

디지털 實驗裝置를 利用한 板의 모우드 해석

洪奉基 · 裴東明 · 裴城勇

釜山水產大學校

(1993년 2월 5일 접수)

Modal Analysis of Plate using by Digital Test System

Bong-Ki HONG, Dong-Myung BAE and Seong-Yoeng BAE

National Fisheries University of Pusan

(Received February 5, 1993)

Modal Analysis is the process of characterizing the dynamic properties of an elastic structure by identifying its modes of vibration.

A mode of vibration is a global property of an elastic structure. That is, a mode has a specific natural frequency and damping factor which can be identified from response data at practically any point on a structure, and it has a characteristic mode shape which identifies the mode spatially over the entire structure.

Modal testing is able to be performed on structural and mechanical structure in an effort to learn more about their elastic behavior. Once the dynamic properties of a structure are known its behavior can be predicted and therefore controlled or corrected. Resonant frequencies, damping factors and mode shape data can be used directly by a mechanical designer to pin point weak spots in a structure design, or this data can also be used to confirm or synthesize equations of motion for the elastic structure.¹⁾²⁾

These differential equations can be used to simulate structural response to know input forces and to examine the effects of perturbations in the distributed mass, stiffness and damping properties of the structure in more detail.^{3~8)}

In this paper the measurement of transfer functions in digital form, and the application of digital parameter identification techniques to identify modal parameters from the measured transfer function data are discussed.

It is first shown that the transfer matrix, which is a complete dynamic model of an elastic plate structure can be written in terms of the structural modes of vibration.

This special mathematical form allows one to identify the complete dynamics of the structure from a much reduced set of test data, and is the essence of the modal approach to identifying the dynamics of a structure.

Finally, the application of transfer function models and identification techniques for obtaining modal parameters from the transfer function data are discussed.

Characteristics on vibration response of elastic plate structure obtained from the dynamic analysis by Finite Element Method are compared with results of modal analysis.

기호설명

\mathbf{u}	: 변위 벡터	σ_n	: 응력 벡터
w	: xy 평면에 수직인 측면의 평판 변위	Ω	: domain of interest
θ_x	: xy 평면에 수직회전	Γ_t	: t 을 지정하는 경계부분
θ_y	: yz 평면에 수직회전	Γ_u	: u 을 지정하는 경계부분
ϕ_x, ϕ_y	: shear rotation	$[\mathbf{d}_i]_n$: 절점 변위 벡터
M_x, M_y	: 굽힘 모우먼트	$[\delta \mathbf{d}_i]_n$: 가상 절점 변수의 벡터
M_{xy}	: 비틀림 모우먼트	\mathbf{B}_i	: 변형률-변위 매트릭스
Q_x	: xz 평면에서 전단력	m	: 절점의 총수
Q_y	: yz 평면에서 전단력	$f(t)$: 적용된 힘벡터
\mathbf{D}	: 탄성계수행렬	$\mathbf{X}(t)$: 변위 벡터
G	: 전단탄성계수	$\dot{\mathbf{X}}(t)$: 속도 벡터
E	: 탄성계수	$\ddot{\mathbf{X}}(t)$: 가속도 벡터
ν	: Poisson's 비	\mathbf{M}	: 질량 매트릭스
q	: 단위면적당 분포된 하중	\mathbf{C}	: 감쇠 (damping) 매트릭스
i	: 절점	\mathbf{K}	: 강성 매트릭스
\mathbf{d}_i	: 절점변수의 벡터	$\mathbf{F}(s)$: 적용된 힘벡터의 Laplace변환
$\delta \mathbf{d}_i$: 가상 절점변수의 벡터	$\mathbf{X}(s)$: 변위 벡터의 Laplace변환
\mathbf{N}_i	: Global shape function의 매트릭스	$\mathbf{B}(s)$: $M\mathbf{S}^2 + C\mathbf{S} + K$
\mathbf{B}_i	: Global 변형률-변위 매트릭스	S	: Laplace 변수(복소수)
$\mathbf{N}_i^{(e)}$: 변위 표현에 사용되는 같은 shape function	b	: 다항계수
$\mathbf{B}_i^{(e)}$: 요소 변형률 매트릭스	P_k	: $\det(B(s))=0$ 의 K 번째근
$\mathbf{K}_j^{(e)}$: 요소 강성매트릭스 $\mathbf{K}^{(e)}$ 의 submatrix	a_k	: K 번째근에 대한 residue 매트릭스
ρ_n	: 질량밀도	*	: 공액
C_n	: 감쇠계수	σ_k	: damping coefficient
\mathbf{b}_n	: 적용된 물체력 벡터	ω_k	: natural frequency
\mathbf{t}_n	: 표면항력 벡터	\mathbf{U}_k	: n 차원 복소벡터
$\delta \mathbf{u}_n$: 가상 변위 벡터		
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$: 가상변형률 벡터		

서론

모우드의 해석기술은 컴퓨터의 새로운 해석 기술로서 비약적으로 발전하여 왔다. 최근에는 CAE(Computer Aided Engineering)와 CAT(Computer Aided Testing)를 조합

해서 생산의 중간단계에 모우드 해석기술을 도입하고 있으며 이제 진동해석은 '진동실(연구실)'의 전매특허는 아니며, 설계나 제조엔지니어의 영역에 깊이 관여하고 있다.

최근 구조·진동문제를 다루는 기술자에 의해서는 고성능, 경량화의 요구를 만족하고, 우선 신뢰성이 높은 제품이 도입되기 위해서는, 모우드 해석기술의 적용이 요구되고 있다. 그 기대 효과를 요약하면, 제품개발기간의 단축과 기술 목표의 향상에 있다 이 기술의 응용분야는, 초기의 공작기계나 자동차 등의 양산품에의 적용에서, 현재는 조선, 산업기계, 우주기기, 건축, 토목등의 모든기술 분야에 미치고 있고, 국제적인 IMAC (international Modal Analysis Conference) 가 성대히 개최되는 등, 큰 발전이 기대되고 있는 분야이기도 하다.^{1,2)}

모우드 해석이 FEM과 결합한 것에 의해서 FEM진동해석은 보다 효과적으로 그 응답을 구할 수 있으며, 역으로 모우드 해석도 FEM과 결합한 것에 의해서 그 가치가 크게 증대되고 있다.

한편, 진동실험이 현재와 같이 보급 될 수 있었던 것은 고속 Fourier 변환의 기술이 확립된 적용 H/W 로서의 해석 장치화에 성공한 것과 모우드 해석을 잘 이용하여 진동 특성을 밝혀 내는데 따른 이론의 실현이 그 원인으로 되고 있다.⁴⁾

본 논문에서는 FFT(Fast Fourier Transform)해석기를 이용한 모우드 해석법을 이용하고, 해석 대상 구조물로서는 선박, 해양구조물, 자동차, 비행기 등 대형 구조물에서 가장 기본이 되는 평판을 선택하여 FEM을 이용한 해석과 FFT를 이용한 모우드 해석법에 의한 결과를 비교하고자 한다.

이론해석

1. 판요소의 유한요소 정식화

유한요소법에 의한 판요소를 해석하기 위

해 가상일의 원리를 적용하면 평형 방정식은 다음과 같이 된다.^{9,10)}

판이 물체력 b 를 받으면

$$\int_{\Omega} [\delta \epsilon]^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} [\delta u]^T b d\Omega - \int_{\Gamma_i} [\delta u]^T t d\Gamma = 0 \quad (1)$$

전형적인 Mindlin판은 Fig. 1과 같다.

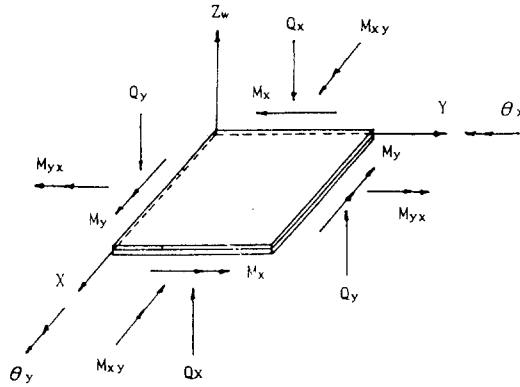


Fig. 1. A typical Mindlin plate

변위는

$$u = [w, \theta_x, \theta_y]^T \quad (2)$$

여기서

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \quad (3)$$

변형률 성분은

$$\epsilon = [\gamma_x, \gamma_y, \gamma_{xy}, \phi_x, \phi_y]^T \quad (4)$$

여기서 곡률

$$\gamma_x = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \gamma_y = -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

그리고 비틀림 곡률

$$\gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)$$

로 되며 전단 변형률은 다음과 같이 된다.

$$\phi_x = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right), \quad \phi_y = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right) \quad (5)$$

가상 변위는

$$\delta \mathbf{u} = [\delta \omega, \delta \theta_x, \delta \theta_y]^T \quad (6)$$

가상 변형율은

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left[\begin{array}{cc} -\frac{\partial(\delta \theta_x)}{\partial x}, & -\frac{\partial(\delta \theta_y)}{\partial y}, \\ -\frac{\partial(\delta \theta_x)}{\partial y} - \frac{\partial(\delta \theta_y)}{\partial x}, & \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta_x, \frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta_y \end{array} \right]^T \quad (7)$$

로 된다. 응력-변형율의 선형관계로 부터

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

이다. 여기서,

$$\boldsymbol{\sigma} = [M_x, M_y, M_{xy}, \theta_x, \theta_y]^T$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)} \quad S = \frac{Gt}{1.2}$$

여기서, 표면력을 고려하지 않을 것이다.

$$\text{물체력 } \mathbf{b} = [q, 0, 0]^T \quad (10)$$

$$\text{평면 요소 면적} : d\Omega = dx dy \quad (11)$$

로 된다.

위의 식으로 부터 변위, 변형율, 가상변위, 가상변형율은 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i, \quad \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \delta \mathbf{d}_i \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \delta \mathbf{d}_i \quad (13)$$

(12), (13)식을 (1)식에 대입하면

$$\sum_{i=1}^n [\delta \mathbf{d}_i]^T \left\{ \int_{\Omega} [\mathbf{B}_i]^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{t} d\Gamma \right\} = 0 \quad (14)$$

로 되고, 여기서

$$\int_{\Omega} [\mathbf{B}_i]^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (15)$$

로 된다.

이제 각 요소에 대해 고려해 보면 변위

$$\mathbf{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^r \mathbf{N}_i^{(e)} \mathbf{d}_i^{(e)} \quad (16)$$

로 되고

단,

$$\mathbf{N}^{(e)} = \mathbf{I} \mathbf{N}^{(e)}$$

Isoparametric 요소를 사용함으로써 요소 내 X-Y좌표에 대해서

$$\begin{bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(e)} \\ y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서 Jacobian 매트릭스는

$$\mathbf{J}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} x_i^{(e)} & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} y_i^{(e)} \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} x_i^{(e)} & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

로 되며

$\mathbf{J}^{(e)}$ 의 역 매트릭스는

$$[\mathbf{J}^{(e)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{J}^{(e)}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (19)$$

변형률-변위 관계에서

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i^{(e)} \mathbf{d}_i^{(e)} \quad (20)$$

분할요소면적은

$$d\Omega^{(e)} = h^{(e)} \det \mathbf{J}^{(e)} d\xi d\eta \quad (21)$$

따라서 각요소내 선형응력-변형률 관계는

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} &= \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\epsilon}^{(e)} \\ &= \mathbf{D}^{(e)} \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{B}_j^{(e)} \mathbf{d}_j^{(e)} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

이므로 (20)식을 (15)식의 첫항에 대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \mathbf{K}_{ij}^{(e)} \mathbf{d}_j^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{B}_j^{(e)}]^\top \\ &\mathbf{D}^{(e)} \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{B}_j^{(e)} \mathbf{d}_j^{(e)} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

식의 둘째, 셋째 각항은

$$\mathbf{f}_{B_i}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{N}_i^{(e)}]^\top \mathbf{b}^{(e)} d\Omega \quad (24)$$

$$\mathbf{f}_{T_i}^{(e)} = \int_{\Gamma_i^{(e)}} [\mathbf{N}_i^{(e)}]^\top \mathbf{t}^{(e)} d\Gamma \quad (25)$$

(단, $\Gamma_i^{(e)}$ 는 Γ_i 의 한부분)

로 되고

운동하는 물체의 동적 평형력을 고려하면 가상일의 원리를 적용하여 재료거동에는 관계없이 time station t_n 에서 관성력과 감쇠력을 고려한 단위체적당 물체력은

$$\mathbf{b}_n - \rho_n \ddot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{u}}_n \quad (26)$$

이므로 (15)식에서

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\delta \boldsymbol{\epsilon}_n]^\top \boldsymbol{\sigma}_n d\Omega - \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}_n]^\top [\mathbf{b}_n - \rho_n \\ \ddot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{u}}_n] d\Omega - \int_{\Gamma_i} [\delta \mathbf{u}_n]^\top \mathbf{t}_n d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

로 된다.

여기서, 첫째 둘째 셋째 각항은 내부저항력, 물체력에 의한 일의 량, 분포 표준 하중이며 변위, 가상변위는 각각

$$\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i [\mathbf{d}_i]_n, \quad \delta \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i [\delta \mathbf{d}_i]_n \quad (28)$$

로 되고, 변형율, 가상변형율은 각각

$$\boldsymbol{\epsilon}_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i [\mathbf{d}_i]_n, \quad \delta \boldsymbol{\epsilon}_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i [\delta \mathbf{d}_i]_n \quad (29)$$

로 되며, 속도, 가속도 성분은 각각

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i [\dot{\mathbf{d}}_i]_n, \quad \ddot{\mathbf{u}}_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i [\ddot{\mathbf{d}}_i]_n \quad (30)$$

과 같다.

여기서 (28), (29), (30)식을 (27)식에 대입하면 내부저항력은

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\delta \boldsymbol{\epsilon}_n]^\top \boldsymbol{\sigma}_n d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i [\delta \mathbf{d}_i]_n \right)^\top \boldsymbol{\sigma}_n d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^m [\delta \mathbf{d}_i]_n^\top \int_{\Omega} [\mathbf{B}_i]^\top \boldsymbol{\sigma}_n d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^m [\delta \mathbf{d}_i]_n^\top [\mathbf{P}_i]_n \end{aligned} \quad (31)$$

로 되고, 물체력 적용에 의한 힘은

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}_n]^\top \mathbf{b}_n d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i (\delta \mathbf{d}_i)_n^\top \mathbf{b}_n d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^m (\delta \mathbf{d}_i)_n^\top \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^\top \mathbf{b}_n d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^m [\delta \mathbf{d}_i]_n^\top [\mathbf{f}_{B_i}]_n \end{aligned} \quad (32)$$

로 되며, 관성력은

$$\int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}_n]^\top \rho_n \ddot{\mathbf{u}}_n d\Omega$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i [\delta \mathbf{d}_i]_n \right)^T \rho_n (\sum \mathbf{N}_i [\dot{\mathbf{d}}_i]_n) \\
 &= \sum [\delta \mathbf{d}_i]_n^T \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^T \rho_n (\sum \mathbf{N}_i [\dot{\mathbf{d}}_i]_n) d\Omega \\
 &= \sum [\delta \mathbf{d}_i]_n^T \sum_{i=1}^m [\mathbf{M}_{ij}]_n [\dot{\mathbf{d}}_i]_n \\
 &= \sum [\delta \mathbf{d}_i]_n^T [\mathbf{f}_{i_i}]_n \quad (33)
 \end{aligned}$$

감쇠력은

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}_n]^T \mathbf{C}_n \mathbf{u}_n d\delta \\
 &= \int_{\Omega} (\sum \mathbf{N}_i [\delta \mathbf{d}_i]_n^T) \mathbf{C}_n (\sum \mathbf{N}_j [\mathbf{d}_j]_n) d\Omega \\
 &= \sum [\delta \mathbf{d}_i]_n^T \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{C}_n (\sum \mathbf{N}_j [\mathbf{d}_j]_n) d\Omega \\
 &= [\delta \mathbf{d}_i]_n^T \sum_{j=1}^m [\mathbf{c}_{ij}]_n [\mathbf{d}_j]_n \\
 &= [\delta \mathbf{d}_i]_n^T [\mathbf{f}_{D_i}]_n \quad (34)
 \end{aligned}$$

경계표면항력(traction boundary force)에 의한 consistent force는

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} [\delta \mathbf{u}_n]^T \mathbf{t}_n d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} (\sum \mathbf{N}_i [\delta \mathbf{d}_i]_n^T) \mathbf{t}_n d\Gamma \\
 &= \sum (\delta \mathbf{d}_i)^T \int_{\Gamma} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{t}_n d\Gamma \\
 &= \sum (\delta \mathbf{d}_i)^T \int_{\Gamma} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{t}_n d\Gamma \\
 &= \sum (\delta \mathbf{d}_i)^T [\mathbf{f}_{T_i}]_n \quad (35)
 \end{aligned}$$

(31), (35)식을 (27)식에 대입하면

$$[\mathbf{P}_i]_n - [\mathbf{f}_{B_i}]_n + [\mathbf{f}_{T_i}]_n + [\mathbf{f}_{D_i}]_n - [\mathbf{f}_{T_i}]_n = 0 \quad (36)$$

(2.1.16)식으로 부터의 변위는

$$[\mathbf{u}^{(e)}]_n = \sum_{i=1}^r \mathbf{N}_i^{(e)} [\mathbf{d}_i^{(e)}]_n$$

로 되고 변형률-변위관계에서

$$[\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}]_n = \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i^{(e)} [\mathbf{d}_i^{(e)}]_n \quad (37)$$

로 되며, 식에서 분할한 요소의 면적은

$$d\Omega^{(e)} = h^{(e)} \det \mathbf{J}^{(e)} d\xi d\eta$$

로 된다.

2. 고유치 문제

유한요소의 계에 대한 선형동적응답을 지배하는 등가방정식은

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (38)$$

모우드 중첩법은 유한요소 절점 변위 \mathbf{U} 를 다음과 같은 변환을 사용함으로써 직접 적분보다 더욱 효과적으로 등가방정식을 구할 수 있다.^{11,15)}

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{P}\mathbf{X}(t) \quad (39)$$

여기서, \mathbf{P} 는 square 매트릭스이고 $\mathbf{X}(t)$ 는 n 차의 시간종속 벡터이다. (39)식을 (38)식에 대입하고 앞에 \mathbf{P}^T 를 곱하면

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{X}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{R}}(t) \quad (40)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}, \\
 \tilde{\mathbf{R}} &= \mathbf{P}^T \mathbf{R} \quad (41)
 \end{aligned}$$

일반화된 변위의 항을 요소변위의 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{U}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \tilde{\mathbf{U}} \quad (42)$$

여기서, $\mathbf{H}^{(m)}$ 은 displacement interpolation matrix이고 위첨자 m 은 요소를 나타낸다.

\mathbf{U} 는 모든 절점에서 세가지 전체변위성분 $\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i$ 의 벡터. (39)식을 (42)식에 대입하면

$$\mathbf{U}^{(m)}(x, y, z, t) = \mathbf{H}^{(m)} \mathbf{P}\mathbf{X}(t) \quad (43)$$

한편, (38)식에서 비감쇠 자유진동을 고려하면

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (44)$$

이 되고 (44)식의 해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$U = \phi \sin \omega(t - t_0) \quad (45)$$

여기서 ϕ 는 n 차의 벡터이고, t 는 시간변수, t_0 는 시간상수, ω 는 진동수이다. (45)식을 (44)식에 대입하면 ϕ 와 ω 를 결정함으로써 일반화된 고유치 문제를 구한다.

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (46)$$

(44)식은 어떤 n 변위의 해 $\phi_i \sin \omega_i(t - t_0)$, $i=1, 2, \dots, n$ 을 사용하여 만족되어야 한다.

따라서 고유벡터의 ϕ_i 의 열매트릭스와 고유치 ω_i^2 의 대각매트릭스 λ 를 정의하면

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n];$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

그러므로 (46)식을 다시쓰면

$$K\Phi = M\Phi \lambda \quad (48)$$

매트릭스 Φ 는 (39)식에 처럼 적당한 변환 매트릭스 P 와 같이 사용하면

$$U(t) = \Phi X(t) \quad (49)$$

그러므로 (38)식에서 (49)식을 대입하면

$$\ddot{X}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{X}(t) + \lambda X(t) = \Phi^T R(t) \quad (50)$$

(48)식에서 일반화된 고유치 문제는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (51)$$

여기서

K : 유한요소에 대한 stiffness 매트릭스

M : 유한요소에 대한 mass 매트릭스

이다.

고유치 λ 는 자유진동의 진동수 ω^2 이고 고유벡터 ϕ 는 모우드 shape 벡터이다.

(51)식으로부터 고유치 특성을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(K - \lambda N)\phi = 0 \quad (52)$$

그러므로

$$(K - \lambda M) = 0 \quad (53)$$

여기서 고유치 λ 를 구하고 이 고유치 λ 로부터 고유모우드 ϕ 가 얻어진다. 이 해를 구하는 방법에는 여러 가지가 있지만 여기서는 유한요소법을 사용하였다.

3. 디지털 실험 장치를 이용한 모우드 해석

(1) 동적 구조물 모델

동적구조계의 운동 방정식은 다음과 같다.^{1,2)}

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (54)$$

방정식 (54)를 Laplace 변환을 취하면

$$B(s)X(s) = F(s) \quad (55)$$

여기서,

$$B(s) = MS^2 + CS + K \quad (55)$$

전달 매트릭스 $H(s)$ 는 계 매트릭스 $B(s)$ 의 역매트릭스로 표시된다. 즉

$$H(s) = B(s)^{-1} \quad (56)$$

그러므로 방정식 (55)로부터 $H(s)$ 는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$X(s) = H(s)F(s) \quad (57)$$

전달 매트릭스의 각 요소는 전달함수이고 n 차원계에 대해서 $H(s)$ 는 $n \times n$ 매트릭스이고 다음과 같이 쓸수 있다.

$$H(s) = \begin{pmatrix} h_{11}(s) & \dots & h_{1n}(s) \\ \dots & h_{jj}(s) & \dots \\ h_{m1}(s) & \dots & h_{nn}(s) \end{pmatrix} \quad (58)$$

(2) 진동 모우드

진동 모우드는 수학적 향으로 정의되고 전달 매트릭스가 모우드 진동수, 감쇠와 모우드 벡타의 향으로 표시할 수 있다.

계 매트릭스 $B(s)$ 의 요소는 Laplace 변수 (s) 의 2차 함수이고 전달 매트릭스 $H(s)$ 는 계 매트릭스 $B(s)$ 의 Inverse로서 정의되기 때문에 전달 매트릭스 $H(s)$ 의 ij 번째 요소는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$h_{ij}(s) = \frac{b_1 s^{2n-2} + b_2 s^{2n-1} + \dots + b_{2n-1} s + b_{2n-2}}{\det(B(s))} \quad (59)$$

$\det(B(s))$ 의 근들이 명백하다고 가정한다면 $H(s)$ 는 부분분수의 형태로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$H(s) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{ak}{s-p_k} \quad (60)$$

근 P_k 는 전달함수의 극으로서 언급되고 계가 임계 감쇠일때 그 극은 복소수이고 공액 복소수에서 일어난다. 극에 대한 각 공액 복소수 쌍은 구조물에서 진동 모우드에 대응하고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_k = -\sigma_k + j\omega \quad P_k^* = -\sigma_k - j\omega k \quad (61)$$

s -plane에서 극좌표를 가진 이러한 매개변수들은 아래 Fig. 2에서 보여준다.

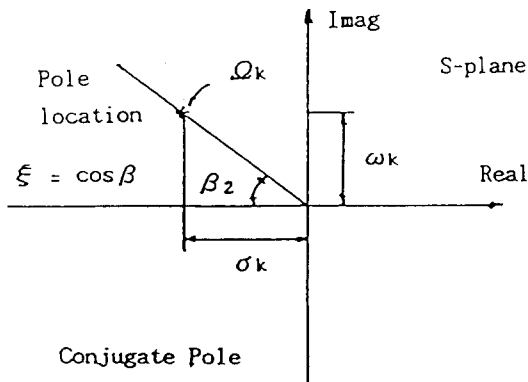


Fig. 2. Poles of a Mode(k).

공진 진동수는 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega_k = \sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2} \quad (62)$$

그리고 감쇠계수 혹은 임계감쇠는 다음과 같이 주어진다.

$$\xi_k = \sigma_k / \omega_k \quad (63)$$

$\xi_k = 1$ 일때 모우드(K)는 임계감쇠이고 $\xi_k < 1$ 일때 모우드(K)는 부 임계감쇠이다.

모우드 벡타(U_k)는 제차 방정식에 대한 해로서 정의된다.

$$B(P_k) U_k = 0 \quad (64)$$

위와 같은 방법으로 정의되었을때 전달 매트릭스는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$H(s) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k U_k U_k^T}{s - P_k} \quad (65)$$

모우드(K)에 대한 모우드 유수 매트릭스 a_k 는 모우드 벡타 U_k 의 향으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_k = A_k U_k U_k^T \quad (66)$$

한편, 전달 매트릭스는 (n) 공액쌍의 합으로서 다음과 같이 쓸수 있다.

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{u_k u_k^T}{s - p_k} + \frac{u_k^* u_k^{*T}}{s - p_k^*} \right] \quad (67)$$

(67)식의 Σ 에서 각항은 전달 매트릭스에 대한 각 모우드(K)의 기여를 표현하는 $n \times n$ 매트릭스 이다.

전달 매트릭스의 오직 하나의 행과 열은 구조물의 모든 매개변수들을 알기 위하여 측정되는 것에 다음 가정들이 필요하다.

가정 ;

- a. 운동의 대칭 혹은 상호 특성은 명백하다. (즉 B 와 H 매트릭스는 대칭)
- b. 단지 하나의 모우드는 계 전달 매트릭스

에 대한 각 극위치에 존재하다.

극위치 P_k 와 유수 매트릭스 a_k 의 하나의 행과 열은 측정된 전달함수 데이터의 하나의 행과 열로부터 상호 알려진다.

모우드 벡타는 일반적으로 복소수 값으로 된다.

모우드 벡타가 실수로 될때 그들은 모우드의 등가이다.

단일 모우드(K)에 대한 전달 매트릭스는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$H_k(s) = \frac{a_k}{s - p_k} + \frac{a_k^*}{s - p_k^*} \quad (68)$$

$H_k(s)$ 의 성분은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$h(s) = \frac{r_k}{2i(s - p_k)} - \frac{r_k^*}{2i(s - p_k^*)} \quad (69)$$

식 (69)의 전달함수의 역 Laplace변환은 Model(k)의 Impulse 응답이다.

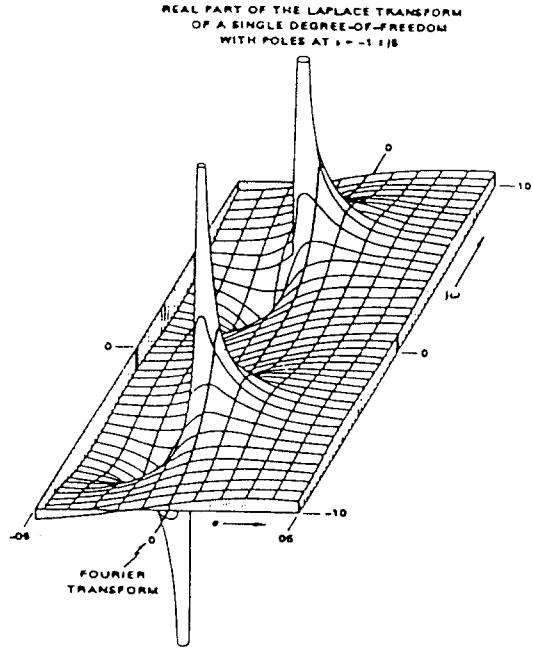


Fig. 3. Real Part of a Transfer Function

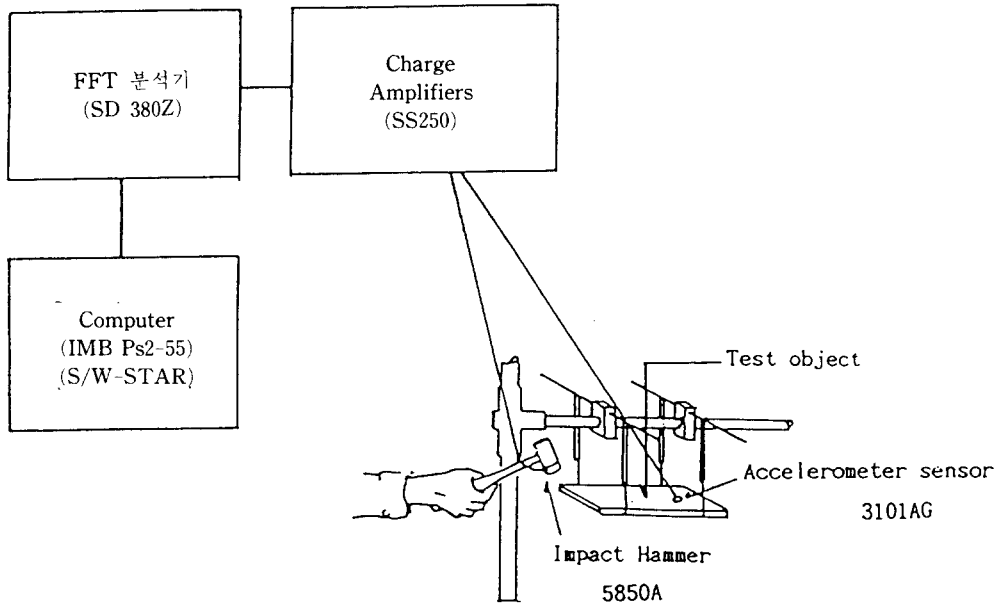


Fig. 4. Experimental apparatus for modal analysis

4. 실험장치 및 방법

Fig. 4는 실험장치의 개략도를 나타내고 있으며 본실험에 사용된 시편은 직사각형 강판을 사용하였다.

시편은 길이 35.6 cm, 폭 25.6 cm, 균일한 두께 0.13 cm를 갖는 직사각형 강판이고 양 끝을 받친 고무줄은 강판에 거의 영향을 주지 않는 것으로 가정하였다.

실험에 사용된 스테인레스 강판의 촌법은 Table 1과 같다.

Table 1. Specifications of the plate

Length	35.6 cm
Breadth	25.6 cm
Thickness	0.13 cm
Yong's Modulus(E)	$2.09 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
Mass Density(ρ)	$8.027 \times 10^{-6} \text{ kg sec}^2/\text{cm}^4$
Poisson's Ratio(ν)	0.3

실험방법은 Fig. 5과 같이 요소를 x 방향으로 5개, y 방향으로 5개로 분할하고 절점을 주어 16 절점에 가속도 센서를 부착하고 1절점부터 36 절점까지 차례로 Impact Hamer로 충격을 주어 응답을 측정하였다.

경계조건은 양단자유로 하기 위해서 강판에 거의 영향이 미치지 않도록 Fig. 5와 같이 고무줄로 받혀 놓았다.

측정기기는 FFT 분석기를 사용하였고

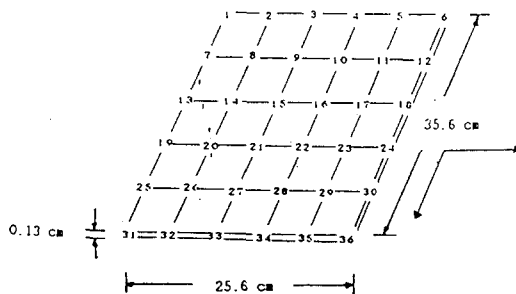


Fig. 5. Partition and measurements of test object

FFT 분석기에서 측정된 전달 함수를 동적구조물 응답해석 프로그램을 이용하여 수치해석을 하였다.

해석 결과 및 고찰

본 논문에서의 시편은 길이 35.6 cm, 폭 25.6 cm, 두께가 0.13 cm의 균일한 얇은 직사각형 강판을 이용하였으며, Mesh는 가로, 세로 모두 5등분하였다.

유한 요소법에 의하여 계산한 결과를 먼저 고찰하고 FFT분석기를 이용하여 산출되는 결과와 비교하였다. FFT분석기를 이용한 결과와 FEM을 이용한 결과는 FEM을 이용한 결과는 Table 2에서 보여주고 있고 FFT분석기에서의 매개변수는 Table 3에서 보여주고 있다.

FFT분석기는 구조물을 테스트하는데 기진기와 Impact Hammer를 이용하는 두가지 방법이 있는데, 여기서는 한 고정된 절점에 응답 센서를 부착하고 1절점부터 30절점까지 차례로 Impact Hammer를 이용하여 힘을 가하여 응답을 측정하였다.

전달함수를 측정하여 컴퓨터를 이용하여 해석한 다음 각 모드에 대한 모우드를 Fig.

Table 2. Comparison of FEM and modal test results

(Unit: Hz)

Vibration mode	Modal Analysis experiment	F. E. M
1	67.45	63.24
2	125.48	119.21
3	183.28	201.67
4	240.19	280.17
5	328.92	377.32
6	345.14	422.41
7	385.91	481.74
8	473.01	596.05

결 론

Table 3. Modal parameter test results

Mode	Freq. (Hz)	Damp. (Hz)	Damp. (%)	Mag.
1	67.45	1.69	2.50	419.23
2	125.48	1.68	1.50	1.29K
3	183.28	1.08	588.28m	1.35K
4	240.19	1.70	709.43m	3.40K
5	328.92	3.29	1.00	257.07
6	345.14	2.03	586.83m	820.66
7	385.91	1.27	328.29m	1.61K
8	473.01	1.57	332.21m	3.02K

7-Fig. 14에 보이며, 전달함수 그래프를 Fig. 15-Fig. 30에 첨가하였다.

실험에 있어서 여러가지 오차 즉 경계조건
의 부정확성, 기계적인 Noise등에 의하여 실제 이론치와는 약간의 차이가 있다는 것을 알수 있다.

1. 본 논문에서 제안한 실험 모우드 해석
법과 FEM해석법에 의한 탄성판 구조물의 진
동응답 결과의 경향이 잘 맞고 있음을 미루
어 보아 해석 대상으로 하는 기계나 구조물
의 진동 특성이나 동적응답을 이론적 또는
실험적으로 규명하는데 이용할 수 있으며 방
진이론 또는 기술에 관한 분야에 적극 활용
할 수 있는 것으로 사료된다.

2. 실험에 의한 결과와 FEM에 의한 결과
가 약간의 차이를 보이는 것은 경계조건
의 부정확성과 실험과정에서 기계적인 오차들과
Noise유입등 여러가지 오차로 인하여 발생한
결과라고 생각된다.

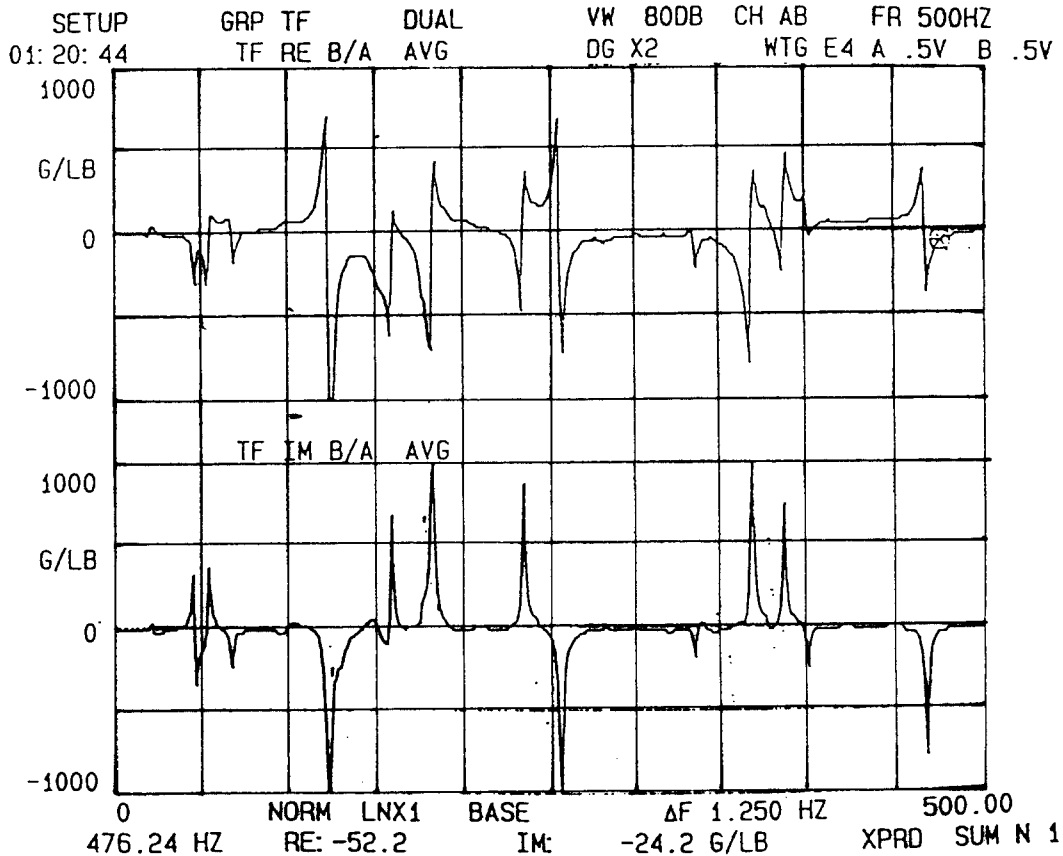


Fig. 6. Graph of transfer function

3. 실험적인 모달 파라메타를 구하기 위해서, 특히 구조적인 비선형성이 강한 계로 적용하는 데에는, 현재로서는 유효한 방법이 아직 확립되지 있지 않지만 탄성체로의 모달

파라메타를 추정하고, 여기에 비선형의 부분만을 가한 해석 모델에 의해서 동 특성을 표시하는 방법이 고려 되었으며 이후 발전이 기대되는 분야이기도 하다.

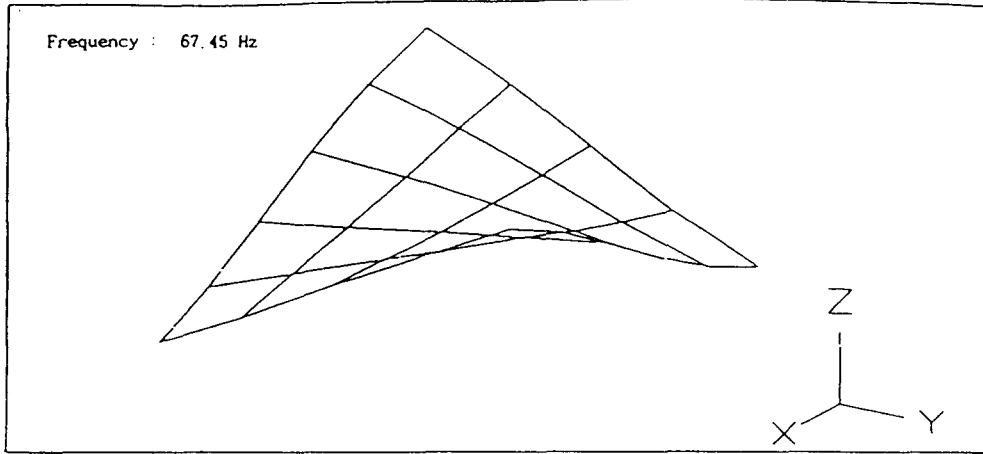


Fig. 7. 1st vibration mode

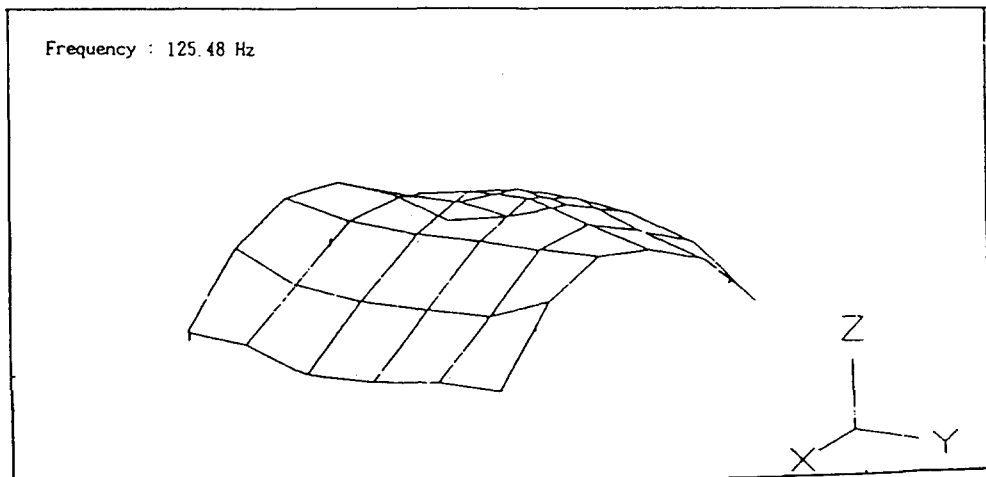


Fig. 8. 2rd vibration mode

디지털 實驗裝備를 利用한 板의 모우드 해석

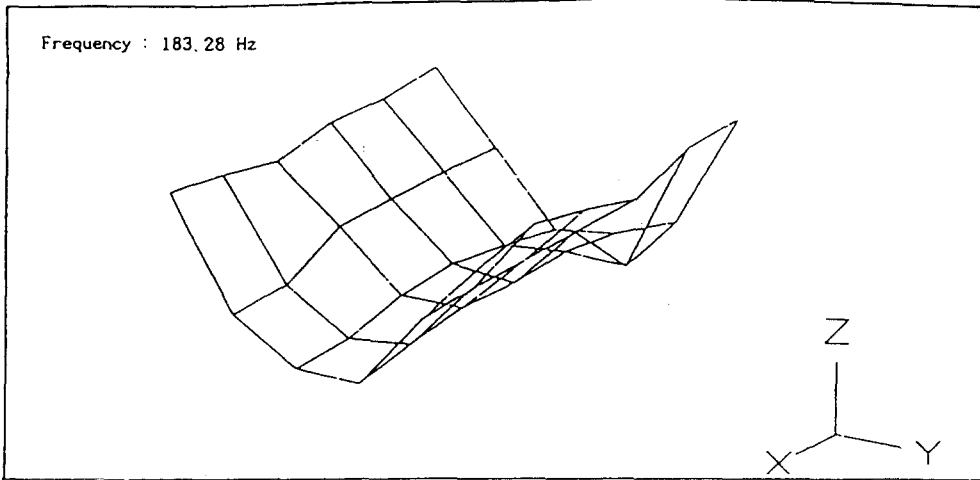


Fig. 9. 3rd vibration mode

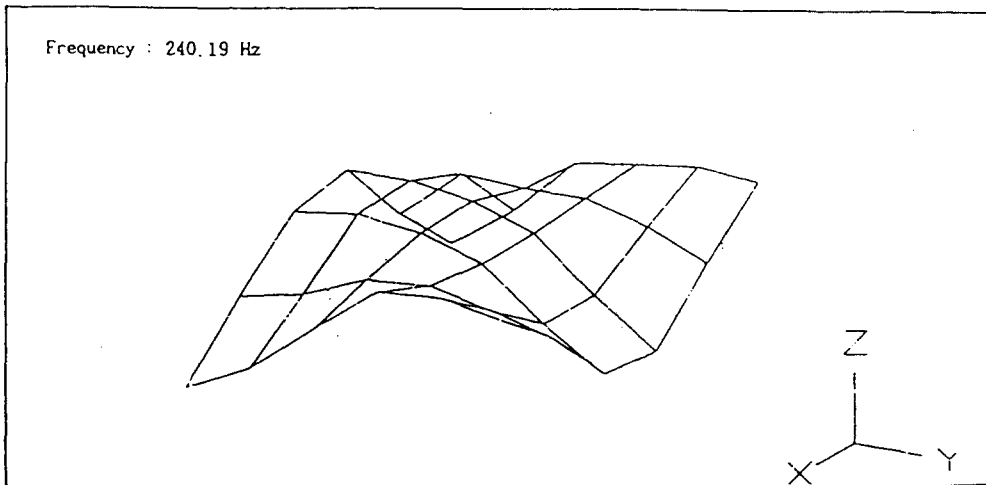


Fig. 10. 4th vibration mode

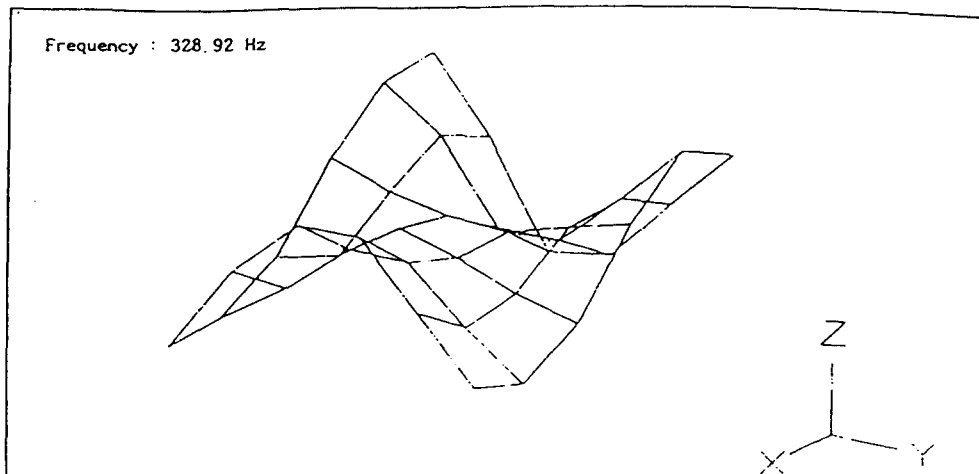
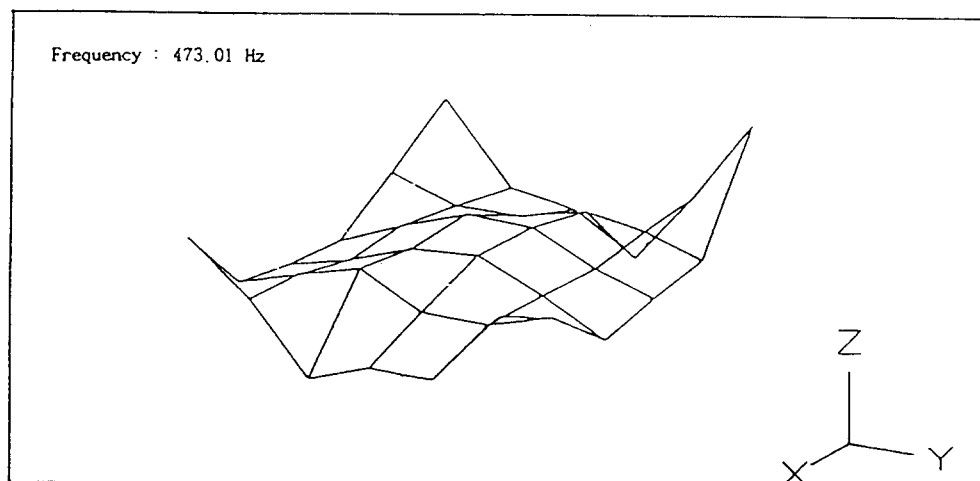
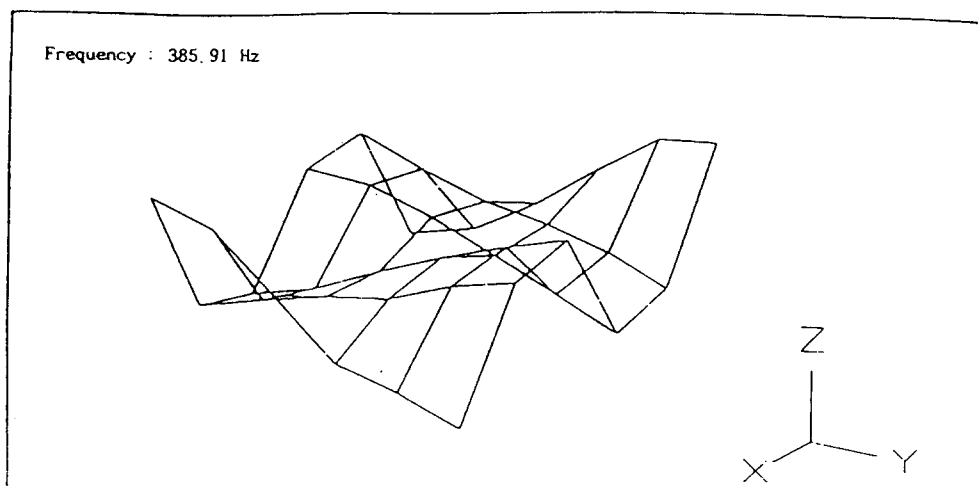
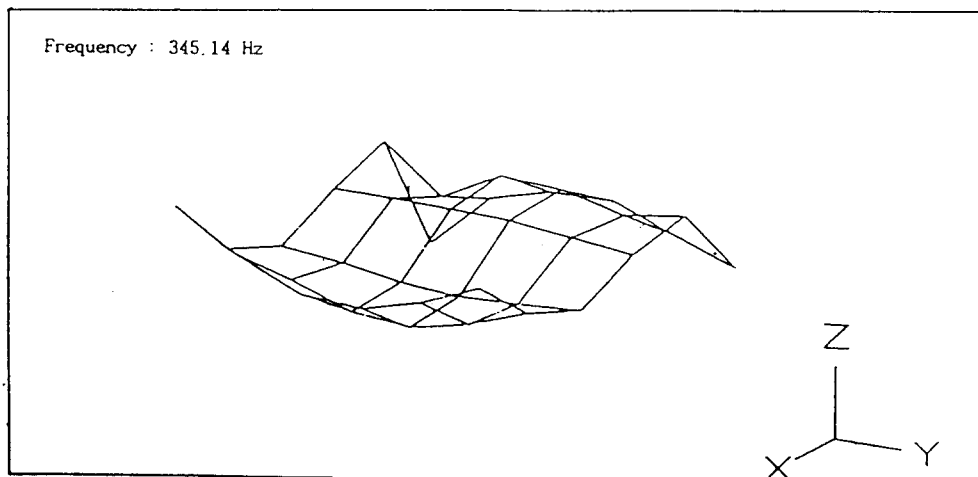


Fig. 11. 5th vibration mode



디지털 實驗裝備를 利用한 板의 모우드 해석

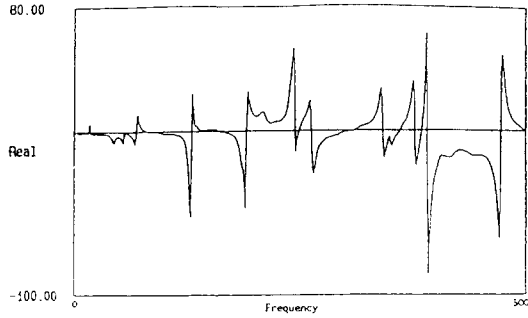


Fig. 15. Real of transefer function at 1 point

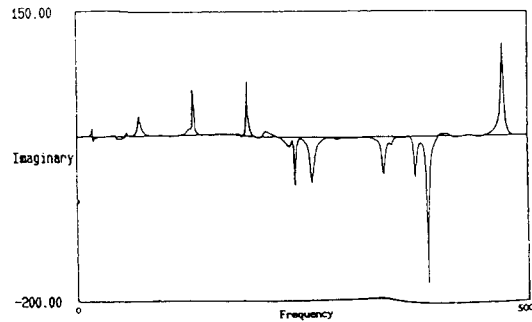


Fig. 16. Imaginary of transefer function at 1 point

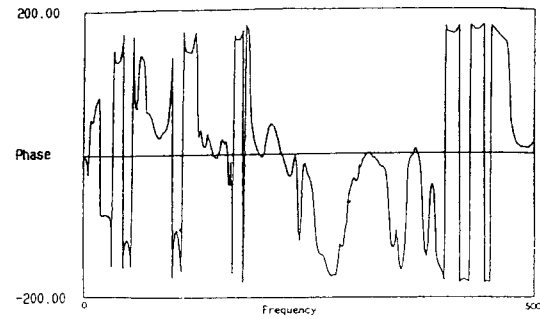


Fig. 17. Phase of transefer function at 1 point

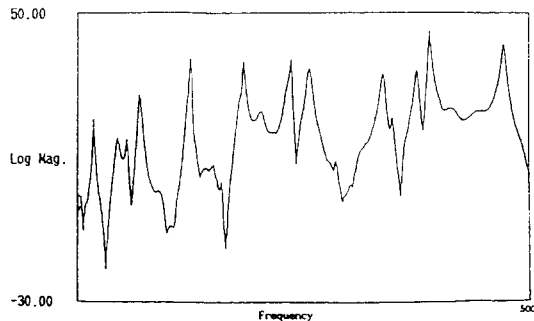


Fig. 18. Log magnitude of transefer function at 1 point

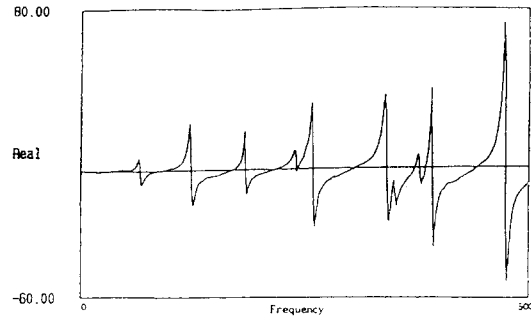


Fig. 19. Real of transefer function at 16 point

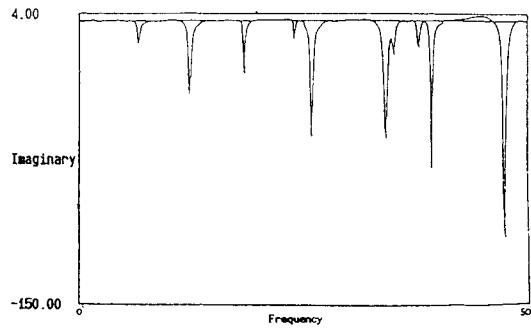


Fig. 20. Imaginary of transefer function at 16 point

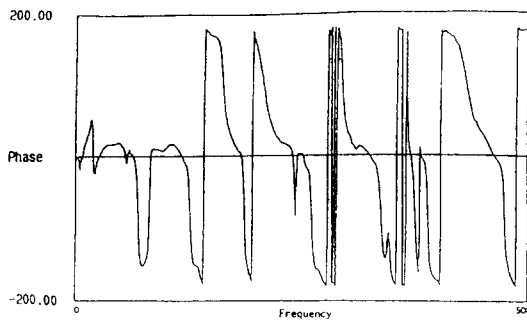


Fig. 21. Phase of transefer function at 16 point

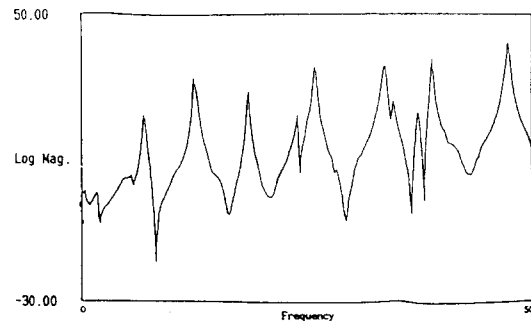


Fig. 22. Log magnitude of transefer function at 16 point

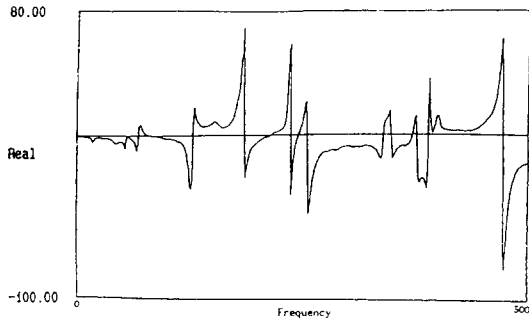


Fig. 23. Real of transefer function at 36 point

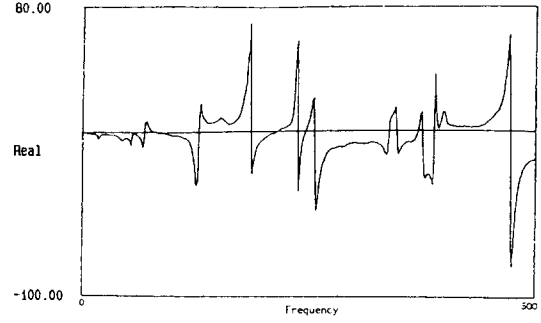


Fig. 27. Real of transefer function at 36 point

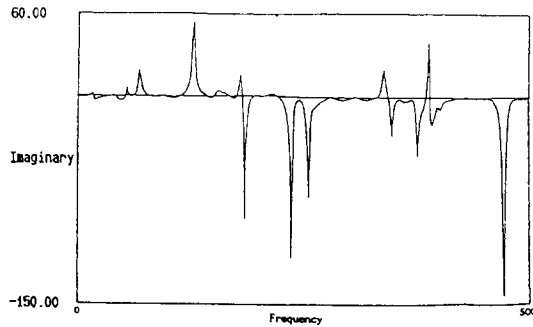


Fig. 24. Imaginary of transefer function at 36 point

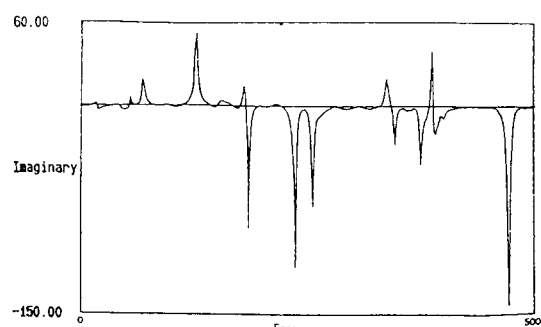


Fig. 28. Imaginary of transefer function at 36 point

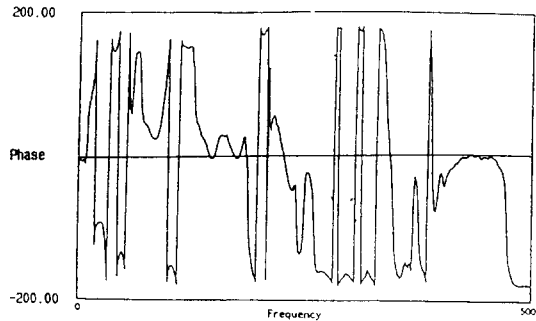


Fig. 25. Phase of transefer function at 36 point

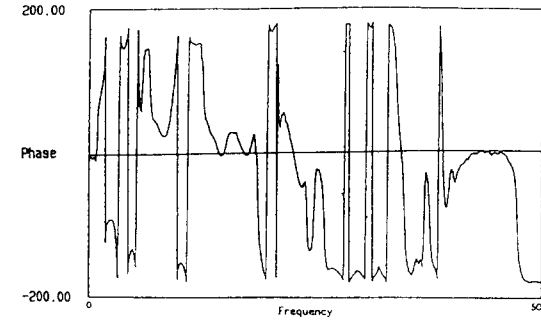


Fig. 29. phase of transefer function at 36 point

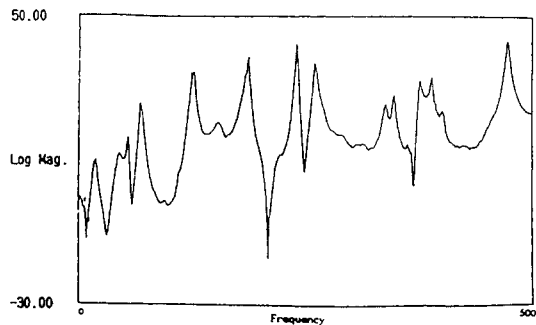


Fig. 26. Log magnitude of transefer function at 36 point

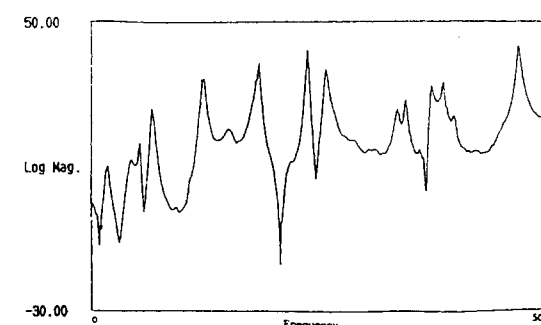


Fig. 30. Log magnitude of transefer function at 36 point

참고문헌

- 1) Structural Measurement SYS., INC. (1988) : Practical Aspects of Modal Analysis, Course Notes and Reference Materials Seminar.
- 2) M. Richardson(1989) : Modal Analysis using Digital Test Ssystems. Report of H-P Comp. 43-64.
- 3) C.T.F. ROSS(1991) : Finite Elements Prog. for Structural Vibration, Springer-Verlag.
- 4) D.J. Ewing(1984) : Modal Testing : Theory and Practice, Research Studies Press, 1-246.
- 5) 男松昭男(1985) : 모드 解析, 培風館.
- 6) 梅村直(1986) : 모드 解析技術と 其의 應用, 日本造船振興財團, 602-632.
- 7) S.D. STEAMS(1975) : DIGITAL SIGNAL ANALYSIS, HAYDEN BOOK CO., INC.
- 8) 加川辛雄, 石川正臣(1987) : 모-탈 解 析 入門, 오-ム社 35-96.
- 9) D.R.J. Owen and E. Hinton(1980) : Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, 158-214.
- 10) S.S. Rao(1982) : The Finite Element Method in Engineering, Pergamon Press, 245-417.
- 11) K.J. Bathe(1982) : Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 66-300.
- 12) 川井忠彦(1970) : 매트릭스 法 振動 および 應答, 培風館, 197-220.
- 13) 栖原二郎(1970) : 平板 의 曲 げ 異論, 培風館, 1-143.
- 14) Werner Soedel(1981) : Vibrations of Shells and Plates, Marcel Dekker, 8-41, 62-89.
- 15) Ray W. Clough and Joseph Penzien (1975) : Dynamics of Structures, McGraw-Hill International Editions, 1-386.
- 16) 小泉孝之(1987) : 콘히코-타利用 모-트 解析に における 先端技術, 日本機械學 會 關西支部 第147回 講習會, 95-104.