

<논 문> SAE NO. 933756

## 경계요소법을 이용한 응력세기계수의 해석법

### Analysis of Stress Intensity Factor Using Boundary Element Method

조 회 찬,\*    김 회 송\*\*  
H. C. Cho,    H. S. Kim

#### ABSTRACT

This study is concerned with an application of the boundary element method on the crack problem. The stable and efficient analysis method of two dimensional elastostatic stress intensity factor on the mode I deformations is established from the result of stress analysis for the center cracked plates. In order to precisely analyse, The subelements of quadratic element, singular elements on the crack tip and interface and division into regions are applied to elastic stress analysis. The usefulness of the method has been tested with a center cracked plates, a double edge cracked plate and a single edge cracked plate, and the results have turned out to be fairly satisfactory.

주요기술용어 : Stress intensity factor(응력세기계수), Singular element(특이요소), Division into regions (영역분할), Mode I deformation(열림형 변위)

#### 1. 서    론

선형과피역학에 기초를 둔 구조물 및 기기의 설계, 검사 수명평가등을 할 때, 응력세기계수의 평가와 해석은 기본적인 사항이므로 정확하고 효율적인 평가방법이 요구된다.

경계요소법의 선형과피역학에 대한 응용은 Rizzo<sup>1)</sup>의 탄성해석법 정식화가 이루어짐에 따라 급속한 발전이 전개되어 왔다. 일반적으로 탄성해석법으로 정식화된 경계요소법을 선형과피역학문제에 적용시킬 때, 크랙으로 인한 해석상의

부정확성과 크랙선단에서의 응력특이성이 문제점으로 대두된다.<sup>2)</sup> 이같은 문제점들을 개선하고 해결하는 것이 크랙문제해석의 정도를 높이기 위한 기본적인 사항이므로 이에 대한 여러가지 방법들이 소개되었다. Cruse<sup>3-5)</sup>은 크랙을 슬롯으로 생각하여 모델화시키고, 해석대상물체의 대칭성을 이용하여 해석하고, 특이성을 고려한 특이요소를 크랙선단에 적용시켜 응력세기계수를 구하는 등 해석의 고정도화를 추구하였다. Lachat<sup>6)</sup> 등에 의해 세련된 이산화(discretization)수법이 도입되었고, 그 이후에 점점 많은 연구 보

\* 정회원, 단국대학교 대학원 기계공학과

\*\* 정회원, 단국대학교 기계공학과

고가 있어 경계요소법의 주요한 응용 분야를 형성하게 되었다. 특히, Blanford 등<sup>7)</sup>은 해석의 효율성과 범용성을 위하여 해석대상물체의 영역을 분할하여 응력세기계수를 해석하였다. 응력세기계수의 결정법으로써 직접법, 비례결정법등<sup>8-11)</sup>이 제시되어 많이 활용되고 있으나, 이들 해석법 외에 정확도 계산의 간편화 혼합모우드 크랙문제에의 적용가능성등 여러조건을 좀더 만족시킬 수 있는 방법을 찾고자 많은 연구자들이 연구를 계속하고 있다.

따라서 본문에서는 크랙선단상에 있는 내부 경계의 변위와 표면력(traction)으로 해석해온 종래의 해석법과는 달리 안정되고 효율적인 해석을 위하여 내부점의 응력으로 해석하는 방법을 2차원 모우드 I 형 크랙을 예로하여 제시하고자 한다. 또한 크랙과 같은 특이응력장의 문제를 취급하기 위해서는 경계요소법의 탄성해석법 고 정도화를 추구할 필요가 있다. 그러므로 착력점과 관찰점이 일치하였을 때 한 요소당 적분차수를 높게하여 정도를 향상시키는 subelement법<sup>6,8,12)</sup>과 크랙과 공유 경계면(interface) 이 접하는 곳에서는 응력의 특이성을 고려한 변위형 특이요소<sup>5,8,13)</sup>를 이용하였다. 또한 일반성을 나타내기 위하여 혼합모우드와 같은 대칭성이 없는 경우에는 영역분할법<sup>14,15)</sup>이 유효하게 이용되어지고 있으므로 이방법을 채택하였다.

## 2. 이 론

### 2.1 적분방정식

해석하고자하는 영역  $\Omega$ 와 경계  $\Gamma$ 에서의 고정된 해인 변위, 표면력인  $u_i, p_i$ 와 경계조건에 의해 이미 알고있는 변위, 표면력의 성분  $\bar{u}_i, \bar{p}_i$ 에 대해서 생기는 오차는 다음과 같은 가중잔여치법(weighting residual method)으로써 최소화시킬 수 있다.<sup>14)</sup>

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} + b_i) u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_i - u_i) p_i^* d\Gamma \quad (1)$$

여기서  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 는 변위의 값이 주어진 경계와 표면력값이 주어진 경계이고,  $u_k^*, p_k^*$ 는 근사장(approximating field)과 같은 탄성특성을 갖는 일반영역인 가중장(weighting field)의 변위와 표면력으로써 다음과 같이 주어진다.

$$p_i^* = \sigma_{ij}^* n_j$$

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} (u_i^*_{,j} + u_{j,i}^*) \quad (2)$$

여기서  $n_j$ 는 방향여현이다. 식(1)를 부분적분하고 Hooke의 법칙과 식(2)는 이용하면 내부영역에 대한 적분방정식이 구하여진다. 또한 경계에 대한 적분방정식은 기본해의  $1/r$ 항에 의한 특이성 때문에 내부영역의 적분방정식과는 다소 다르게 변화되나, 하나의 적분방정식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) = \int_{\Gamma} r u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (3)$$

여기서  $c_{ij}(\xi)$ 는 내부영역인 경우 kronecker delta  $\delta_{ij}$ 이며, 평활한 경계인 경우에는  $1/2 \delta_{ij}$ 를 갖는다. 그리고 식(3)을 이산화시켰을 경우 식(3)의 좌변과 우변 두번째항의 합으로 표현되는 계수 행렬의 대각선항은 강제운동으로부터 간접적으로 구할 수 있다.  $u_{ij}(\xi, x)$ 와  $p_{ij}(\xi, x)$ 는 근사장에서,  $u_{ij}^*(\xi, x)$ 와  $p_{ij}^*(\xi, x)$ 는 가중장에서 각 각점  $\xi$ 에서  $i$ 방향으로 작용하는 단위하중에 따른 점  $x$ 에서  $j$ 방향의 변위와 표면력이며 Kelvin의 기본해를 나타낸다.<sup>15)</sup>

그리고 내부영역의 응력은 식(3)의 변위를 변형률로 변화시키고 Hooke의 법칙에 대입함으로써 구하여진다. 내부영역의 탄성응력  $\sigma_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} r u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ijk}(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (4)$$

여기서  $u_{ik}^*(\xi, x)$ ,  $p_{ik}(\xi, x)$ 는 Kelvin의 기본해로부터 파생된 tensor를 나타낸다.<sup>15)</sup>

2.2 탄성해석법의 고정도화와 효율화

경계요소법에 의한 탄성해석은 현재 거의 확립되어 있으나 크랙과 같은 특이응력장의 문제를 취급하기 위해서는 이산화시킬 때 고정도화를 추구해야 한다. 또 복잡한 크랙과 경계조건에 대처하기 위해서는 경계요소법의 효율화 및 범용화도 추구할 필요가 있다. 그러므로 해석의 고정도화, 효율화를 위해서 subelement법, 변위형 특이요소, 영역분할법을 크랙문제의 응력해석에 활용하였다.

subelement법은 식(3)의 이산화에 있어서 좌력점과 관찰점이 일치하고 있을 때, 기본해의 특이성으로 인해 특이적분이 된다. 이 특이적분 방법으로써 종래에는 해석적적분법, subelement법, 변수변환법이 이용되어 왔다.<sup>8)</sup> 해석적적분법은 일차 및 선형요소에만 가능하고 고차요소에는 일반적으로 곤란하다. subelement법은 한 요소를 몇개 부분으로 나누어 적분함으로써 한 요소당의 적분차수를 높이고 수치적분의 정도를 향상시키는 방법이다. 여기에서는 Fig.1에서 보는 바와같이 좌력점 P가 중간 절점(mid-node)인 경우에는 Fig. 1(a)와 같이 3개의 부분으로 적분요소를 나누고 양단 절점(extremenodes)인 경우에는 Fig.1(b)와 같이 나누어 해석하였다.

크랙선단에 접하는 요소에 표면력함수와 변위함수가  $r^{-1/2}$ 과  $r^{1/2}$ 에 따라 변화하는 특성을 갖도록 하는 것이 특이요소이다. 이 방법에서는 형상함수 자체에 이 특이성을 나타내게 한 것과 형상함수는 그대로 두고 절점의 이동에 의해 특이성을 주는 방법이 있다. 어느것이든지 크랙선단에 인접하는 요소에만 이 특이요소를 배치하고 나머지 경계부분에는 보통요소로 한다. 최근 가장 간단한 특이요소로서 Fig.2에 나타낸 바와같이 크랙선단에 존재하는 요소의 중간절점을 1/4점에 배치함으로써 간단히 특이요소가 되는 절점이동방법을 많이 이용하고 있다.

영역  $\Omega$ 를 Fig.3에 나타낸 것과같이 2개의 영역  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 로 분할된 경우를 고려한다. 영역  $\Omega_1$ 은

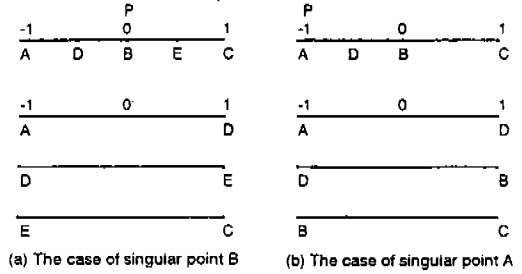


Fig.1 Subelements of quadratic element.

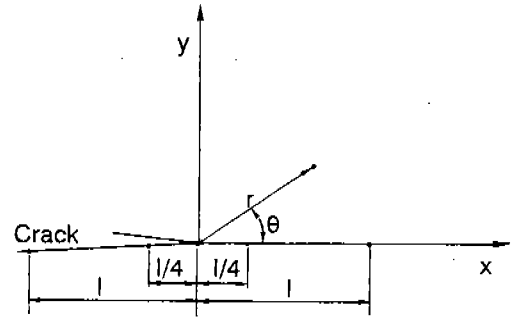


Fig.2 Coordinates of crack tip and singular elements.

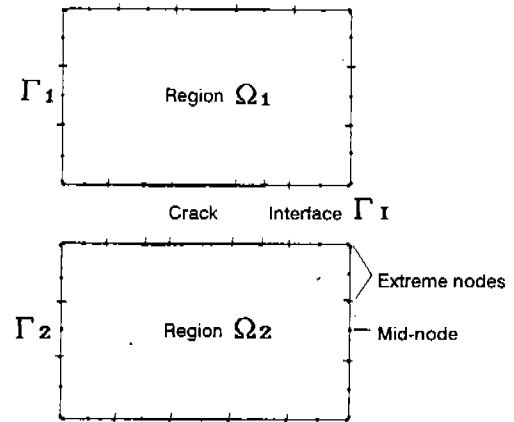


Fig.3 Body divided into regions and quadratic elements.

공유경계  $\Gamma_1$ 와 영역  $\Omega_1$ 의 외부경계  $\Gamma_1$ 으로 둘러싸여 있고, 영역  $\Omega_2$ 과는 공유경계  $\Gamma_1$ 와 영역  $\Omega_2$ 의 외부경계  $\Gamma_2$ 로 둘러싸여 있다. 물체력을 고려하지 않았을 때 영역  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 에 경계요소법을 적용

하여 각각 정식화 하면 다음과 같다.

$$[H^I \ H^I] \begin{Bmatrix} U^I \\ U^I \end{Bmatrix} = [G^I \ G^I] \begin{Bmatrix} P^I \\ P^I \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$[H^P \ H^P] \begin{Bmatrix} U^P \\ U^P \end{Bmatrix} = [G^P \ G^P] \begin{Bmatrix} P^P \\ P^P \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 H와 G는 계수행렬이고 U와 P는 변위와 표면력이며 이들에 상첨자는 영역 1,2를 나타내고 하첨자 I는 공유경계는 나타낸다. 그런데 공유경계  $\Gamma$ 상에서는 변위의 적합조건과 표면력이 평형조건이 만족되지 않으며 안되므로 변위와 표면력을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U_I^1 = U_I^2 = U_I, \quad P_I^1 = -P_I^2 = P_I \quad (7)$$

이 관계를 이용하여 식(5)와 식(6)를 조합하여 하나의 식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} H^I & H^I & -G^I & 0 \\ 0 & H^I & G^I & H^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^I \\ U^I \\ P^I \\ P^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^I & 0 \\ 0 & G^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^I \\ P^I \end{Bmatrix} \quad (8)$$

로 된다.

### 2.3 응력세기계수의 결정법(계산식)

여기서는 2차원 모드 I형의 크랙에 대해 크랙선단에서의 내부응력을 이용한 응력세기계수의 계산을 시도하고자 한다. 크랙선단에서의 응력은 일반적으로 다음과 같이 표현된다.<sup>16)</sup>

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}(\theta) \quad (9)$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(a/b)$$

여기서  $K_I$ 는 모드 I형의 응력세기계수,  $r$ 은 크랙선단에서부터 해석점까지의 거리(반경),  $a$ 는 크랙길이의 1/2,  $b$ 는 판폭의 1/2,  $\sigma$ 는 판에 가해

지는 응력을 나타낸다.  $F_{ij}(\theta)$ 는 Fig.2에서 보는 바와 같이 크랙선단에서의 임의의 각에 따른 함수이며, 수정계수  $F(a/b)$ 는  $a/b$ 의 함수이다. 식(9)로부터 수정계수  $F(a/b)$ 는 다음과 같다.

$$F(a/b) = \frac{\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}}{\sigma \sqrt{\pi a} F_{ij}(\theta)} \quad (10)$$

유한판폭을 갖는 판재의 응력세기계수는 수정계수와 밀접한 관계를 갖고 있으므로 이 값을 정확히 산출하는것이 응력세기계수를 결정하는 핵심으로 볼 수 있다. 수정계수는 이미 많은 연구자에 의해 여러 형태의 함수로 제시되었다.<sup>17)</sup> 이들중 중앙에 크랙이 있는 평판인 경우에는 식(11)로 양편 크랙을 갖는 평판인 경우에는 식(12)로 한쪽에만 크랙이 있는 평판인 경우에는 식(13)으로 수정계수의 기준식을 각각 정하였다.

$$F(a/b) = \{1 - 0.025(a/b)^2 + 0.06(a/b)^4\} \sqrt{\sec(\pi^2/2b)} \quad (11)$$

$$F(a/b) = \{1.122 - 0.561(a/b) - 0.205(a/b)^2 + 0.471(a/b)^3 - 0.19(a/b)^4\} / \sqrt{(1-a/b)} \quad (12)$$

$$F(a/b) = \sqrt{2b/\pi a \tan(\pi^2/2b)} \frac{\{0.752 + 2.02(a/b) + 0.37[1 - \sin(\pi^2/2b)]^3\}}{\cos(\pi^2/2b)} \quad (13)$$

### 3. 해석 및 고찰

종래의 응력세기계수 결정은 크랙선상의 변위나 표면력을 이용하여 해석하였다. 이같은 해석 방법은 경계요소분할방식에 따라 그 결과치가 민감하게 나타난다. 그러므로 木須博行 등<sup>10)</sup>은 크랙선단의 경계요소길이와 관계가 있는 보정식을 산출하는가 하면, 和田均 등<sup>11)</sup>은 응력세기계수를 크랙선단의 경계요소길이의 함수로 나타내

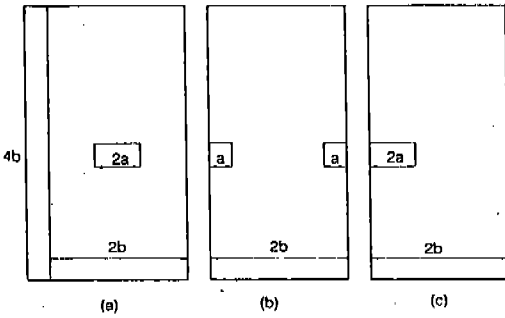


Fig. 4 Specimen [(a) center cracked plate  
(b) double edge cracked plate  
(c) single edge cracked plate]

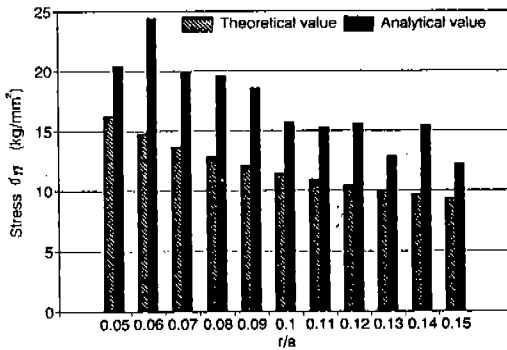


Fig. 5 Comparison of stresses  $\sigma_{77}$  due to the ratio of crack element to a half of crack length at zero degree.

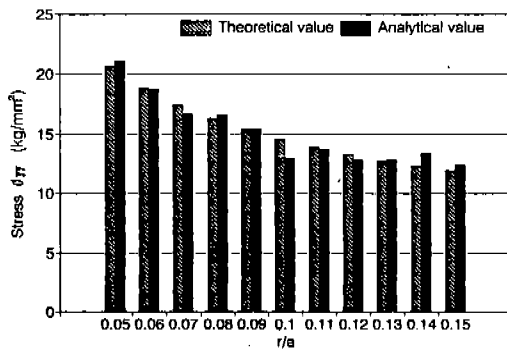
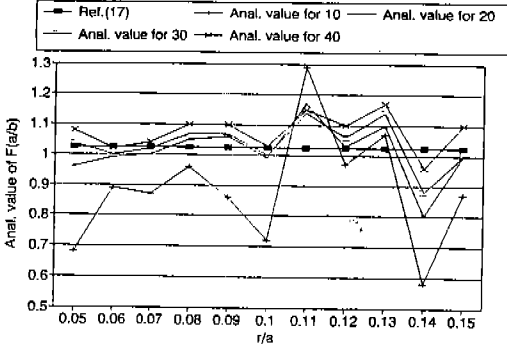


Fig. 6 Comparison of stresses  $\sigma_{77}$  due to the ratio of crack element to a half of crack length at 70 degree.

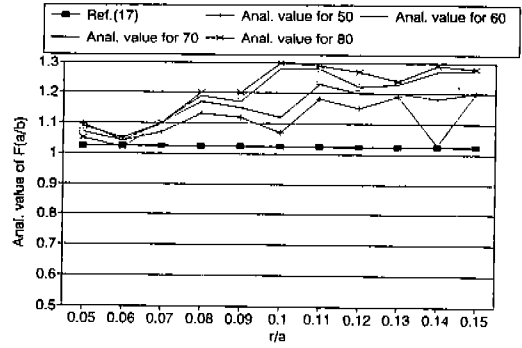
기도 하였다. 그러나 여기서는 경계요소분할에 크게 좌우되지 않고 좀더 안정되고 효율 좋은 계산방법을 제시하고자 한다. 한 예로써 2차원 모드 I형 크랙에 대해 크랙선단에서의 내부응력을 이용한 응력세기계수 해석을 행하였다. 우선 Fig.4(a)와 같은 중앙에 크랙이 있는 형태의 모델에서  $a/b=0.2$ 이고 정적인 인장응력  $5kg/mm^2$ 이 가해지는 경우를 기준모델로 하여 본 해석방법으로 응력을 해석한 후, 식(10)에 의해 계산한 수정계수와 식(11)에 의한 이론적인 수정계수를 구하고, 두개의 값을 비교하여 해석상의 오차를 검토하였다. 기준모델을 해석함에 있어서 기준모델의 크랙선단요소 길이  $I$ 를 크랙선단에서부터 내부영역의 해석하고자 하는 곳까지의 거리 (반경)  $r$ 과 같이 놓고 크랙길이의 절반인  $a$ 와의 비  $r/a$ 을 0.05에서부터 0.01씩 증가시켜 0.15까지 11가지 경우로 나누었고 또 각각의 경우에 대해 내부점을 반경  $r$ 로 크랙선상에서부터 10도에서부터 80도까지 8군데로 정하여 응력해석을 한 후 식(10)에 의해서 수정계수를 산출하였다.

크랙선상 즉 0도인 경우에는 식(9)에 의한 이론적인  $y$ 방향의 응력과 해석상의 표면력을 비교하여 보면 Fig.5에서 보는 바와같이 그 차이가 평균  $5.003kg/mm^2$ 으로 외부에서 가해지는 응력 정도의 크기를 나타내는데, 이는 표면력을 이용한 응력세기계수 결정법을 제시한 村上敬宜<sup>9)</sup>, 木須博行<sup>10)</sup>의 계산법에 나오는 중첩원리로 설명되는 균열이 없는 경우 그 곳에 존재하는 응력의 크기를 나타낸다. 따라서 0도상의 표면력을 이용하여 응력세기계수를 계산하려면 우선 크랙이 없을 때 해석하고자 하는 곳의 응력을 계산하여야 하는 번거로움이 있다. 그러나 한 예로 크랙선상에서 70도 되는 곳의 내부점 응력중  $y$ 방향의 응력크기를 비교하여 보면 Fig.6에서 보는 바와같이 해석한 응력과 이론적인 응력이 잘 일치하고 있다. 따라서 10도에서부터 80도 범위에 있는 내부점을 이용하여 수정계수를 계산한다.

내부점의 응력성분중  $x$ 방향의 응력에 의한 수정계수는 Fig.7에 보는 바와같이 ( $r/a$ )이 0.05-0.7 범위에서는 10도를 제외한 모든 각도에서 비교적 안정된 값을 나타내고 있고, ( $r/a$ )의 값이 0.12까

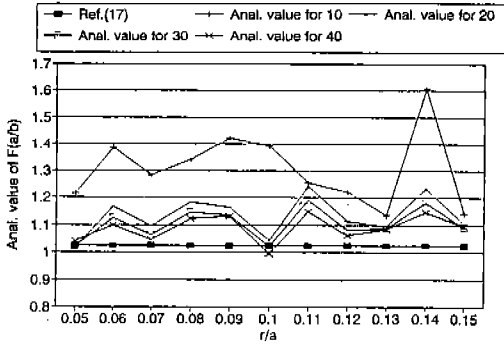


(a) 10-40 degrees

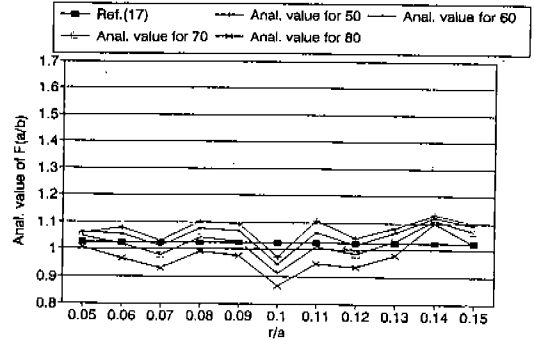


(b) 50-80 degrees

Fig.7 Correction factor of center cracked plate due to variable degrees for stress  $\sigma_{xx}$

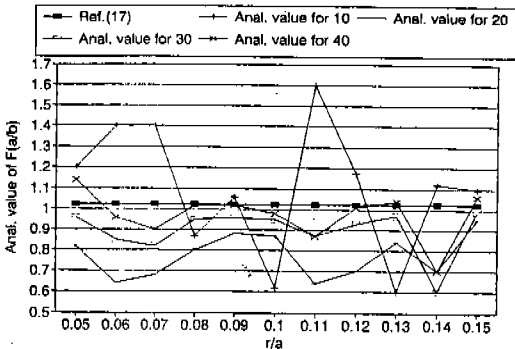


(a) 10-40 degrees

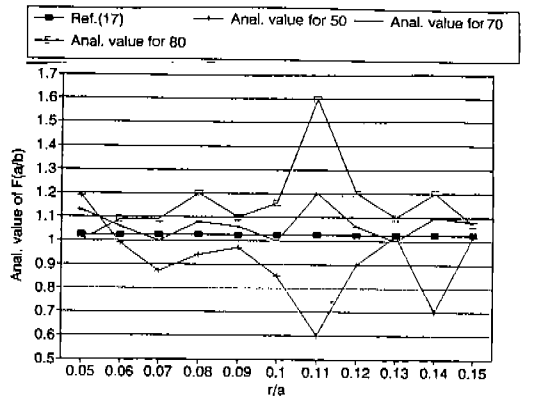


(b) 50-80 degrees

Fig.8 Correction factor of center cracked plate due to variable degrees for stress  $\sigma_{yy}$



(a) 10-40 degrees



(b) 50-80 degrees

Fig.9 Correction factor of center cracked plate due to variable degrees for stress  $\tau_{xy}$

지는 20-40도에서 안정된 값을 나타낸다. 그러나 10도인 경우에는 큰 오차를 보이고 있다. 이는 크랙선상의 경계에 가까워 표면력의 영향을 받은 것으로 고려된다.  $y$ 방향의 응력으로써 해석한 경우는 Fig.8에서 보는바와 같이 50-80도 범위 내에서 수정계수( $a/b$ )가  $r/a$ 의 변화에 큰 영향을 받지 않고 안정된 경향을 나타내고 있다. 그러나 10도인 경우에는  $x$ 방향의 응력에서와 같이 크랙선상의 경계에 가까워 표면력의 영향을 받은 것으로 고려된다. 또한 전단응력영이 되므로 이때에는 ( $r/a$ )의 변화에 따른 수정계수를 고려하지 않았다. 그 이외의 각도에서는 Fig.9에서 보는 바와같이  $x, y$ 방향의 응력에 의한 계산치 보다 불안정된 값을 나타내고 있다. 이와같은 사항들을 종합하여 볼 때, Fig.8(b)에서 보는바와 같이 수정계수의 평균치가 1.012이고 수정계수의 기준식 (11)에 의한 수정계수값 1.024와 1.1%의 오차를 보이고 있는 70도상의  $y$ 방향의 응력을 이용하여 해석함이 좋을 것으로 고려된다.

위와같은 결과의 유효성을 보기위하여 Fig.4와 같이 중앙에 크랙이 있는 판재와 양단에 크랙이 있는 판재와 한쪽에만 크랙이 있는 판재에 대하여 각각 정적 인장응력  $5kg/mm^2$ 을 가하여 해석하였다. 또 판폭과 크랙의 비  $a/b$ 를 중앙에 크랙이

있는 판재와 양단에 크랙이 있는 판재의 경우에는 0.4, 0.6으로 한쪽에만 크랙이 있는 판재인 경우에는 0.2, 0.3으로 변화시켜 해석하였으며 식(11), (12), (13)에 의한 이론적인 해와 비교하여 보았다. Table 1, Table 2에서 보는 바와같이 이론적으로 구한 수정계수를 기준으로하고 해석한 결과와 비교하여 보니 -2.99% 부터 2.7%의 오차를 나타내고 있으므로 비교적 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다. 따라서 여기에서 제시한 응력세기계수 결정법의 유효성을 증명하였다.

#### 4. 결 론

고정도화된 경계요소법을 이용하여 정적 2차원 모두드 I형의 응력세기계수 계산법을 나타내었고 그 계산법의 유효성을 알아 내기위하여 몇가지 예를 들어 해석하여 본결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 내부점의 응력을 활용하여 해석한 모두드 I형 응력세기계수의 수정계수값이 기존의 결과와 잘 일치하고 있다.
- 2) 수정계수를 해석할 때에 크랙선상에서의 각도가 70도되는 곳의  $y$ 방향 응력을 이용하는 것이 안정된 결과를 얻을 수 있으므로

Table 1 Comparison of correction factor of center cracked plate and double edge cracked plate.

Specimen	a/b=0.4			a/b=0.6		
	Ref.(17)	Present	Err. %	Ref.(17)	Present	Err. %
Center Cracked Plate	1.1090	1.1165	-0.67	1.3027	1.2730	2.2
Double Edge Cracked Plate	1.1491	1.1835	-2.99	1.2480	1.2605	-1.0

$$Err. \% = \frac{Ref.(17) - Present}{Ref.(17)} \times 100$$

Table 2 Comparison of correction factor of single edge cracked plate

Specimen	a/b=0.2			a/b=0.3		
	Ref.(17)	Present	Err. %	Ref.(17)	Present	Err. %
Single Edge Cracked Plate	1.3667	1.3844	-1.30	1.6551	1.6096	2.7

$$Err. \% = \frac{Ref.(17) - Present}{Ref.(17)} \times 100$$

바람직하다.

- 3) 양단 크랙을 갖는 판재와 한쪽면에 크랙이 있는 판재에 대해서도 비교적 정확한 해석이 됨으로 다른 형태에 대해서도 본 해석법을 적용시킬 수 있는 가능성을 나타내었다.

### 참 고 문 헌

1. Rizzo, F. J., "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics", *Quart. Appl. Math.*, 25, 1, pp.83-95, 1967.
2. Brebbia, C. A., "Progress in Boundary Element Method, Vol.2", Pentech Press Ltd., pp.63-123, 1983.
3. Cruse, T. A., "An Improved Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Elastic Stress Analysis", *Compt. & Struct.*, 4, pp.741-754, 1974.
4. Cruse, T. A. and Van Buren, W., "Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack", *Int. J. Fracture Mechs.*, 7, pp.1-15, 1971.
5. Cruse, T. A. and Wilson, R. B., "Boundary Integral Equation for Elastic Fracture Mechanics Analysis", AFOSR-TR-78-0355, 1977.
6. Lachat, J. C. and Watson, J. O., "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations", *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, 10, pp.991-1005, 1976.
7. Blandford, G. E., Ingraffea, A. R. and Liggett, J. A., "Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations using the Boundary Element Method", *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, 17, pp.387-404, 1981.
8. 結成良治, "境界要素法の破壊力學への應用, 日本機械學會論文集(A編), 54卷, 505號, pp. 1661-1669, 1989.
9. 村上敬宜, "有限要素法による應力擴大計數の簡便決定法", 日本機械學會論文集(第1部), 42卷, 360號, pp.2305-2315, 1977.
10. 木須博行, 結成良治, 北川英夫, "境界要素法による表面き裂の應力擴大係數の解析", 日本機械學會論文集(A編), 51卷, 463號, pp.660-669, 1986.
11. 和田均, 西村融, "境界要素法による應力擴大係數の簡便計算法", 日本機械學會論文集(A編), 55卷, 530號, pp.54-58, 1990.
12. 田中正隆, 田中道彦, "境界要素解析の基礎", 培風齋, pp.38-44, pp.222-223, 1985.
13. Barsoum, R. S., "On the Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, 10, pp.25-37, 1976.
14. Brebbia, C. A., "The Boundary Element Method for Engineer", Pentech Press, pp.104-176, 1980.
15. Brebbia, C. A. and Walker, S., "Boundary Element Techniques in Engineering", Newnes-Butterworths, pp.80-119, pp.180-187, 1980.
16. David Broek, "Elementary Engineering Fracture Mechanics", Sijthoff & Noordhoff, pp.67-90, 1978.
17. Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., "The Stress Analysis of Cracks Handbook", Del Research Coporation, pp.2.2, 1973.