는 불확실성, 즉 모델링 오차를 고려하지 않은 설계는 시스템의 성능뿐만 아니라 안정도 문제까지 만족스럽지 않은 결과를 초래할 수 있게 때문에 제어 시스템 설계시 모델링 오차를 고려하는 것이 바람직하다.

강인 제어(robust control)는 플랜트 불확실성의 존재 시에도 정확하게 제어 시스템을 해석하고 설계하는 제어 기법으로 최근에 발표된 대부분의 연구 결과는 다변수 시스템의 강인성 문제, 즉 강인성 분석, 강인 안정화,  $H^2$  및  $H^\infty$  감도 최적화, 그리고 강인성에 관련된 설계 조건을 충족시키기에 적합한 설계 기법 개발에 중점을 두고 있다<sup>1)</sup>. 제어 시스템의 강인성 분석은 대부분 일반화된 Nyquist 판별 법에 근거해서 도출된 새로운 판단법을 이용하며<sup>2)</sup>, 강인성을 분석하기 위해서는 시스템의 불확실성을 가정하여야 하는데 행렬의 특이치가 주로 이용된다. 강인한 제어기의 설계 방법은 시간 영역과 주파수 영역에서의 설계 방법으로 나눌 수 있는데 후자의 경우 피이드백 루프와 관련된 행렬 전달 함수의 특이치를 이용하여 제어기를 매개변수화(parameterization)하여 강인성을 만족하도록 제어기를 선택하는 방법이 널리 이용되는데<sup>3)</sup> 이러한 방법들은 행렬 전달 함수의 소인수 분해(coprime factorization) 이론에 근거를 두고 있다<sup>4)</sup>.

Doyle, Chen 및 Kimura는 플랜트 섭동하에서도 페루프 시스템이 안정하기 위한 필요 충분조건을 피이드백 루프와 관련된 행렬의 특이치(singular value)에 의해 유도하였고<sup>5-6)</sup>, Safonov 및 Kaiwara는 제어계의 감도 특성에 대해 고찰하였다<sup>7-8)</sup>. 그러나 강인한 제어기 설계 기법은 주로 안정도에 관한 것뿐이고 또한 아직 통일된 방법이 없으며 대부분의 경우 구조를 갖지 않는 불확실성에 대한 특이치 한계를 이용하여 수행되어 왔다.

본 논문에서는 MFD(matrix fraction description)로 표현된 다변수 피이드백 시스템의 출력 측에 구조를 갖지 않은 불확실성이 존재하는 경

우에도 강인 안정도 및 저감도 특성을 갖는 강인한 제어기를 설계하고자 한다.

먼저 강인 안정도 및 저감도 특성을 만족하는 조건을 피이드백 루프와 관련된 전달 함수 행렬의 특이치를 이용하여 기술하고 설계 조건을 만족하는 강인한 제어기 설계 기법을 Diophantine 방정식과 감도 최소화 기법에 의해 제시하였다. 또한 Diophantine 방정식의 해를 구하는데 있어서 핵심이 되는 특성 다항식 행렬을 구하기 위해 가상 플랜트의 가관측성 실현을 통해 칼만 필터를 설계하고 칼만 필터의 주파수 역 특성(frequency domain characteristics)과 특이치 형성(singular value shaping)을 통해 저감도 특성을 만족하도록 설계 매개변수와 특성 다항식 행렬을 구하였다 그리고 감도 평가 함수의 계산 방법을 Routh 배열을 이용하여 제시하였다.

끝으로 제안된 강인한 제어기 설계 기법의 효용성을 입증하기 위한 설계예를 들었다.

[기호 설명]

- [·] : 행렬
- $\sigma_i[\cdot]$  : 행렬 [·]의 i번째 특이치
- $\underline{\sigma}[\cdot]$  : 행렬 [·]의 최소 특이치
- $\overline{\sigma}[\cdot]$  : 행렬 [·]의 최대 특이치
- $\nu$  : 제어 가능 지수(controllability index)

2. 설계 이론

2.1. 강인 안정도

그림 2.1과 같은 r 입력 m 출력 피이드백 시스템을 고찰한다. 여기서  $G(s)$ 는 strictly proper한  $m \times r$  플랜트 전달 행렬이고,  $K(s)$ 는 설계될  $r \times m$  제어기 전달 행렬이며,  $d(s)$ 와  $\eta(s)$ 는 각각 외란과 측정 잡음을 나타낸다.

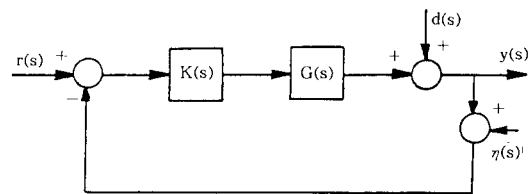


그림 2.1 다변수 피이드백 제어 시스템  
Fig. 2.1 Multivariable Feedback control system

그림 2.1에서 피이드백 시스템의 입-출력 관계를 구하면 다음과 같다.

$$y(s) = T(s) (r(s) - \eta(s)) + S(s) d(s) \quad (2.1)$$

여기서  $T(s)$ 와  $S(s)$ 는 각각 페루프 전달 행렬, 감도 행렬로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(s) = [I + G(s) K(s)]^{-1} G(s) K(s) \quad (2.2)$$

$$S(s) = [I + G(s) K(s)]^{-1} \quad (2.3)$$

지금 플랜트  $G(s)$ 가 출력 측에서 승법적으로 변동하는 경우 안정도 문제를 생각해 보자. 섭동된 플랜트를  $G'(s)$ 라 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G'(s) = [I + L(s)]G(s) \quad (2.4)$$

$$\bar{\sigma} [L(j\omega)] \langle 1/\omega \rangle \quad (2.5)$$

여기서  $L(s)$ 는 플랜트 불확실성을 나타내며 식(2.5)로 표현된 불확실성을 구조를 갖지 않는 불확실성(unstructured uncertainty)이라 한다. 그리고  $1/\omega$ 는 양의 스칼라 함수로 일반적으로 저주파 영역에서 작은 값을 가지며 고주파 영역에서 큰 값을 갖는다<sup>3)</sup>.

플랜트  $G(s)$ 가 식(2.4)로 섭동된 경우 섭동된 페루프 전달 행렬  $T'(s)$ 는 다음과 같이 된다.

$$T'(s) = [I + G'(s) K(s)]^{-1} G'(s) K(s) \quad (2.6a)$$

$$= G'(s) K(s) [I + G'(s) K(s)]^{-1} \quad (2.6b)$$

이때 섭동된 피이드백 시스템이 안정하기 위한 충분 조건은 다음과 같다<sup>3)</sup>.

(i) 공칭 피이드백 시스템의 전달 행렬  $T(s)$ 가 안정하고,

(ii) 식(2.5)로 주어진  $1/\omega$ 에 대하여 다음의 특이치 부등식을 만족하여야 한다.

$$\bar{\sigma} [T(j\omega)] \langle 1/\omega \rangle \quad (2.7)$$

## 2.2. 감도 특성

플랜트  $G(s)$ 가 출력 측에서 승법적으로 변동하는 경우  $G'(s)$ 는 식(2.4)로 치환되며, 이때 섭동된 페루프 전달 행렬은 다음과 같이 된다.

$$T'(s) = T(s) + \Delta T(s) \quad (2.8)$$

여기서  $T'(s)$ 는 섭동 후의 페루프 전달 행렬이며,  $\Delta T(s)$ 는  $T(s)$ 에 대한 승법적 변동분을 나타낸다.

지금  $T(s)$ 가 점근적으로 안정하고  $\forall \omega \geq 0$ 에 대해

$$1) M \geq \bar{\sigma} [L(j\omega)T(j\omega)] \quad (2.9)$$

을 만족하는 상수  $M$ 이 존재한다고 가정하면 다음의 부등식이 성립한다<sup>10)</sup>.

$$\frac{\bar{\sigma} [\Delta T(j\omega)]}{\bar{\sigma} [T(j\omega)]} \leq r \bar{\sigma} [L(j\omega)] \quad (2.10)$$

$$\forall \omega \geq 0$$

여기서

$$r = (1 - M)^{-1} \bar{\alpha} [S(j\omega)] \quad (2.11)$$

식(2.10)은 페루프 시스템의 감도 특성을  $\bar{\sigma} [T(j\omega)]$ 와  $\bar{\sigma} [\Delta T(j\omega)]$ 의 비로 나타낸 것으로 모든  $L(j\omega)$ 에 대해  $\bar{\sigma} [S(j\omega)]$ 와  $(1 - M)^{-1}$ 가 작을 때  $r$ 가 작게 되어 저감도 특성을 갖게 된다는 것을 의미한다.

## 2.3. S(s)와 T(s)의 상호 타협

위에서 강인 안정도와 감도 특성을 특이치를 이용하여 기술했는데 강인 안정도는  $T(s)$ 의 특이치와 관련되고 저감도 특성은  $S(s)$ 에 좌우됨을 알 수 있다. 즉, 강인 안정도는  $T(j\omega)$ 의 최대 특이치  $\bar{\sigma} [T(j\omega)]$ 가 작을 수록 섭동된 시스템의 안정 여유가 크게 되고  $\bar{\sigma} [S(j\omega)]$ 가 작게 될 때 저감도 특성을 얻을 수 있다.

그런데,  $S(s)$ 와  $T(s)$ 사이에는  $S(s) + T(s) = I$ 의 관계를 가지므로  $\bar{\sigma} [S(j\omega)]$ 와  $\bar{\sigma} [T(j\omega)]$ 를 동시에 작게 할 수 없고 일반적으로 저주파 영역에서  $\bar{\sigma} [S(j\omega)]$ 를 작게 하고 고주파 영역에서  $\bar{\sigma} [T(j\omega)]$ 를 작게 한다.

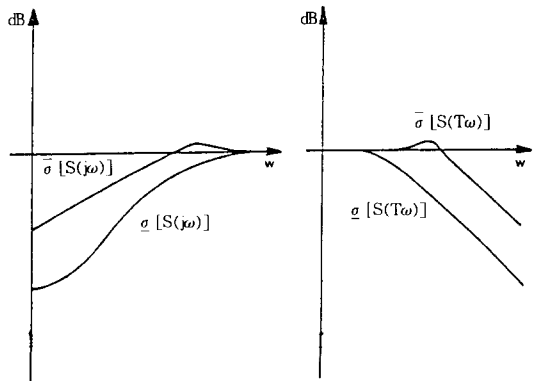


그림 2.2  $S(j\omega)$ 와  $T(j\omega)$ 의 특이치 선도  
Fig. 2.2 Singular Value plot of  $S(j\omega)$  and  $T(j\omega)$

### 3. 강인한 제어기의 설계

#### 3.1. 감도 행렬과 감도 평가 함수

그림 2.1에서 플랜트  $G(s)$ 와 제어기  $K(s)$ 를 MFD로 표현하면 다음과 같다.

$$G(s) = D(s)^{-1} N(s) \quad (3.1)$$

$$K(s) = Y(s) X(s)^{-1} \quad (3.2)$$

여기서  $D(s)$ ,  $N(s)$ ,  $Y(s)$ 는 각각  $m \times m$ ,  $m \times r$ ,  $r \times m$ ,  $m \times m$  다항식 행렬이고  $D(s)$ 는 정칙으로 행차(row degree)  $n$ 를 가지며 row reduced 하다고 가정한다. 또한  $X(s)$ 는 열차(column degree)  $q$ 이며 column reduced 하도록 선택한다. 식(3.1)과 (3.2)를 이용하여 식(2.3)의 감도 행렬을 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$S(s) = [I + G(s) K(s)]^{-1} \\ = X(s) \phi(s)^{-1} D(s) \quad (3.3)$$

여기서  $\phi(s)$ 는 페루프 특성 다항식 행렬이다.

$$\phi(s) = D(s) X(s) + N(s) Y(s) \quad (3.4)$$

식(3.3)과 (3.4)는 강인 안정도와 저감도 특성을 갖는 제어기를 설계하기 위한 기본 식으로 특이치로 주어진 설계 조건을 만족하는 제어기를 설계하기 위해서는  $S(s)$ 와  $T(s)$ 의 특이치를 알아야 한다. 그러므로 행렬  $S(s)$ 와  $T(s)$ 의 구성을 요한다.

한편  $S(s)$ 와  $T(s)$ 사이에  $S(s) + T(s) = I$ 의 관계를 가지므로 감도 행렬  $S(s)$ 를 알면  $T(s)$ 를 알 수 있다.

우선 먼저 감도 행렬  $S(s)$ 를 구성하는 문제를 고찰해 보자. 식(3.3)의 감도 행렬  $S(s)$ 는 특성 다항식 행렬  $\phi(s)$ 와  $X(s)$ 의 함수로  $S(s)$ 를 구성하기 위해서는  $\phi(s)$ 와  $X(s)$ 를 알아야 한다. 그런데  $X(s)$ 는  $\phi(s)$ 속에 포함되므로 식(3.4)에 대한 해의 조건을 만족하고  $\phi(s)$ 의 행렬식이 Hurwitz 다항식이 되도록  $\phi(s)$ 를 구하면  $X(s)$ 는 식(3.4)의 Diophantine 방정식으로 부터 구할 수 있다. 그러나 제어기 차수의 선정에 따라  $X(s)$ 는 다중해(multiple solution)를 갖게 된다. 즉,  $X(s)$ 는 제어기 자유 매개변수 (free parameter)의 함수가 되므로 감도 행렬  $S(s)$ 도 자유 매개변수의 함수가 된다.

여기서는 저 감도 특성을 만족하는 특이치 조

건 즉,  $\bar{\sigma} [S(j\omega)]$ 가 작게 되는  $X(s)$ 를 구하기 위한 평가 함수를 도입하고자 한다.

먼저 가중 감도 행렬(weighted sensitivity matrix)를 다음과 같이 정의하자.

$$S_Q(s) = S(s) Q(s) \quad (3.6)$$

여기서  $Q(s)$ 는 가중 행렬(weighted matrix)이다.

또한  $S_Q(s)$ 의 놈(norm)  $\|S_Q(s)\|_2$ 을 다음과 같이  $L_2$  놈으로 정의하자<sup>1)</sup>.

$$\|S_Q(s)\|_2 = \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \{ (S_Q(s) S_Q(-s)^T) \} ds \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

여기서  $\text{tr}[\cdot]$ 은 행렬의 trace이다.

이때  $\bar{\sigma} [S(j\omega)]$ 를 작게하기 위한  $X(s)$ 의 자유 매개 변수들은 다음의 감도 평가 함수를 최소화 하므로써 구할 수 있다.

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \{ (S_Q(s) S_Q(-s)^T) \} ds \quad (3.8)$$

#### 3.2. 특성 다항식 행렬의 결정

##### 3.2.1. 가상 플랜트의 가관측성 실현

다음 식으로 주어진 가상 플랜트를 생각한다.

$$G_p(s) = \phi_0(s)^{-1} D(s) \quad (3.9)$$

여기서  $G_p(s)$ 는 Strictly proper하며  $\phi_0(s)$ 는  $\phi(s)$ 와 동일한 행차를 가지며 row reduced 하도록 선택한  $\phi(s)$ 의 초기 행렬이다.

$\phi_0(s)$ 와  $D(s)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_0(s) = S_L(s) \phi_r + \phi_l(s) \phi_r \quad (3.10)$$

$$D(s) = \phi_l(s) D_r \quad (3.11)$$

여기서

$$S_L(s) = \text{diag}\{s^h, i=1, \dots, m\} \quad (3.12)$$

$$\phi_l(s) = \text{block diag} \{ [s^{h-1}, \dots, s, 1], i=1, \dots, m \} \quad (3.13)$$

이고  $L_i$ 는  $\phi_0(s)$ 의  $i$ 행의 차수이다.

그리고  $\phi_r$ ,  $\phi_l$  및  $D_r$ 는 각각 식(3.10)의  $S_L$ 와  $\phi_l(s)$  및 식(3.11)의  $\phi_l(s)$ 에 대응하는 계수 행렬이다. 이 경우 식(3.9)의 가관측성 실현은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) \quad (3.14a)$$

$$y(t) = C_0 x(t) \quad (3.14b)$$

여기서

$$A_0 = A_0^0 - \phi_0 \phi_{tr}^{-1} C_0^0$$

$$C_0 = \phi_{tr}^{-1} C_0^0 \quad (3.15)$$

$$B_0 = D_0$$

이고  $A_0^0, C_0^0$ 는 다음과 같이 주어진다<sup>12)</sup>.

$$A_0^0 = \text{block diag} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$C_0^0 = \text{block diag} [ \{1, 0, \dots, 0\}, 1 \times 1, i=1, \dots, m ]$$

### 3.2.2. 칼만 필터의 구성

칼만 필터를 설계하기 위해 다음과 같은 확률 동적 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \xi(t)$$

$$y(t) = C_0 x(t) + \theta(t) \quad (3.17)$$

여기서  $\{A_0, B_0, C_0\}$ 는 전절에서 구한 가상 플랜트의 가관측성 실현이고  $x(t), u(t), y(t)$ 는 각각 상태, 입력, 출력 벡터이다. 그리고  $\xi(t)$ 와  $\theta(t)$ 는 각각 잡음 강도  $W, V$ 를 갖는 백색 잡음으로 다음의 통계적 성질을 갖는다.

$$E\{\xi(t)\} = 0$$

$$E\{\xi(t)\xi^T(\tau)\} = W \delta(t-\tau)$$

$$E\{\theta(t)\} = 0 \quad (3.18)$$

$$E\{\theta(t)\theta^T(\tau)\} = V \delta(t-\tau)$$

$$E\{\theta(t)\xi(\tau)\} = 0$$

여기서  $\delta(t-\tau)$ 는 단위 임펄스 함수이다.

한편 칼만 필터는 실제로 플랜트의 차수와 동일하며 확정 제어 입력  $u(t)$ 와 측정된 출력  $y(t)$ 가 입력으로 주어지는 하나의 선형 시불변 시스템으로 칼만 필터의 동역학 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + H_0(y(t) - C_0 x(t)) \quad (3.19)$$

여기서  $H$ 는 설계될 칼만 필터 이득 행렬로 다음의 대수 리카티 방정식으로 부터 구할 수 있다.

$$A_0 P + P A_0^T + W - P C_0^T V^{-1} C_0 P = 0 \quad (3.20)$$

$$H = P C_0^T V^{-1}$$

식(3.19)는 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\dot{x}(t) = [A_0 - H C_0] x(t) + B_0 u(t) + H y(t) \quad (3.21)$$

따라서 칼만 필터 안정도는 행렬  $[A_0 - H C_0]$ 의

고유치에 의해 결정됨을 알 수 있다. 만일  $[A_0, C_0]$ 가 검출 가능하면 안정한 칼만 필터  $(R, \lambda[A_0 - H C_0](0))$ 을 보장할 수 있는 칼만 이득 행렬이 존재한다<sup>13)</sup>.

### 3.2.3. 주파수 특성을 이용한 $\phi(s)^{-1} D(s)$ 의 특이치 형성

이 절에서는 칼만 필터의 주파수 특성을 이용하여  $\phi(s)^{-1} D(s)$ 의 특이치를 형성하고 이로부터 설계 매개변수를 선정하는 방법을 제시한다. 페루프 특성 다항식 행렬  $\phi(s)$ 를 다음과 같이 놓자.

$$\phi(s) = \phi_0(s) + \psi_1(s) H \quad (3.22)$$

위 식을 이용하면

$$\phi(s)^{-1} D(s) = [\phi_0(s) + \psi_1(s) H]^{-1} D(s)$$

$$= [I + \phi_0^{-1}(s) \psi_1(s) H]^{-1} \phi_0(s)^{-1} D(s) \quad (3.23)$$

한편  $\phi_0^{-1}(s) \psi_1(s)$ 는 가관측성 성질로 부터<sup>12)</sup>

$$\phi_0^{-1}(s) \psi_1(s) = C_0 (sI - A_0)^{-1} \quad (3.24)$$

이므로 식(3.23)은 다음과 같이 된다.

$$\phi(s)^{-1} D(s) = [I + C_0 (sI - A_0)^{-1} H]^{-1} \phi_0(s)^{-1} D(s) \quad (3.25)$$

위 식에서 칼만 필터 루프 전달 함수 행렬을

$$G_{KF} = C_0 (sI - A_0)^{-1} H \quad (3.26)$$

라 하면 식(3.25)는

$$\phi(s)^{-1} D(s) = [G_{KF}(s)]^{-1} \phi_0(s)^{-1} D(s) \quad (3.27)$$

이다 따라서  $\phi(s)^{-1} D(s)$ 는  $I + G_{KF}(s)$ , 즉 칼만 필터 루프 전달 행렬에 좌우됨을 알 수 있다. 칼만 필터 루프의 주파수 역 특성을 조사하기 위해 칼만 필터 감도 전달 행렬  $S_{KF}(s)$ 와 페루프 전달 행렬  $T_{KF}(s)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$S_{KF}(s) = [I + G_{KF}(s)]^{-1} \quad (3.28)$$

$$T_{KF}(s) = [I + G_{KF}(s)]^{-1} G_{KF}(s) \quad (3.29)$$

또 입력 및 측정 잡음 강도  $W$ 와  $V$ 를 다음과 같이 놓자.

$$W = \Gamma \Gamma^T \quad (3.30)$$

$$V = \mu I \quad (3.31)$$

여기서,  $\Gamma, \mu$ 는 설계 매개변수이다.

그러면 LQ문제의 주파수 등가 식으로 부터 칼만 주파수 등가식을 유도할 수 있다<sup>14)</sup>.

$$[I + G_{KF}(s)]^{-1} V [I + G_{KF}(-s)]^T + G_{FOL}(s) G_{FOL}^T(-s) \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} I+G_{KF}(s) & [I+G_{KF}(-s)]^T \\ G_{FOL}(s) & G_{FOL}^T(-s) \end{bmatrix} = I + (1/\mu)[G_{FOL}(s) \quad G_{FOL}^T(-s)] \quad (3.33)$$

여기서  $G_{FOL}(s)$ 는 다음으로 표현되는 칼만 필터 개루프 전달 행렬이다.

$$G_{FOL}(s) = C_0(sI - A_0)^{-1}\Gamma \quad (3.34)$$

따라서 칼만 필터 주파수 증가 식은

$$[I+G_{KF}(j\omega)][I+G_{KF}(j\omega)]^T = I + (1/\mu)\{[C_0(j\omega - A)^{-1}\Gamma] \cdot [C_0(-j\omega I - A_0)^{-1}\Gamma]^T\} \quad (3.35)$$

칼만 필터 주파수 증가 식을 행렬의 특이 값으로 표시하면 다음과 같다<sup>10)</sup>.

$$\sigma_i[I+G_{KF}(j\omega)] = \{I + (1/\mu)\sigma_i^2[C_0(j\omega I - A)^{-1}\Gamma]^T\}^{1/2} \quad (3.36)$$

위 식은 저주파 영역에서는 근사적으로 다음과 같이 된다.

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] = (1/\mu^{1/2})\sigma_i[C_0(j\omega I - A)^{-1}\Gamma] \quad (3.37)$$

식(3.36)은 다변수 시스템의 설계에서 기본이 되는 식으로 이 식으로부터 다음과 같은 칼만 필터의 주파수 특성을 나타내는 부등식이 성립한다.

$$\bar{\sigma}[S_{KF}(j\omega)] \leq 1 \quad (3.38)$$

$$\bar{\sigma}[T_{KF}(j\omega)] \leq 2 \quad (3.39)$$

다음에  $\phi(s)^{-1}D(s)$ 의 특이치 형성을 통해 설계 매개변수  $\mu$ 와  $\Gamma$ 를 구하는 문제를 생각해 보자. 식(3.24)와 (3.34)로부터 다음 식이 성립한다.

$$C_0(SI - A_0)^{-1}\Gamma = \phi_0(s)^{-1}\psi_1(s)\Gamma \quad (3.40)$$

여기서

$$W(s) = \psi_1(s)\Gamma \quad (3.41)$$

라 놓으면 식(3.40)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C_0(SI - A_0)^{-1}\Gamma = \phi_0(s)W(s) \quad (3.42)$$

지금 임의의 주파수  $\omega$ 에서

$$\underline{\sigma}[\phi_0(j\omega)^{-1}W(j\omega)/(\mu)^{1/2}] \gg 1 \quad (3.43)$$

라 하면 식(3.36)은 다음과 같이 된다.

$$[I+G_{KF}(j\omega)] [I+G_{KF}(-j\omega)]^T = [\phi_0(j\omega)^{-1}W(j\omega)/(\mu)^{1/2}] \cdot [\phi_0(-j\omega)^{-1}W(-j\omega)/(\mu)^{1/2}]^T \quad (3.44)$$

또는

$$[I+G_{KF}(j\omega)] = [\phi_0(j\omega)^{-1}W(j\omega)/(\mu)^{1/2}] \quad (3.45)$$

따라서 식 (3.27)로부터

$$\phi_0(j\omega)^{-1}D(j\omega) = (\mu)^{1/2}W(j\omega)^{-1}D(j\omega) \quad (3.46)$$

이다.

한편 고주파 영역에서  $\underline{\sigma}[I+G_{KF}(j\omega)] = 1$ 이므로

식(3.27)에서 다음식이 성립한다.

$$\phi_0(j\omega)^{-1}D(j\omega) = \phi_0(j\omega)^{-1}D(j\omega) \quad (3.47)$$

또한 저주파 영역에서

$$\underline{\sigma}[I+G_{KF}(j\omega)] > 1 \quad (3.48)$$

이므로

$$\bar{\sigma}[\phi^{-1}(j\omega)D(j\omega)] = \bar{\sigma}\{[I+G_{KF}(j\omega)]^{-1}\phi_0(j\omega)^{-1}D(j\omega)\} \leq \bar{\sigma}\{[I+G_{KF}(j\omega)]^{-1}\bar{\sigma}[\phi_0^{-1}(j\omega)D(j\omega)]\} \quad (3.49)$$

위 식으로부터 다음 부등식이 성립한다.

$$\bar{\sigma}[\phi^{-1}(j\omega)D(j\omega)] \leq \bar{\sigma}[\phi_0(j\omega)^{-1}D(j\omega)] \quad (3.50)$$

그러므로  $\mu$ 와  $W(s)$ 를 적당히 선정하므로써  $\phi(j\omega)^{-1}D(j\omega)$ 의 특이치를 형성할 수 있다.

$$W(s) = D(s) + N(s)Z(s) \quad (3.51)$$

라 놓자. 그러면 식(3.46)에서

$$\begin{aligned} \phi(s)^{-1}D(j\omega) &= (\mu)^{1/2}W(s)^{-1}D(s) \\ &= (\mu)^{1/2}[I+G(s)Z(s)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

여기서  $\mu$ 는 특이 값 선도에서 모든 특이 값을 상하로 수평 이동시키는 역할, 즉 칼만 필터 이득 및 대역 폭을 조정하는데 사용된다. 따라서  $\phi(s)^{-1}D(s)$ 의 특이치는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[\phi(j\omega)^{-1}D(j\omega)] &= \bar{\sigma}[I+G(j\omega)Z(j\omega)]^{-1} \\ &= 1/\underline{\sigma}[I+G(j\omega)Z(j\omega)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

이 식은  $\phi(j\omega)^{-1}D(s)$ 의 특이치를 형성하기 위한 식으로 임의의 주파수에서 다음의 특이치 부등식을 만족할 때 저감도 특성을 얻을 수 있다.

$$\underline{\sigma}[I+G(j\omega)Z(j\omega)] \gg 1 \quad (3.54)$$

그러나 플랜트  $G(s)$ 는 strictly proper하므로 저주파 영역에서는  $\underline{\sigma}[G(j\omega)]$ 가 크게 된다. 이 경우  $\underline{\sigma}[G(j\omega)]$ 가 충분히 클 때  $Z(s)$ 는 단위 행렬로 선택한다. 그러나  $\underline{\sigma}[G(j\omega)]$ 가 충분히 크지 않을 때  $Z(s)$ 는  $G(j\omega)$ 의 특이 벡터를 구하여  $G(j\omega)$ 의 최소 특이치에 대응하는 특이 벡터에 적당한 배수를 하여 결정한다.

### 3.3. Diophantine 방정식의 해

$\phi(s)$ 를 선정하면 식(3.4)로부터 제어기 매개변수를 구할 수 있다. 식(3.4)는 다변수 시스템의 설계시 자주 사용되는 Diophantine 방정식으로 방정식의 해법을 유도하기 위해 식(3.1), (3.2)의 다항식 행렬  $D(s)$ ,  $N(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $X(s)$  및  $\phi(s)$ 를 다음과 같이 놓자.

$$\begin{aligned}
D(s) &= D_n s^n + \dots + D_1 s + D_0 \\
N(s) &= N_{n-1} s^{n-1} + \dots + N_1 s + N_0 \\
X(s) &= I s^q + \dots + X_1 s + X_0 \\
Y(s) &= Y_q s^q + \dots + Y_1 s + Y_0 \\
\phi(s) &= \phi_{n+q} s^{n+q} + \dots + \phi_1 s + \phi_0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

식(3.4)에 식(3.55)로 주어진 다항식 행렬을 대입하고  $s$ 의 멱의 계수를 등식으로 놓으면 다음 식을 얻는다.

$$S_{q+1}(D, N)E = F \tag{3.56}$$

여기서  $S_{q+1}(D, N)$ 은  $D(s)$ 와  $N(s)$ 의 계수 행렬로 구성되는 Sylvester resultants 이다<sup>15)</sup>.

그리고  $E$ 와  $F$ 는 제어기 매개변수와  $\phi(s)$ 의 계수로 구성되는 행렬이다.

$$E = \begin{bmatrix} I \\ Y_q \\ X_{q-1} \\ Y_{q-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \phi_{n+q} \\ \phi_{n+q-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_1 \\ \phi_0 \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

식(3.56)의 해가 존재하기 위한 조건은  $\phi(s)$ 의 행의 차가  $n+q$ 이며 row reduced 하고 보상기의 차  $q$ 가  $q \geq v-1$ 이어야 한다<sup>15-16)</sup>. 그런데  $q > v-1$ 이면  $S_{q+1}(D, N)$ 는 열의 차원이 행의 차원보다 크게 되어 제어기 매개변수를 유일하게 구할 수 없고 다음과 같이 구할 수 있다. 식(3.56)를 다음과 같이 분리하자.

$$[S_1 \ S_2] \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = F \tag{3.58}$$

또는

$$S_1 E_1 + S_2 E_2 = F \tag{3.59}$$

여기서  $S_1$ 은 정방 행렬이고 정칙이다. 그러면 제어기 매개변수  $E_1$ 은 다음과 같이 제어기 매개변수  $E_2$ 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$E_1 = S_1^{-1} F - S_1^{-1} S_2 E_2 \tag{3.60}$$

### 3.4. 제어기 매개변수의 계산

$\phi(s)$ 를 결정하면 식(3.60)로 부터 제어기 매개변수를 구할 수 있다. 그런데 제어기의 차수를

$q > v-1$ 로 선택하면 제어기 매개변수는 자유 매개변수 (free parameter)의 함수로 되어 유일하게 구할 수 없다. 이 절에서는 식(3.8)의 평가 함수를 최소로 하는 제어기 매개변수의 선정 기법을 제시한다.

식(3.6)의 가중 감도 행렬  $S_Q(s)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
S_Q(s) &= S(s)Q(s) \\
&= X(s)\phi(s)^{-1}D(s)Q(s) \\
&= \frac{X(s) \text{adj } \phi(s) D(s)}{\det \phi(s)} Q(s)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

위 식에서 감도 행렬  $S_Q(s)$ 를 고찰하면  $X(s)$ 의 행의 차수가  $q$ ,  $D(s)$ 의 열의 차수가  $n$ 이므로 행렬  $\phi(s)$ 의 열차는  $n+q$ 이다.

따라서  $\det \phi(s)$ 의 차수도  $2(n+q)$ 이므로  $S_Q(s)$ 는 proper하다. 한편 식(3.8)의 적분은 strictly proper한 유리 함수의 적분이므로 이 적분 기법을 적용하기 위해 행렬  $Q(s)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$Q(s) = \text{diag}[k_i / (Cs + 1)], \quad i=1, \dots, m \tag{3.62}$$

그러면 식(3.8)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{B_{ij}(s) B_{ij}(-s)}{A_i(s) A_i(-s)} ds \tag{3.63}$$

여기서

$$A_i(s) = a_0^i s^t + a_1^i s^{t-1} + \dots + a_{t-1}^i s + a_t^i \tag{3.64}$$

$$B_{ij}(s) = b_{ij0}^i s^{t-1} + b_{ij1}^i s^{t-2} + \dots + b_{ij(t-1)}^i s + b_{ijt}^i \tag{3.65}$$

$$i, j=1, 2, \dots, m$$

$$t=2(n+q)+1$$

참고문헌 [17]에서 제시한 적분 기법을 적용하기 위하여  $A_i(s)$ 와  $B_{ij}(s)$ 의 계수를 이용하여 Routh배열을 구성하면 홀수 행의 계수들은 다음과 같이 구할 수 있다<sup>18)</sup>.

$$a_l^{t-1} = a_{(l+1)}^t \quad l: \text{짝수} \tag{3.66}$$

$$a_{(l+1)}^t - \alpha a_{(l+2)}^t \quad l: \text{홀수}$$

$$\alpha = a_0^t / a_1^t$$

$$l=1, 2, \dots, t-1$$

$$b_{ij}^{t-1} = a_{ij(l+1)}^t \quad l: \text{짝수} \tag{3.67}$$

$$b_{ij(l+1)}^t - \beta_{ij} a_{(l+1)}^t \quad l: \text{홀수}$$

$$\beta_{ij} = b_{ij}^t / a_1^t$$

$$l=1, 2, \dots, t-1$$

따라서 식(3.66), (3.67)에서  $\alpha_i$ 와  $\beta_{ij}$ 를 구하면 식(3.8)의 적분은 다음식으로 부터 구할 수 있다.

$$J = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{2(n+q)+1} (\beta_{ij})^2 / (2\alpha_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{2(n+q)+1} (b'_{ij})^2 / (2\alpha_i a'_i) \quad (3.68)$$

그런데 식(3.68)에서  $b_{ij}$ 은 제어기 자유 매개변수의 함수이므로 J를 최소로 하는 자유 매개변수를 찾는 문제가 된다.

### 4. 적용예

본 논문에서 제시한 강인한 제어기 설계를 위하여 다음으로 주어진 CH47 Tandem Rotor Helicopter 모델을 생각한다.

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + Bu_m(t)$$

$$y_m(t) = Cx_m(t)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.005 & 2.4 & -32 \\ -0.14 & 0.44 & -1.3 & -20 \\ 0 & 0.018 & -1.6 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.12 \\ 0.36 & -8.6 \\ 0.35 & 0.009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.3 \end{bmatrix}$$

이 모델에 대한 전달 함수 행렬을 구하면<sup>4)</sup>

$$G(s) = D(s)^{-1} N(s)$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 0.42s + 0.0153 & 0.4936s - 0.0405 \\ -1.03 & s^2 + 1.6s - 1.2 \end{bmatrix}$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0.36s - 0.4674 & 0.86s - 0.16 \\ 20.055 & 0.5157 \end{bmatrix}$$

이고 플랜트의 행차가 2이므로 제어기의 차수는  $q \geq 2 - 1 = 1$ 이다.

본 연구에서는 강인 안정도를 판별하기 위해 스칼라 함수  $l(\omega)$ 를  $l(\omega) = 0.02 + 0.0001\omega$ 로 선택하고 제어기 차수가 각각  $q=1, q=2$ 인 경우 제안된 설계 기법을 이용하여 제어기를 설계하였다.

그림4.1 및 그림4.2는  $q=1$ 인 경우  $S(j\omega)$ 와  $T(j\omega)$ 의 특이치 선도를 보여준다. 이 그림으로부터 설계된 제어기는 저감도 특성은 만족하지 않지만 1,000[rad/sec]이상의 고주파 영역에서 강인 안정도를 보장함을 알 수 있다.

그림 4.3, 4.4는 페루프 시스템의 감도, 페루프 전달 행렬의 특이치 선도로  $\omega \rightarrow 0$ 에서  $\bar{\sigma} [S(j\omega)] < 1$ 이므로 페루프 시스템은 저감도 특성을 갖는다. 그리고  $\omega > 10$ [rad/sec]에서  $\bar{\sigma} [T(j\omega)] \ll 1/l(\omega)$ 이므로 강인 안정도를 보장한다는 것을 알 수 있다.

### 5. 결론

본 논문에서는 플랜트에 구조를 갖지 않은 불

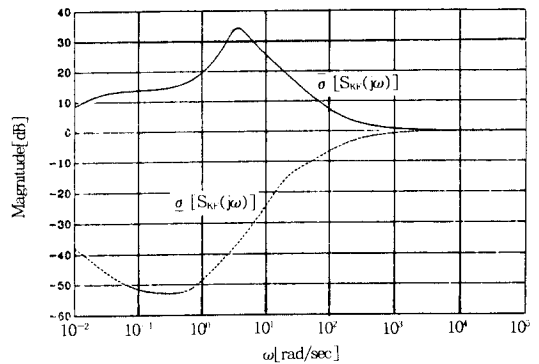


그림 4.1 S(jω)의 특이치 선도 (q=1)  
Fig. 4.1 Singular Value Plot of S(jω) (q=1)

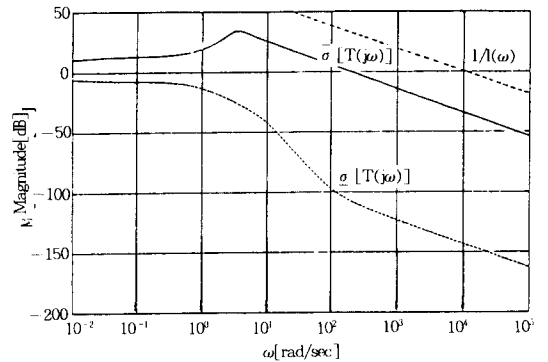


그림 4.2 T(jω)의 특이치 선도 (q=1)  
Fig. 4.2 Singular Value Plot of T(jω) (q=1)



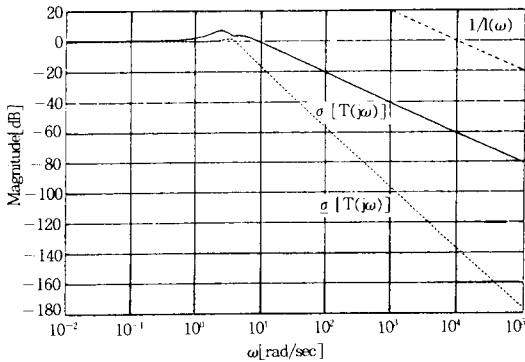


그림 4.4  $T(j\omega)$ 의 특이치 선도 ( $q=2$ )  
Fig. 4.4 Singular Value Plot of  $T(j\omega)$  ( $q=2$ )

확실성이 존재하는 경우에도 저감도 특성 및 강인 안정도를 보장하는 제어기 설계 문제를 고찰하였다.

제어기 설계는 감도를 작게 한다는 의미에서 가중 감도 함수의 자승치의 적분을 평가 함수로도 도입, 이를 최소화하는 제어기 설계 기법을 제안하고 칼만 필터의 설계와 특이치 형성을 통해 저감도 및 강인 안정도를 보장하는 설계 매개변수와 특성 다항식 행렬을 구하는 방법을 제시했는데 플랜트의 최소 특이치에 해당하는 특이 벡터에 적당한 배수를 하여줌으로서 감도 특성을 개선할 수 있었으며, 스칼라 함수의 교차 주파수보다 작게 되도록 설계 매개변수를 선택하므로써 강인 안정도를 보장함으로 알 수 있었다. 그리고 저차 제어기로서 원하는 피이드백 특성을 얻을 수 없는 경우 제어기의 차수를 증가시킴으로써 만족스러운 결과를 얻을 수 있었다. 그러나 제어기의 차수가 증가하면 제어기 매개변수 추적시 설계 자유도가 증가되어 초기값 선정이 중요한 문제로 됨을 알 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

- 1) P.Dorato, Robust control, IEEE Press, 1987
- 2) C.A.Desoer and Y.T.Wang, "On the generalized Nyquist

- stability criterion", IEEE Trans. Automat. contr., Vol.AC-25, no.2, Apr. 1980
- 3) J.C.Doyle and G.Stein, "Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern syntheses", IEEE Trans. Automat. contr., Vol.AC-26, no.1, pp.4-17, Feb. 1981
- 4) M.Vidyasagar, Control system synthesis: A factorization approach, MIT Press, 1985
- 5) J.S.Freundenberg, D.P.Looze and J.B.Cruz, "Robustness analysis using singular value sensitivity", Int.J.Control, Vol.35, no.1, pp.95-116, 1982
- 6) M.G.Safonov, "Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems", IEE Proc., Vol.129, Pt. D, no.6, pp.251-256, Nov. 1982
- 7) J.Doyle, "Analysis of feedback system with structured uncertainties", IEE Proc., Vol.129, Pt.D, no.6, pp.242-250, 1982
- 8) M.G.Safonov, "Optimal diagonal scaling for infinity norm optimization", Proc. ACC, pp. 19-21, 1985
- 9) M.Vidyasagar and H.Kimura, "Robust controller for uncertain linear multivariable system", Automatica, Vol.22, no.1, pp.85-94, 1986
- 10) H.Kajiwara and K.Furuta, "On sensitivity property of multivariable feedback control system", Trans. SICE, Vol. 20, no.1, pp.16-21, 1984
- 11) B.C.Chang and J.B.Pearson, "Optimal disturbance reduction in linear multivariable system", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-29, no.10, pp.880-887, 1984
- 12) T.Kailath, Linear systems, Prentice Hall, 1980
- 13) M.Athans, Lecture notes on multivariable control systems, M.I.T, 1986
- 14) 김중식, 선형 제어 시스템 공학, 청문각, 1988.
- 15) 이상혁, 이원규, "저차화 Sylvester Resultant 행렬의 랭크에 의한 동적 보상기 설계", 대한전기학회, Vol.40, No.2, pp.193-200, 1991
- 16) T.E.Djafaris, "Robust pole assignment and stabilization for systems with parameters", Proc. ACC, pp.784-789, 1985
- 17) K.J.Astrom, Introduction to stochastic control theory, Academic Press, 1970
- 18) 이원규, "가중감도 평가함수를 최소화하는 강인 제어기의 설계", 공학박사학위논문.