

# 변조된 수은-희유기체 교류방전의 양광주 내의 반경방향 입자분포

(Radial Density Distributions in the Positive Column of a Strongly Modulated Mercury-rare gas AC Discharge)

李 鎮 雨\* · 呂 寅 善\*\*  
(Chin-Woo Yi · In-Seon Yeo)

## 요 약

본 논문은 수은과 10(torr)의 희유기체의 혼합기체 중에서 심하게 변조된 저압기체방전의 양광주의 반경방향 입자분포를 이론적으로 연구하였다. 전류는 깊이 50(%)로 정현파로 변조되었다. 계산결과 여기 원자의 반경방향 분포는 0차 Bessel 함수  $J_0(2.4r/R)$ 와 다르고 분포의 반전이 나타나는 주파수 대역도 있었다. 연립미분방정식을 풀기 위하여 FDM과 2계 Runge-Kutta method의 혼합법을 사용하였다.

## Abstract

The radial density distributions of the positive column of strongly modulated low-pressure gas discharges in mercury-rare gas mixtures at 10 torr pressure have been studied theoretically. The current was modulated sinusoidally with a modulation depth of 50%. Calculations have shown that the radial profile of the excited atoms is different from 0th Bessel function  $J_0(2.4r/R)$  and the inversion of the radial distribution of the excited atom can occur at some frequency. The hybrid method of FDM and 2nd order Runge-Kutta method is used for solving differential equations.

## 1. 서 론

$\tau_D^{-1} < \omega < \tau_E^{-1}$  ( $\tau_D$ 는 플라즈마 확산시간이며,  $\tau_E$ 는 전자에너지 이완시간)의 범위에서 변조주파수  $\omega$ 로 저압기체방전의 양광주 전류  $I$ 가  $I = I_0(1 + \beta \sin \omega t)$ 를 따라 변조되면, 전자온도  $T_e$ 가 변조된다. 변조깊이  $\beta < 1$ 인 경우, 전자온도  $T_e$ , 전자밀도  $n_e$ 와 여기원자밀도에 대한 방정식은 선형화되며, 이러한 양들의 정현파적인 변화는 Granowski(1955), Crawford(1962), Davy(1967) Deutsch와 Rutscher(1968), 그리고 Pfau et al(1970) 등에 의하여 보여졌다. 만약  $\beta$ 가 1보다 작지 않

은 경우 양광주 내에서의 비선형적 영향으로 인하여 방전입자의 시간에 따른 변화가 비정현파가 되며 그들의 시간에 대한 평균값을 변화시키게 된다. 네온 방전에서의 이러한 현상은 Polman(1969)에 의하여 연구되었으며, Polman과 van der Werf는 전자온도에 대한 이론화와 여기 주파수를 연구한 바 있다.

본 연구에서는 강하게 변조된 수은-희유기체 방전의 양광주의 특성을 보였다. 계산은 수은의 에너지레벨 중 중요한 6개의 에너지레벨만을 고려한 역학적 모델을 사용하여 수행하였다. 계산 결과는 Polman, Werf와 Drop(1972)이 관중심에서 측정 한 전자온도, 전자밀도 및  $6^3P_1$ 수은여기원자 밀도와 반경방향의 밀도를 0차 Bessel 함수로 가정하여 계산한 이들의 값을 비교하였다. 이들

\*正會員 : 세명백트론 研究室長 · 工博

\*\*正會員 : 全南大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

接受日字 : 1993년 4월 19일

의 실험결과는 펄스파로 구동되는 방전에서는 비선형의 영향이 나타났다.

## 2. 이론적 모델링

### 2.1 가정

방전플라즈마는 약이온화되어 있으며, 축방향으로 균일하며, 축대칭이 성립한다고 가정한다. 수은의 기저상태의 농도와 희유기체의 원자는 관경방향에 대하여 일정하다고 가정한다.(Cayless : 1963) 또한 전자에너지 및 기체온도는 관경방향에 관계없이 일정하며, 희유기체 원자는 여기되거나 이온화되지 않으며, 이들에게는 탄성충돌에 의한 손실이 무시하다고 가정한다. 전자의 에너지분포는 Maxwellian 분포를 갖는다고 가정한다. 본 논문에서 고려한 수은의 여기에너지레벨은 Hg(6<sup>1</sup>P<sub>1</sub>), Hg(6<sup>3</sup>P<sub>1</sub>)와 Hg(6<sup>3</sup>P<sub>2</sub>)이며, Hg<sub>2</sub><sup>+</sup>와 공간중의 재결합은 무시하였다.(Biondi : 1953) 그러므로 플라즈마는 유극성확산에 의하여 지배된다.

### 2.2 방전의 모델링

본 논문에서는 저압 수은-네온방전을 대상으로 네온압력 10(torr), 방전용기의 반경 26(mm), 전류의 실효치 0.4(A), 용기의 관벽온도 40[°C]의 경우에 대하여 모델을 구성하였다.

#### 2.2.1 에너지분포

Maxwellian 에너지분포함수는 다음의 식으로 나타낸다.

$$f(E_e) = \frac{2\sqrt{E_e}}{\sqrt{\pi}(kT_e)^{1.5}} \exp\left(-\frac{E_e}{2kT_e}\right)$$

#### 2.2.2 전자이동

에너지를 전달하는 충돌주파수  $\nu_{coll}$ 은 다음의 식을 사용하였다.

$$\nu_{coll} = \nu_0^* p \left(\frac{kT_e}{q}\right)^{1.65}$$

여기에서, p : 불활성기체 압력 [torr]

$$\nu_0^* : 15 \times 10^8 [s^{-1} V^{-1.65} torr]$$

q : 전자의 전하량

본 논문에서 사용한 전자이동도는 수은증기를 고려하였으며, 다음과 같다. (Shkarofsky et al. : 1966)

$$\mu_e = 2.05 \times 10^8 \times T_e^{-1.55}$$

### 2.2.3 에너지 손실비율

방전 중의 탄성충돌은 대부분 전자와 네온기체와의 충돌에서 일어난다고 가정하면, 충돌시 전자의 에너지 손실비율  $\chi$ 는 다음의 식으로 주어진다.

$$\chi = \frac{2m_e}{M_{Ne}}$$

여기에서,  $m_e$  : 전자질량

$M_{Ne}$  : 네온원자의 질량

### 2.2.4 수은원자의 에너지레벨

본 논문에서는 수은의 기저레벨과 6<sup>1</sup>P<sub>1</sub>, 6<sup>3</sup>P<sub>0</sub>, 6<sup>3</sup>P<sub>1</sub>, 6<sup>3</sup>P<sub>2</sub> 및 이온화레벨을 고려하여 모델을 구성하였다. 모델에서 사용한 에너지레벨을 그림 1에 도시하였다. 각 에너지레벨을 기저레벨은 g, 6<sup>1</sup>P<sub>1</sub>은 p, 6<sup>3</sup>P<sub>0</sub>는 q, 6<sup>3</sup>P<sub>1</sub>은 r, 6<sup>3</sup>P<sub>2</sub>는 s, 그리고 이온화레벨은 i로 표시하였다. 그림 1 (a)에서 2중실선은 방사를, 점선은 재흡수를 표시하며, 그림 1 (b)에서 K<sub>xy</sub>는 x레벨에서 y레벨로의 천이확률을 나타내며, K<sub>yx</sub>는 y레벨에서 x레벨로의 천이확률을 나타낸다.

### 2.2.5 여기와 이온화

x레벨에서 y레벨로의 천이확률은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

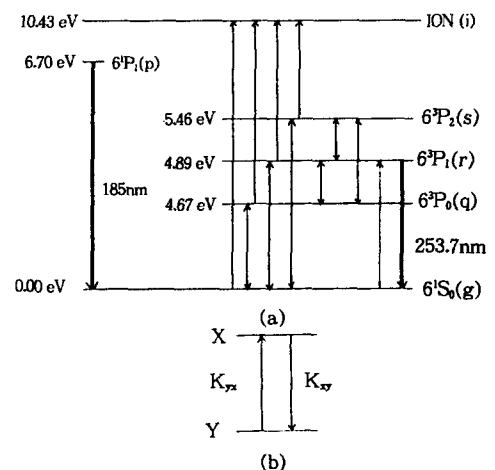


그림 1. 모델링에 사용된 에너지레벨 및 레벨간의 천이와 개념도

Fig. 1. Energy levels used in modeling and the schematic diagram of the transitions between the levels.

$$K_{xy} = \langle \sigma_{xy}(v_e)v_e \rangle = \frac{1}{n_e} \int_0^\infty \sigma_{xy}(\epsilon) \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{m_e}} f(\epsilon) d\epsilon$$

**2.2.6 공진방사와 방사수명**

본 논문에서 사용한 값은 다음과 같다.[11]

$$\tau_{\text{eff}} = 1.175 \times 10^{-9} [\text{sec}]$$

여기에서,  $\tau_{\text{eff}}$  : r레벨 여기원자의 실효수명

**2.2.7 여기원자와 이온의 확산**

여기원자는 자유확산(free diffusion)을 하는 반면, 이온은 유극성확산을 한다. 그러므로 이온의 확산계수  $D_i$ 는 유극성확산계수  $D_0$ 와 같은 값을 가지며, 여기원자의 확산계수는 에너지레벨에 관계없이 모두 같다. 따라서 여기원자의 확산계수를  $D_r$ 라 한다. 0[°C], 1[torr]에서의 각종 입자 확산계수는 다음과 같다.[4]

$$\mu = 4310 [\text{cm}^2/\text{V s}]$$

$$D_i = 101.5 [\text{cm}^2/\text{s}]$$

$$D_r = 161 [\text{cm}^2/\text{s}]$$

**2.2.8 입자평형식**

q레벨의 시간당 밀도변화는 다음의 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_q(r, t) = & -D_r \nabla^2 n_q(r, t) \\ & + n_e(r, t) [K_{gq} n_g + K_{rq} n_r(r, t) + K_{sq} n_s(r, t)] \\ & - (K_{qg} + K_{qr} + K_{qs} + K_{qi}) n_q(r, t) \end{aligned}$$

r레벨의 시간당 밀도변화는 다음의 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_r(r, t) = & -D_r \nabla^2 n_r(r, t) \\ & + n_e(r, t) [K_{gr} n_g + K_{qr} n_r(r, t) + K_{sr} n_s(r, t)] \\ & - (K_{rg} + K_{rq} + K_{rs} + K_{ri}) n_r(r, t) - \frac{n_r(r, t)}{\tau_{\text{eff}}} \end{aligned}$$

s레벨의 시간당 밀도변화는 다음의 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_s(r, t) = & -D_r \nabla^2 n_s(r, t) \\ & + n_e(r, t) [K_{gs} n_g + K_{qs} n_q(r, t) + K_{rs} n_r(r, t)] \\ & - (K_{sg} + K_{sq} + K_{sr} + K_{si}) n_s(r, t) \end{aligned}$$

p레벨 여기원자밀도는 q, r, s레벨 여기원자밀도에 비하여 1~2[%] 정도로 작고, 또한 다른 에너지레벨 사이의 천이 관계가 정확하게 규명되어 있지 않으므로 p레벨은 입자평형식에서는 제외시켰다. 그러나 그 에너지량은 무시할 수 없으므로,

r레벨 방사의 10[%]로 가정하여 에너지보존식에서는 포함시켰다.

전자의 시간당 밀도 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_e(r, t) = & -D_a \nabla^2 n_e(r, t) \\ & + n_e(r, t) [K_{g1} n_g + K_{q1} n_q(r, t) + K_{r1} n_r(r, t) \\ & + K_{s1} n_s(r, t)] \end{aligned}$$

**2.2.9 에너지보존식**

저압 수은-네온 혼합기체방전 내에서는 외부에서 주어지는 에너지를 거의 전자가 얻고, 외부

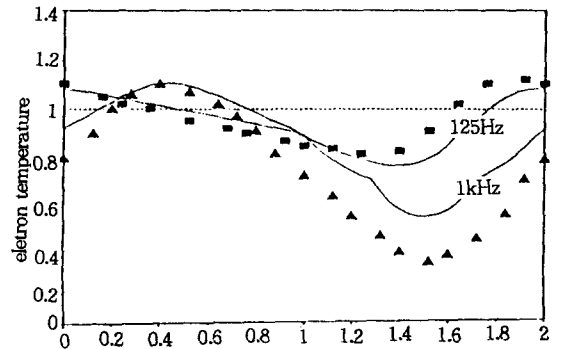


그림 2. 주파수 125[Hz]와 1[kHz]에서의 전자온도  $T_e$ 의 한 주기 중의 변화. 실선은 계산된 값이며 점은 실험적 값이다.  $\beta=0.5$ ,  $\langle I \rangle=0.4[\text{A}]$

Fig. 2. One period of the normalized electron temperature  $T_e$  for  $f=125(\text{Hz})$  and  $1(\text{kHz})$ . The full curves have been calculated : the points indicate the experimental data.  $\beta=0.5$ ,  $\langle I \rangle=0.4[\text{A}]$

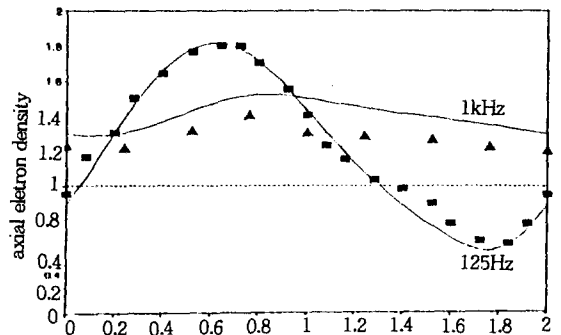


그림 3. 주파수 125[Hz]와 1[kHz]에서의 전자밀도  $n_e$ 의 한주기 중의 변화. 실선은 계산된 값이며 점은 실험적 값이다.  $\beta=0.5$ ,  $\langle I \rangle=0.4[\text{A}]$

Fig. 3. One period of the normalized electron density  $n_e$  for  $f=125(\text{Hz})$  and  $1(\text{kHz})$ . The full curves have been calculated : the points indicate the experimental data.  $\beta$

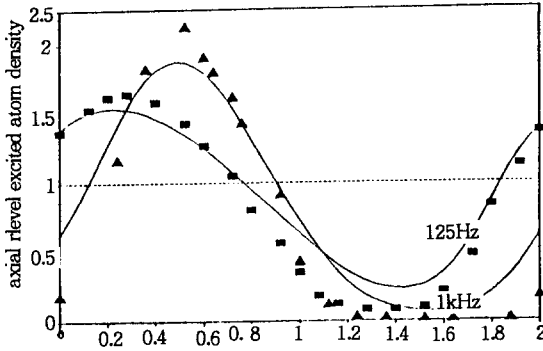


그림 4. 주파수 125(Hz)와 1(kHz)에서의 여기원자밀도  $n_0(6^3P_1)$ 의 한주기 중의 변화. 실선은 계산된 값이며 점은 실험적 값이다.  $\beta=0.5$ ,  $\langle l \rangle=0.4(A)$

Fig. 4. One period of the normalized excited atom density  $n_0(6^3P_1)$  for  $f=125(\text{Hz})$  and  $1(\text{kHz})$ . The full curves have been calculated: the points indicate the experimental data.  $\beta=0.5$ ,  $\langle l \rangle=0.4(A)$

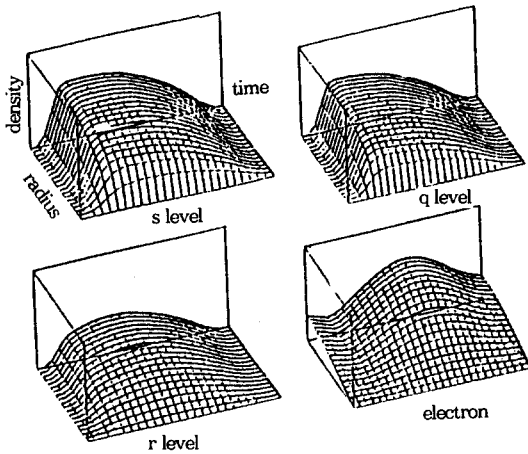


그림 5. 주파수 125(Hz)에서의 반경방향과 시간에 따른 여기원자 및 전자밀도의 변화.

Fig. 5. The variation of excited atom and electron density with radial direction and time.  $f=125(\text{Hz})$

로 유출되는 에너지는 전자가 얻은 에너지를 전자가 직접 소비하거나 기체원자에 전달하여 기체원자가 소비하므로 에너지평형식은 전자에 대하여만 성립시키는 것이 가능하다.

전자는 방전램프에 인가된 전계에 의하여 에너지를 얻고, 네온원자와의 탄성충돌과 수은원자와의 비탄성충돌에 의하여 에너지를 잃는다. 또한 기체온도와 전자온도를 반경방향에 무관하다고

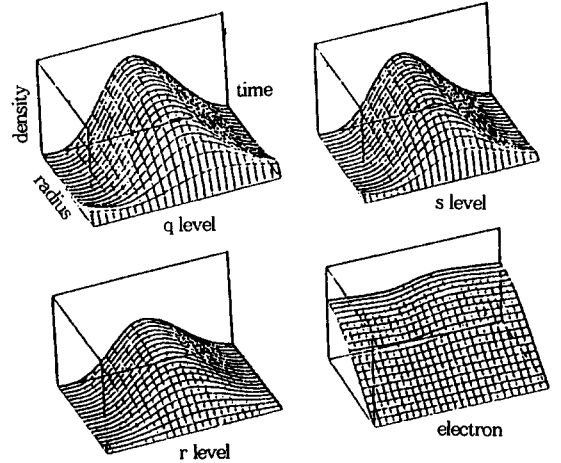


그림 6. 주파수 1(kHz)에서의 반경방향과 시간에 따른 여기원자 및 전자밀도의 변화.

Fig. 6. The variation of excited atom and electron density with radial direction and time.  $f=1(\text{kHz})$

가정하였으므로, 열전도에 의한 에너지소비는 없다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{n_e(0, t) U_e(t)\} &= n_e(0, t) [-\chi \nu_{\text{out}}(U_e(t) - U_g) \\ &+ \mu_e \{F(t)\}^2 + \sum_y K_{xy} n_x(0, t) \Delta U_{xy}] \\ &- \frac{n_e(r, t)}{\tau_{\text{ref}}} \Delta U_{rg} \times 1.1 \end{aligned}$$

여기에서,  $U_e(t)$ : 전자의 평균에너지  
 $U_g$ : 네온원자의 평균에너지  
 $F(t)$ : 방전램프 내의 전계  
 $\Delta U_{xy}$ : 에너지레벨 간의 에너지차이  
 $\Delta U_{rg}$ :  $6^3P_1(r)$ 레벨과  $6^1S_0(g)$ 레벨 간의 에너지차이

### 2.2.10 경계조건

본 논문에서 사용한 경계조건은 다음과 같다.

$$\left. \frac{\partial n_q}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial n_r}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial n_s}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial n_e}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$\begin{aligned} n_q \Big|_{r=R} &= n_r \Big|_{r=R} = n_s \Big|_{r=R} = n_e \Big|_{r=R} = 0 \\ n_g &= N_{rg}(T_w) \end{aligned}$$

### 3. 수치계산

위에서 구성한 방정식은 4개의 편미분방정식과 1개의 상미분방정식의 연립방정식으로 구성된다. 본 논문에서는 편미분방정식에는 양적차분근사법을 상미분방정식에는 2nd order Runge Kutta method를 사용한 혼합방법을 사용하여 해를 구하였다. 시간에 대하여는 초기치문제로, 반경방향에 대하여는 경계치문제로 보아 구한 해의 변화가 0.01[%] 이내가 될 때까지 반복계산하였다.

계산결과를 다음의 그림들에 도시하였다. 그림 2는 주파수 125[Hz] 및 1[kHz]에서의 한주기 동안의 전자온도의 변화를 나타낸다. 그림 3은 같은 경우의 관중심에서의 전자밀도의 변화를 나타내며, 그림 4는 같은 경우의 r 레벨 여기원자의 관중심에서의 밀도 변화를 나타낸다. 이들은 각각 Polman et al.이 실험적으로 측정된 값과 비교하여 계산의 타당성을 보였다. 또한 그림 5와 6에 주파수 125[Hz] 및 1[kHz]의 경우 반경방향과 시간변화에 따른 q, r, s 여기레벨의 원자밀도 및 전자밀도의 변화를 도시하였다. 그림 6에서 g, s 여기 레벨의 관백부근에서 밀도분포 반전이 나타남을 볼 수 있다.

### 4. 결론

반경방향의 입자분포를 0차 Bessel 함수로 가

정한 경우와 대단한 차이는 나타나지 않았으나, 본 논문의 결과에 의하면 q 및 s 여기레벨 원자의 반경방향 분포는 0차 Bessel 함수로 근사하기에는 무리가 있다고 사료되며, 주파수 1[kHz]에서는 밀도분포가 반전되는 현상이 나타났다. 따라서 방전을 정확하게 이해하기 위하여는 반경방향의 밀도 분포를 가정하는 것보다는 계산에 의하여 해석하여야 한다.

### 참고 문헌

- 1) Kenty, C., J. Appl. Phys., vol.21, p.1309, 1950.
- 2) Waymouth, J. F. and Bitter, F., J. Appl. Phys., vol. 27, no.2, p.122, 1956
- 3) Verweij, W., Physica, vol. 25, p.980, 1959.
- 4) Cayless, M. A., Proc. 5th Intl. Conf. on Ionized Phenomena in Gases, Munich, vol. 1, p.262, 1961.
- 5) Drop, P. C. and Polman, J. Phys. D : Appl. Phys., vol. 5, p. 562, 1972.
- 6) Verbeek, T. G. and Drop, P. C., J. Phys. D : Appl. Phys., vol.7, p.1677, 1974.
- 7) Cayless, M. A., Br. J. Appl. Phys., vol.14, p.863, 1963.
- 8) Polman, J. and Drop, P. C., J. Phys. D, vol.5, p.562, 1972.
- 9) Chen, Z. F. and Jones, H. G., J. Phys. D : Appl. Phys., vol. 17, p.337, 1984
- 10) Verweij, W., Philips Res. Rep. Suppl. 2, p.1, 1961.
- 11) Holstein, T., Phys. Rev., vol.72, no. 12, p.1212, 1947.
- 12) 김창효, "數值解法과 電算프로그래밍", 교학사, 1988.