

연성경계요소법에 의한 개방된 관의 음장 해석

Acoustic Field Prediction of Open Pipe by Using Coupled Boundary Element Method

배 정 용*, 이 정 권*
(Jeong-Yong Bae*, Jeong-Guon Ih*)

요 약

불규칙한 기하구조 및 기하학적 특이점들을 갖는 방사체에 의해 형성되는 음장을 예측하는 작업은 매우 어려운 일이다. 이러한 종류의 문제를 해결하기 위하여는 Seybert에 의해 제창된 내·외부를 연성하여 해석하는 경계요소법에 의한 해석이 유용하다고 여겨지고 있다. 본 연구에서는 연성경계요소법을 재 구성하여 예제로서 얇은 벽면을 갖는 개방된 관에서 방사되는 음장을 선택한 후, 이 방법의 신뢰성, 적용성 및 오차에 대한 해석을 행한다. 외부 방사 문제에 있어서의 비유일성문제는 소위 CHIEF 기법을 도입하여 해결하였다. 두개의 마이크로폰을 사용하여 신호처리를 통한 실험 결과와 본 경계요소법에 의한 결과는 서로 잘 일치하였다. 한편, 경계면에 몹시 가까운 지점에서의 음장을 예측할 때의 오차 해석을 수행한 결과, 예측 오차가 10% 이내에서 유지되려면 경계요소법의 가장 짧은 변의 길이가 예측점과 벽면 사이의 거리보다 최소한 10배 이상은 커야함을 알아내었다. 이 기법은 기하학적인 특이점을 포함하는 각종 음향 문제에 매우 유효 적절한 방법으로 생각된다.

ABSTRACT

It is very hard to predict acoustic fields generated from vibrating structures with arbitrarily shaped geometry and singularities. To sort out the problem, a scheme proposed by Seybert using the coupled interior/external boundary element method is adopted. In this study, the coupled boundary element method (CBEM) is reformulated and checked for its reliability and applicability by applying into the case of the sound radiation from an open pipe with very thin walls. The CHIEF method is utilized to overcome the nonuniqueness problem. A reasonably good agreement is obtained between experimental results by two-microphone method and theoretical ones. In addition, an error analysis is performed in the prediction of sound field near to the surface. It is found that the element size should be ten-fold greater than the separation distance of the field point from the wall to come up with the error within 10%. The method is found to be very suitable for solving the acoustic problems with geometric singularities.

I. 서 론

사회의 고도화 추세에 의해 자동차나 가전제품과 같이 일상 생활에서 가까이 사용되는 기계류가 증가

되고 있다. 이에 따라, 일상 생활을 영위하는데 있어서 기계소음의 중요성이 강조되고 있으며 제작자에게는 소음문제에 대한 보다 체계적인 제어 기술이 상품의 경쟁력 확보를 위해 요구되고 있다. 최대, 최적의 소음제어를 위하여는 가장 기본적으로 대상체에 대한 레벨, 방향성, 음원 특성, 방사 음장 등의 각종 음향 특성들에 관한 정보를 알고 있어야 하며, 설

* 한국과학기술원 기계공학과 소음진동제어 연구 센터
접수일자: 1993년 3월 26일

계 단계나 개발 및 조치 단계에서 이에 대한 정확한 예측을 할 수 있어야 한다.

해석적 해결 방법이 불가능한 임의 형상의 물체를 포함하는 음향학적 문제의 해결을 위하여 수치해석적 방법인 유한차분법^[1,2], 경계 적분방정식법(boundary integral equation method)^[3,5], 유한요소법^[6,8] 등이 활용되어 왔는데, 특히 최근에는 유한요소법에서의 형상 함수 개념과 경계 적분방정식법에서 사용하는 Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식을 이용한 경계요소법^[10,11]이 효과적으로 이용되고 있다. 경계요소법은 무한대에서의 방사 경계조건을 정확하게 적용할 수 있고, 문제의 차원을 줄일 수가 있어서 매우 효율적이다. 그러나, 전체 시스템이 큰 경우에는 경제적인 계산 알고리즘의 적용이 불가능한 가장 일반적인 복소 행렬을 다루어야 하므로, 대상 물체와 관련된 행렬들이 밴드를 가지며 또 대칭인 경우가 많은 유한요소법에 비하여 행렬 연산면에서 효율성이 다소 떨어진다^[6].

단일영역(single domain)의 경계요소법은 물체의 내부, 외부 및 연성된 부분 등 모든 영역을 한 번에 이용할 수 있는 경계로서 규정지어 해석하는 방법을 의미한다. 그런데, 실제문제에 경계요소법을 적용할 때에는 내부 음장과 외부 음장이 음향학적으로 연성된(acoustically coupled) 경우가 많으며, 이러한 경우는 대부분 경계면에서 특이점(geometric singularity)들이 존재하여 음장 해석에 오차를 유발한다. 즉, 단일영역으로 만든 경계요소법은 음상내에 존재하는 얇은 평판의 가장자리 부근과 같이 기하학적 특이성을 갖는 물체의 경우, 그 기하학적 특이성의 수치적 모사를 위하여 특이요소(singular element)를 도입하는 등 적용에 특별한 노력과 주의물 요하게 된다. 대표적인 예로서는, 일부분이 개방된 물체의 내부에서 외부로의 음향방사, 소음기 내부와 같이 얇은 직벽에 의해 여러개의 부분영역(subdomain)으로 분리된 경우 등이 있다. 기존의 해석방법에서는 관심이 있는 영역에서 연성이 일어나는 부분의 경계조건을 음향임피던스로 부여함으로써 관심이 없는 영역의 해석을 배제하였지만, 실제의 경우 연성부의 음향임피던스는 저주파 영역에서만 근사값일 경우가 많으므로 정확한 해석이 어려워지며, 따라서 주파수대역에도 제한을 받게 된다. 그러므로, 이러한 불규칙한 형상의 물체에 경계요소법을 적용하고자 할 때에는 새로운 기법이 요구된다. 본 연구에서는 계를 두 개 이상의 부분영역으로 나누고, 각각의 부분영역에서 서로 독립적으로 수식화한후 개방부에서의 경계조건을 이용하여 전체계를 수식화하는 기법인 연성 경계

요소법(Coupled BEM : CBEM)^[11]을 응용하여 음향학적 연성계 및 그에 관련된 기하학적으로 특이한 물체에 대해 음상해석을 수행하고자 한다.

개발된 연성 경계요소법의 정확도 및 적용성을 검증하기 위하여, 정확한 이론적해는 구하기 매우 힘들지만 실험적으로 잘 알려진 한쪽이 개방된 관의 음장을 예제로 선택하여, 실험을 통하여 CBEM 결과와 비교한 후 그 적용성을 검토한다.

II. 연성된 경계 요소법

(1) Kirchhoff-Helmholtz 적분 방정식

조화운동의 경우 Helmholtz 방정식은 다음과 같이 표현된다 :

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (1)$$

여기서, p는 음압, k는 파수이다. 잘 알려진 기하형태 및 좌표계에 대하여는 식(1)의 해가 해석적으로 구할 수 있으나, 임의의 형상에 대해서는 해석적으로 구하기 매우 어려운 일이므로, Green 함수를 도입하여 임의의 위치에서의 음압을 Helmholtz 적분방정식으로 표현한다. Fig.1에서 영역 V가 표면 S₀와 Δ로 이루어 졌다고 하고, S₀는 음원의 표면, Δ는 원점에서 멀리 떨어진 가상의 표면이라 한다. 이 때, 3차원

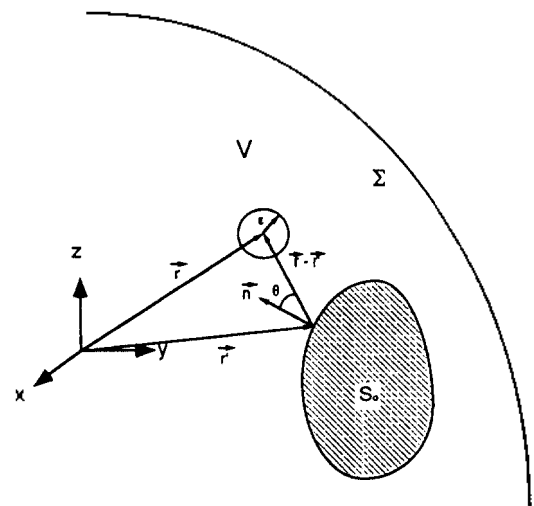


그림 1. Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식의 기하학적 개념도.

Fig 1. Geometric notation for Kirchhoff-Helmholtz integral equation.

자유음장 Green 함수 $G(r, r')$ 는

$$(\nabla^2 + k^2)G(r, r') = -4\pi\delta(r-r') \quad (2)$$

을 만족하며,

$$G(r, r') = \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad R = |r-r'| \quad (3)$$

로 정의된다. 여기서 R 은 S 혹은 영역 V 내에 존재하는 r 과 r' 사이의 거리를 나타낸다. 확장된 Green 정리에 의하여, 특이점 ($r=r'$)을 제외한 영역 V 내에서 해석적이고 연속인 두 함수 ϕ 와 φ 에 대하여

$$\int_V [\phi(\nabla^2 + k^2)\varphi - \varphi(\nabla^2 + k^2)\phi] dV = \int_S \left[\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS \quad (4)$$

인 관계를 얻을 수 있다. 식(3)의 $G(r, r')$ 과 식(1)의 $p(r)$ 을 식(4)의 ϕ 와 φ 에 대입하고, Sommerfeld 방사조건^(18,19)을 적용하여 정리하면

$$c(r)p(r) = \int_{S_0} \left[p(r_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) - \frac{\partial p(r_0)}{\partial n} \frac{e^{-ikR}}{R} \right] dS \quad (5)$$

인 Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식을 얻을 수 있다. 여기서,

$$c(r) = \begin{cases} 4\pi : r \text{이 외부에 있을 때} & (\text{외부점}) \\ 2\pi : r \text{이 경계면위에 있을 때} & (\text{표면점}) \\ 0 : r \text{이 내부에 있을 때} & (\text{내부점}) \end{cases}$$

이고, r_0 는 경계 표면을 뜻한다.

만일 공간내에 음원이 존재한다면 식(5)는

$$c(r)p(r) = \int_{S_0} \left[p(r_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) - \frac{\partial p(r_0)}{\partial n} \frac{e^{-ikR}}{R} \right] dS + \mathcal{A} \quad (6)$$

이 된다. 여기서 \mathcal{A} 는 평면파가 입사한다면 $\exp(-ik \cdot \vec{r})$ 이 되고, 점음원이 \vec{r}_s 에 존재한다면 $\exp(-ikR')/4\pi R'$ 이 되는데 여기서 $R' = |r-r_s|$ 이다. 식(6)의 첫번째 피적분항은

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) = - \left(\frac{1}{R} + ik \right) \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \theta \quad (7)$$

이 되고, 식(7)로부터 식(5)는

$$c(r)p(r) = - \int_{S_0} p(r_0) \left(\frac{1}{R} + ik \right) \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \theta dS + i\omega\rho \int_{S_0} v_n(r_0) \frac{e^{-ikR}}{R} dS \quad (8)$$

이 된다. 우변의 첫번째 피적분항은 표면 r_0 에 법선방향으로 $\cos \theta$ 의 지향성을 가지고 크기가 $p(r_0)$ 인 dipole이 $p(r)$ 에 끼치는 영향을 적분한 항이고, 두번째 피적분항은 표면 r_0 에 크기 $i\omega\rho v_n(r_0)$ 의 monopole이 $p(r)$ 에 끼치는 영향을 적분한 항이다. 그러므로 식(8)이 의미하는 것은, 어떠한 표면에 대하여서도 음향학적으로 기본적인 음원모델인 monopole과 dipole을 분포시켜서 수학적인 모델을 세울 수 있고, 음장내의 임의의 점에서의 음압은 경계에 분포하는 음원들의 영향을 적분한 값으로써 알아낼 수 있다는 것이다.

(2)적분방정식의 이산화

고전적인 경계적분방정식법은 표면을 여러개의 요소로 이산화 시킨후 각 요소면에서 Neumann 경계조건과 Dirichlet 경계조건이 일정하다고 가정하였으며, 이러한 가정에 의해 구한 값은 단순한 형상의 경우 비교적 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 그러나, 표면에 곡면의 형상함수를 도입하여 이산화 시키면 좀 더 좋은 결과를 얻을 수 있다. 곡면의 형상함수를 도입하면 각 요소면에서 Neumann 경계조건과 Dirichlet 경계조건을 고차함수로 표현할 수 있는데, 이 방법은 이산화 과정과 수치적인 실행에 있어서 고전적인 방법보다 복잡하긴 하지만, 같은 요소수를 갖는 경우 더 정확한 해를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 경계면에서의 음향학적 변수와 경계표면의 형태를 표현하기 위하여, 2차 형상함수(quadratic interpolation function)를 이용한 isoparametric 변환^[21]을 사용하였다.

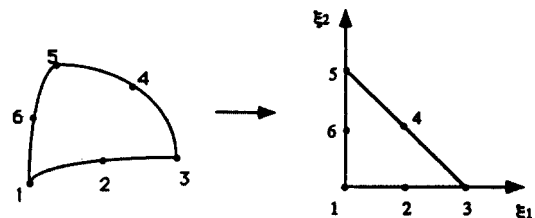


그림 2. 삼각형 2차요소(isoparametric)의 사상.

Fig 2. Mapping of triangular isoparametric quadratic element.

6절점(node) isoparametric 요소는 표면 요소를 Fig. 2 처럼 각각의 요소가 6개의 절점을 가진 삼각형을 사용하며, 기준 직교좌표는 절점의 좌표 $x_{i\alpha}$ 와 다음과 같은 관계가 있다:

$$x_i(\xi) = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\xi) x_{i\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6. \quad (9)$$

여기서, $N_{\alpha}(\xi)$ 는 국부좌표 $(\xi) \equiv (\xi_1, \xi_2)$ 의 2차 형상 함수이며 다음과 같이 정의 된다:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \xi_1(2\xi_1 - 1) ; N_2(\xi) = \xi_2(2\xi_2 - 1) \\ N_3(\xi) &= \xi_3(2\xi_3 - 1) ; N_4(\xi) = 4\xi_1\xi_3 \\ N_5(\xi) &= 4\xi_1\xi_2 ; N_6(\xi) = 4\xi_2\xi_3 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ 로 나타내어 진다.
즉, 식(9)와 (10)은 Fig.2처럼 국면 요소를 정삼각형으로 사상(mapping)하는 변환이다. Fig.2의 삼각형 표면에서 음압 p 와 입지속도 v 를 형상함수에 의해 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p_m(\xi) = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\xi) p_{m\alpha}, \quad (11)$$

$$v_m(\xi) = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\xi) v_{m\alpha}. \quad (12)$$

여기서, p_m 과 v_m 은 요소 m 의 절점 α 에서의 값이다. 이 때, 식(11)과 (12)를 Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식에 대입하면, 다음의 식을 얻을 수 있다:

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\alpha'} a_{m\alpha\alpha'}^* p_{m\alpha'} - (4\pi + \sum_{m=1}^N C_{m_j}) p_j = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\alpha'} b_{m\alpha\alpha'}^* v_{m\alpha'} \quad (j=1, 2, \dots, L \text{ 및 } \alpha=1, 2, \dots, 6). \quad (13)$$

여기서, p_j 는 global number j 에 의해 표현되는 절점에서의 p 값이고, L 은 절점의 총 갯수이며, N 은 요소의 총 갯수를 나타낸다. 또한, $a_{m\alpha\alpha'}^*$, $b_{m\alpha\alpha'}^*$, C_{m_j} 는 다음과 같이 표현될 수 있다:

$$a_{m\alpha}^* = \int_{S_m} N_{\alpha}(\xi) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\exp[-ikR_{mj}(\xi)]}{R_{mj}(\xi)} \right) J(\xi) d\xi, \quad (14a)$$

$$b_{m\alpha}^* = i\omega\rho \int_{S_m} N_{\alpha}(\xi) \left(\frac{\exp[-ikR_{mj}(\xi)]}{R_{mj}(\xi)} \right) J(\xi) d\xi, \quad (14b)$$

$$C_{mj} = \int_{S_m} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{R_{mj}(\xi)} \right) J(\xi) d\xi. \quad (14c)$$

여기서, $J(\xi)$ 는 Jacobian 변환을 의미하며, S_m 은 m 번째 요소의 면적, $R_{mj}(\xi)$ 는 절점 j 에서 요소 m 의 각 절점까지의 거리를 나타내고, C_{mj} 는 입체각(solid angle)이다. 식(13)은 총 절점의 갯수 L 에 대하여 적용할 수 있으며, 이로 부터 미지수 p 와 v 를 포함하는 L 개의 선형대수 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다:

$$Ap = Bv. \quad (15)$$

여기서, 행렬 A 와 B 의 각 요소는 식(13),(14)로 부터 표현되는 값들이며, A 는 표면 dipole의 영향을 표현하고, B 는 표면 monopole의 영향을 표현하고 있는데, 각각을 dipole행렬, monopole행렬이라 칭한다.

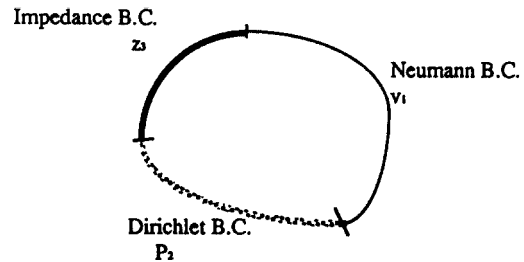


그림 3. 일반적인 혼합 경계조건.
Fig 3. Generalized mixed boundary condition.

Fig.3과 같이 경계에 Neumann 경계조건 (v_1), Dirichlet 경계조건 (P_2), 음향 임피던스 경계조건 (z_3) 이 복합적으로 주어져 있을 때, 식(15)에서 행렬요소를 분리해서 다시 쓰면

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \frac{P_3}{z_3} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

이 된다. 이 때, $z_3 = p_3/v_3$ 로 표현되는 형태는 음향 임피던스를 나타낸다. 식(16)의 좌측을 미지수 벡터 (v_1, P_2, P_3)^T의 형태로, 우측을 주어진 경계조건의 벡터 (P_1, v_2, v_3)^T의 형태로 표현하면 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} -b_{11} & a_{12} & a_{13} - \frac{b_{13}}{z_3} \\ -b_{21} & a_{22} & a_{23} - \frac{b_{23}}{z_3} \\ -b_{31} & a_{32} & a_{33} - \frac{b_{33}}{z_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & b_{12} & 0 \\ -a_{21} & b_{22} & 0 \\ -a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ v_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

이를 다시 정리하면 다음과 같은 형태의 선형방정식을 얻을 수 있다:

$$Ax = b. \quad (18)$$

앞 식들을 이용하여 구한 값들은 경계면상의 점들 (x)에 대한 값이나, 따라서, 경계면이 아닌 임의의 공간에서의 음압과 입사속도는 각각 다음과 같이 이산화된 형태의 식들로부터 구한다:

$$4\pi p_j = \sum_{m=1}^N \sum_{\alpha} a_{mj}^{\alpha} p_{m\alpha} - \sum_{m=1}^N \sum_{\alpha} b_{mj}^{\alpha} v_{m\alpha}, \quad (19)$$

$$4\pi v_i = \sum_{m=1}^N \sum_{\alpha} c_{mi}^{\alpha} p_{m\alpha} - \sum_{m=1}^N \sum_{\alpha} d_{mi}^{\alpha} v_{m\alpha}. \quad (20)$$

여기서,

$$a_{mj}^{\alpha} = \int_{s_m} N_{\alpha}(\xi) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\exp[-ikR_j(\xi)]}{R_j(\xi)} \right) J(\xi) d\xi, \quad (21a)$$

$$b_{mj}^{\alpha} = i\omega\rho \int_{s_m} N_{\alpha}(\xi) \left(\frac{\exp[-ikR_j(\xi)]}{R_j(\xi)} \right) J(\xi) d\xi, \quad (21b)$$

$$c_{mi}^{\alpha} = \int_{s_m} N_{\alpha}(\xi) \nabla_i \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\exp[-ikR_j(\xi)]}{R_j(\xi)} \right) \right] J(\xi) d\xi, \quad (21c)$$

$$d_{mi}^{\alpha} = i\omega\rho \int_{s_m} N_{\alpha}(\xi) \nabla_i \left[\left(\frac{\exp[-ikR_j(\xi)]}{R_j(\xi)} \right) \right] J(\xi) d\xi. \quad (21d)$$

이며, 이 때 음장 내의 한점에서의 음향 인텐시티는 그 정의에 의해

$$I_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p_i^* v_i) \quad (22)$$

로써 구할 수 있다.

(3) 비유일성 문제

Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식을 푸는 경계요소법에서는 외부문제를 계산하는 경우에 내부공간의

고유모드에 해당하는 주파수들에서 일정한 해를 줄 수 없다. 이러한 비유일성 문제는 적분방정식으로 변환하는 과정에서 발생한 현상으로, 물리적인 의미는 없고 Fredholm 방정식 자체의 특성에 기인하는 수학적 문제이다.

이러한 비유일성 문제를 해결하기 위하여 여러가지 방법^[20,21]이 제안되었지만, 본 연구에서는 Schenck^[5]의 방법을 이용하였다. Schenck는 비유일성을 해결하기 위하여 추가적 계산점을 내부에 둔 뒤에, 내부 Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식을 이용하여 구속조건식을 만들었다. 구속조건식과 표면 Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식을 결합하면 과결정(over-determined)된 형태를 취하는데, 이 들을 동시에 풀면 유일한 해를 얻을 수 있게 되며, 이 방법을 CHIEF(Combined Helmholtz Integral Equation Formulation)라 일컫는다. 그런데, 만일 추가점이 내부 고유 모우드의 절점(nodal point)상에 위치하게 되면, 이 구속조건식은 스스로 만족되므로 구속조건으로서의 기능을 할 수 없게 된다. CHIEF법은 이처럼 추가점을 위치시키는 문제에 대한 체계적인 방법이 존재하지 않는 난점이 있으나, 비교적 간단하며 대개는 시행착오에 의해 쉽게 해결이 되므로 현재 가장 많이 사용되고 있으며, 본 연구에서도 이 방법을 채택하였다.

만일 내부에 추가점을 K개 주었다면 변수보다 구속식이 더 많은 과결정된 선형행렬식 $Ax = b$ 에서, A는 $(N+K) \times N$, b는 $(N+K) \times 1$ 의 차원을 각각 갖는다. 이러한 방정식의 가장 의미있는 해법은 최소자승법(least square method)이다. 최소 자승법은 선형행렬식 양변에 A의 Hermitian 행렬을 곱하여 얻은 정방행렬식의 해를 구함으로써 오차의 Euclidean norm을 최소로 하는 답을 얻는 방법이다. 즉,

$$A^* A x = A^* b, \quad (23)$$

$$x_{\text{optimal}} = [A^* A]^{-1} A^* b, \quad (24)$$

은 $\epsilon_{\text{error}} = \|Ax - b\|^2$ 을 최소화 시킨다.

(4) 내부와 외부의 연성된 문제

Seybert^[17]는 내부와 외부의 음향학적으로 연성된 문제들에 대한 경계요소 수치화를 최초로 제안 하였다. Fig.4처럼 내부와 외부의 음향학적으로 연성된 문제를 생각해 보면, 열려진 면 s에 의해 내부의 음장과 외부의 음장이 서로 연성되어 있는 것을 알 수 있

다. 내부 영역을 1, 외부 영역을 2라 표시하고 외부에서 입사되어 오는 산란파를 ϕ_{inc} , 내부 음원에 의한 음장을 ϕ_{sor} 라 하면, 영역 1과 2에서는 속도 포텐셜 ϕ 에 대해 각각 다음의 관계식이 만족된다.

$$\nabla^2 \phi + k_i^2 = 0, \quad k_i = \frac{\omega}{c_i} \quad (i = 1, 2). \quad (25)$$

이 때, k_i 는 각각의 영역 1, 2에서의 파수이다. 또한, 경계 표면 S_1 과 S_2 에서의 경계 조건은 다음과 같은 일반적인 Cauchy 형태를 갖는다:

$$\alpha \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial n_i} = \gamma. \quad (26)$$

여기서, α, β, γ 는 상수이다. ϕ_2 는 외부 영역의 속도 포텐셜이므로, Sommerfeld 방사조건을 만족시킨다. 외부면 ($S_2 + s$)에서의 Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식은

$$c(p)\phi_2(p) = \int_{S_2+s} \left[\phi_2 \frac{\partial G}{\partial n_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} G \right] dS + \phi_{inc}(p) \quad (27)$$

$$c(p) = 4\pi + \int_{S_2+s} \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\frac{1}{R} \right) dS \quad (28)$$

로 표현 가능하며, 이 때 n_2 는 외부면을 향한 법선 벡터를 나타낸다. 또한, 내부면($S_1 + s$)에서의 Kirchhoff-Helmholtz 적분방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$c^0(p)\phi_1(p) = \int_{S_1+s} \left[\phi_1 \frac{\partial G}{\partial n_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} G \right] dS + \phi_{sor}(p) \quad (29)$$

$$c^0(p) = - \int_{S_1+s} \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{1}{R} \right) dS \quad (30)$$

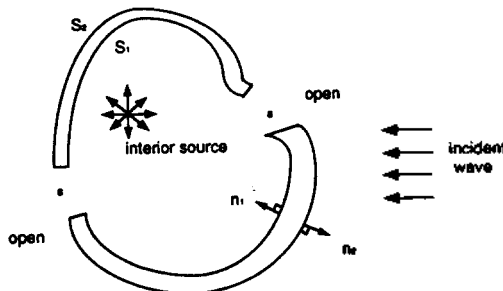


그림 4. 내·외부의 음장이 연성된 개의 개념도.
Fig. 4. Geometric concept of coupled interior/exterior acoustic fields.

여기서, $c(p)$ 와 $c^0(p)$ 는 각각 외부와 내부의 입체각을 나타낸다.

열려진 면, 즉, 연성된 면 s 에서는 다음과 같은 유압과 입사속도에 대한 연속식이 성립한다:

$$\text{압력의 연속식: } \rho_1 \phi_1 = \rho_2 \phi_2, \quad (31)$$

$$\text{속도의 연속식: } \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} = - \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2}. \quad (32)$$

식(31)과 (32)는 연성된 면에서 내부와 외부 두 영역 사이의 연속성을 나타내며, 열려진 면의 모든 점들에서 성립한다. 앞의 식(27)-(32)를 정리하여 이산화시키면 다음과 같이 다시 표현할 수 있다:

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_1^s & -g_1^s & 0 \\ 0 & \frac{\rho_1}{\rho_2} h_2^s & g_2^s & h_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} \\ \phi_2 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} + \phi_{sor} \\ g_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} + \phi_{inc} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

여기서,

$$(h_1)_n = \delta_n C^0(P_i) - \int_{s_n} \frac{\partial G(P_i)}{\partial n_1} dS, \quad (g_1)_n = - \int_{s_n} G(P_i) dS,$$

$$(h_2)_n = \delta_n C(P_i) - \int_{s_n} \frac{\partial G(P_i)}{\partial n_2} dS, \quad (g_2)_n = (g_1)_n, \quad (34)$$

$$(h_1^s)_n = \delta_n C^0(P_i) - \int_{s_n} \frac{\partial G(P_i)}{\partial n_1} dS, \quad (g_1^s)_n = - \int_{s_n} G(P_i) dS,$$

$$(h_2^s)_n = \delta_n C(P_i) - \int_{s_n} \frac{\partial G(P_i)}{\partial n_2} dS, \quad (g_2^s)_n = (g_1^s)_n,$$

이다. ϕ_1^s 와 $\partial \phi_1^s / \partial n_1$ 은 열린 면에서의 속도 포텐셜과 이를 미분한 값을 각각 의미한다. 가상의 표면에 주어지는 압력과 속도에 대한 연속식은 표면에서의 Dirichlet 조건 (p)과 Neumann 조건 (v_n)의 연속성을 의미하기 때문에 어떤 가상의 면을 선택하더라도 유장의 유일성을 보장하여 준다. 이러한 가상표면 선택에 대한 유장의 유일성은 파동방정식의 유일성¹⁶⁾에 의한 것으로, 음향 홀로그래피의 원리^{12,13)}가 되며 Huygens원리¹⁷⁾로 설명될 수 있다. Huygens원리에 의하면 음원(1차음원)으로부터 선택되는 유파는 일차음원에서 일정거리 떨어진 지점에서 관찰하면, 그 지점에 도달하여 마치 새로운 음원(2차 음원)이 생성된 것 처럼 작용하여 새로운 파면을 형성한다. 따라서 임의의 점에서의 음원은 1차 음원을 면적 적분하여 구할 수 있고, 이 값은 가상표면을 설정함으로써 정의된 2차음원을 적분하여 구한 값과 같다. 연성된

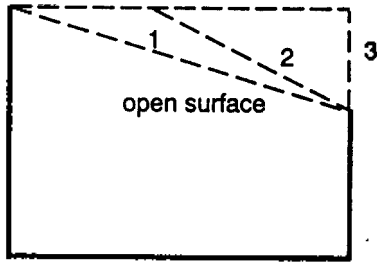


그림 5. 연성면의 선택예.
Fig 5. Examples of coupling interface.

경계요소법에도 이러한 원리를 적용하여 Fig.5와 같이 임의로 연성면을 선택할 수 있다. 즉, Fig.5의 1, 2, 3 어느 면을 선택해도 같은 측정점에 대하여 이론적으로 동일한 해를 얻는다. 그러나, 여기에서 연성면을 부드러운 곡면이 아닌 예각을 가진 면으로 설정할 경우, 수치해석적인 요인으로 인하여 큰 오차를 유발할 수 있다는 점을 주의해야 한다.

III. 실험 및 해석 결과

(1) 경계요소법의 오차

벽면에서 매우 가까운 부분($r/a < 0.1$, r = 벽면에서 측정점까지의 거리, a = 특성 거리 또는 경계요소의 크기)의 음장을 계산할 경우, 음압이 균일하지 않은 결과를 보여주는 점이 관찰된다. 이러한 오차의 가장 큰 원인은 곡면 외형을 충분한 만큼의 갯수의 요소로써 나누어 주지 못 하였기 때문이다. 충분한 만큼의 요소로 나누어 주지 못하면, 형상 함수를 이용함으로써 발생하는 곡부식 좌표값의 오차와 방사체 표면 근처에서의 Green 함수의 특이성 및 몇개의 Gaussian quadrature만을 이용한 적분수행에 의한 오차가 복합적으로 누적 발생한다. 이러한 오차를 정량적으로 고찰하기 위하여, 이론적으로 계산 가능한 균일하게 방사하는 구에 대하여 해석을 수행하였다. 거리에 대한 음압의 오차를 보면 Fig.6과 같다. Fig.6(a), (b)는 각각 8개와 48개의 요소로 모델링된 구의 벽면 근처에서의 음압 오차를 보여 준다. 두가지 경우 모두 벽면에서부터의 거리(r)에 대한 요소면의 크기(dl)의 비(r/dl)가 대략 0.1 보다 작은 경우에는 오차가 크며, (r/dl)이 0에 가까와 지면 50%정도 까지 오차가 증가 하는 것을 볼 수 있다. 벽면 근처에서의 오차는 BEM의 계산 한계 주파수 내에서는 주파수와 거의 관계가 없으며, 단지 요소 크기(dl)에만 관계된다. 이러한 오차로 인해 Fig.7과 같이 얇은판

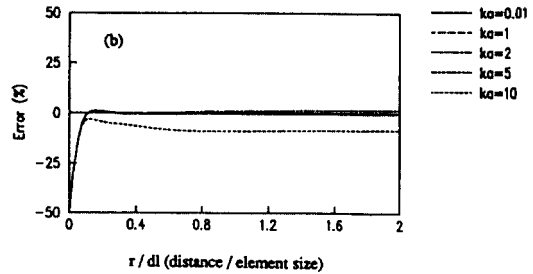
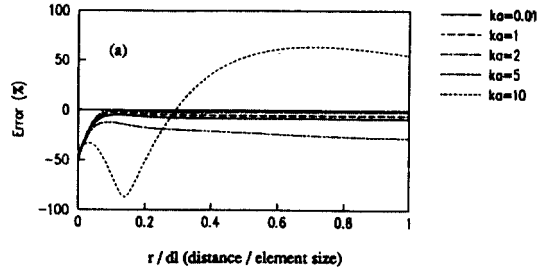


그림 6. 균일하게 방사하는 구의 무차원 요소길이 (r/dl)에 따른 음압 오차. (a)8개 요소 모델링, (b)48개 요소 모델링.

Fig 6. Predicted errors of sound pressures generated from an uniformly radiating sphere, Distance between field point and radiating surface is normalized by the length of boundary element. (a) Number of elements = 8, (b) number of elements = 48.

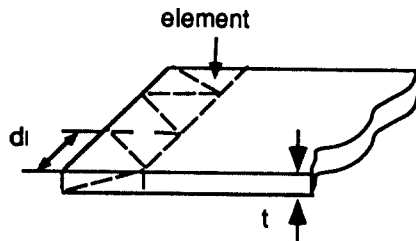


그림 7. 얇은 판의 경계요소 모델링.
Fig 7. Boundary element modeling for a thin plate.

의 경우에 대한 음장해석시 어려움이 생기게 된다. 이러한 얇은 판의 경우는 앞의 결과에 의하면 최소한 두께 t 에 대하여 요소크기가 10배를 넘지 않아야 한다. 따라서 얇은 판을 모델링하는 경우 요소 갯수가 크게 늘어나야만 하는 단점이 있다. Fig.6에서, 8개의 요소면을 가진 구의 경우는 ka 가 5이상에서는 의미 없는 해를 주며, 48개 요소면을 가진 구의 경우는 ka

가 10이상이 될 때 의미없는 결과를 산출함을 알 수 있다. 이러한 결과는 2차 형상함수를 이용하여 해석할 수 있는 주파수의 한계를 나타내며, 요소면의 가장 짧은 모서리의 길이가 반파장의 길이에 해당하는 주파수 까지라는 것을 보여주고 있다.

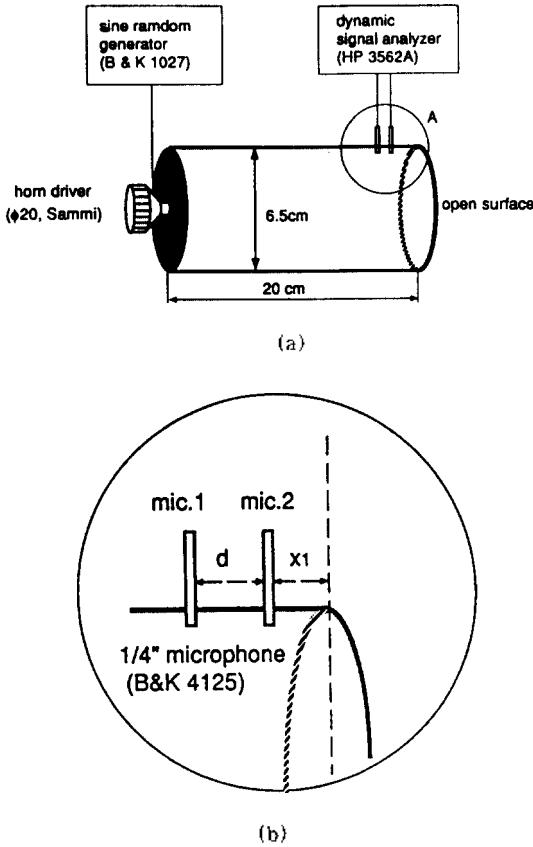


그림 8. 한 면이 개방된 관의 음장 측정용 실험 장치도.
Fig. 8. Schematic diagram for acoustic field measurements of an open pipe driven at one end.

(2) 한쪽이 개방된 관의 내외부 음장 해석: 실험

연성된 경계요소법(CBEM) 프로그램을 검증하기 위하여 정확한 이론해를 구하기 매우 어렵지만, 실험적으로 많이 알려진 한쪽면이 열려진 관의 음장을 선택하였다. 또한 경계요소법으로 예측한 모형과 같은 실험 장치를 만들어 그 결과를 비교하였다. 실험에 사용한 스피커는 직경이 0.02m인 혼드라이버(horn driver)이며, 관의 직경은 0.065m이고, 길이는 0.2m, 두께는 2mm이다. Fig.8과 같은 실험장치를 구성하여 관 끝단에서의 임피던스와 음원 임피던스를 구하

였다. 실험은 관 내부의 음장이 평면파라고 가정하고 ($ka < 3.83$), 두개의 1/4 inch 마이크로폰을 사용하여 두 지점의 파워 스펙트럼을 측정하는 방법(two microphone method)을 이용하였다²⁾²⁾. 두개의 마이크로폰을 이용하면 마이크로폰이 있는 지점 1, 2에서의 Auto, Cross Spectrum(\hat{S}_{11} , \hat{S}_{22} , \hat{S}_{12})들을 각각 측정할 수 있으며, 이 값을 이용하여 끝단에서의 임피던스(\hat{Z}_n)를 다음과 같이 구할 수 있다:

$$\frac{\hat{R}_n(f)}{\rho c} = \frac{\hat{S}_{AA}(f) - \hat{S}_{BB}(f) - 2i\hat{Q}_{AB}(f)}{\hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) - 2\hat{C}_{AB}(f)} \quad \text{Resistance,} \quad (35)$$

$$\frac{\hat{X}_n(f)}{\rho c} = \frac{-2\hat{Q}_{AB}(f)}{\hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) - 2\hat{C}_{AB}(f)} \quad \text{Reactance,} \quad (36)$$

$$\hat{S}_{AB} = \hat{C}_{AB} + i\hat{Q}_{AB} \quad (37)$$

$$\hat{Z}_n = \hat{R}_n + i\hat{X}_n \quad \text{Impedance.} \quad (38)$$

여기서, \hat{S}_{AA} 는 반사파의 auto spectral density이며, \hat{S}_{BB} 는 입사파의 auto spectral density, \hat{S}_{AB} 는 반사파와 입사파의 cross spectral density이다. 이 때, 음원 임피던스(\hat{Z}_s)는 끝단의 임피던스(\hat{Z}_n)으로 부터 다음과 같이 구한다:

$$\frac{\hat{Z}_s}{\rho c} = \frac{isinkl + \hat{Z}_n \cos kl}{i\hat{Z}_n \sin kl + \cos kl} \frac{A_n}{A} \quad (39)$$

여기서, A_s 는 스피커 음원의 단면적이고 A_n 는 관의 단면적이다.

(2) 한쪽이 개방된 관의 내·외부 음장 해석: CBEM

한쪽이 개방된 관의 경계요소 모델은 Fig.9와 같다. 경계요소 모델에 있어서 개방된 면을 가상의 표면으로 가정하고 이 면을 기준으로 내부와 외부영역으로 나누어 연성된 계를 만들었다. 음원에 의해 가진되고 있는 부분을 제외한 관의 모든 면을 속도가 0인 강체벽이라고 가정하였으며, 파이프의 두께는 무시하였다. Fig.10의 실험과 BEM 해석 결과를 보면 모두 $kd = 1.44, 4.40, 7.24$ 에서 공명이 일어나고 있음을 볼 수 있다. 실험적으로 구한 개방된 면에서의 방사 임피던스는 두개의 마이크로폰 사이의 거리(d)와 첫번째 마이크로폰과 열려진 까지의 거리(x_1)에 민감하기때문에, 거리측정의 오차가 전체 오차에 매우 크게 기여한다. 실험에서 첫번째 마이크로폰과 관 끝단 까지의 거리는 0.01m이고, 두번째 마이크로폰과 관

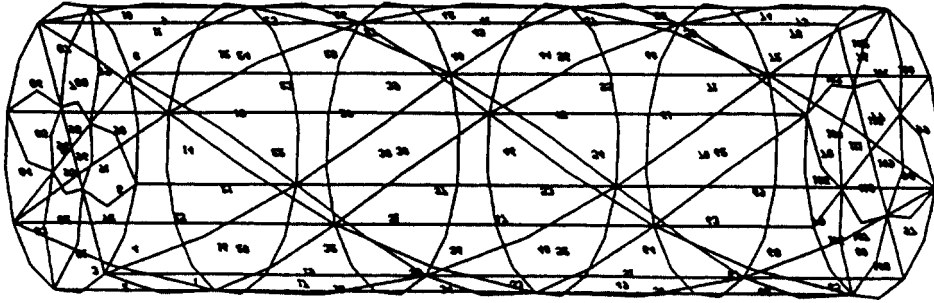


그림 9. 한 면이 개방된 관의 경계요소 모델링.
Fig 9. Boundary element modeling for the open pipe at one end.

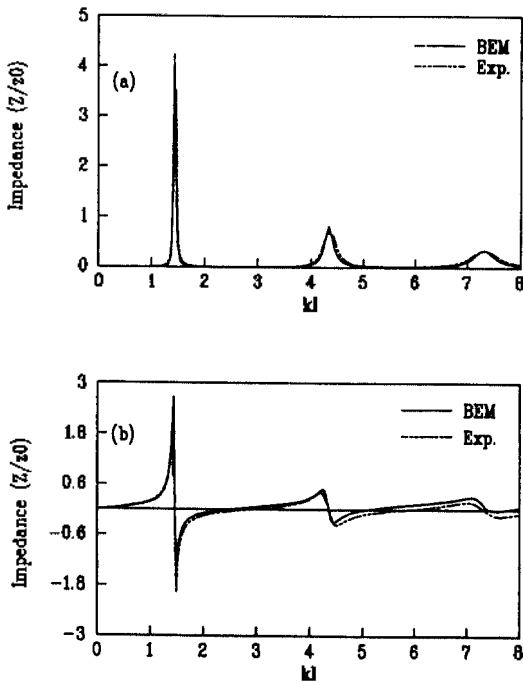


그림 10. 예측된 음원 임피던스와 실험치의 비교. (a)실수부. (b)허수부.

Fig 10. Comparison of predicted source impedance with experimental one. (a)Real part. (b)imaginary part.

끝단까지의 거리는 0.03m이다. 음원의 임피던스는 식(39)를 이용하여 구한다. 이 식은 벽면 전체가 소음원 일때의 경우이므로, Fig.8(a)처럼 벽면 일부만 소음원일 때에는 면적비로 임피던스를 나누어 주면 근사값을 얻을 수 있다. Fig.11은 kl 이 각각 1.44, 4.4, 7.24 일 때 관의 내부와 외부에서의 음압분포를 보여준다. 이 그림들은 각각 관 길이방향의 모드에

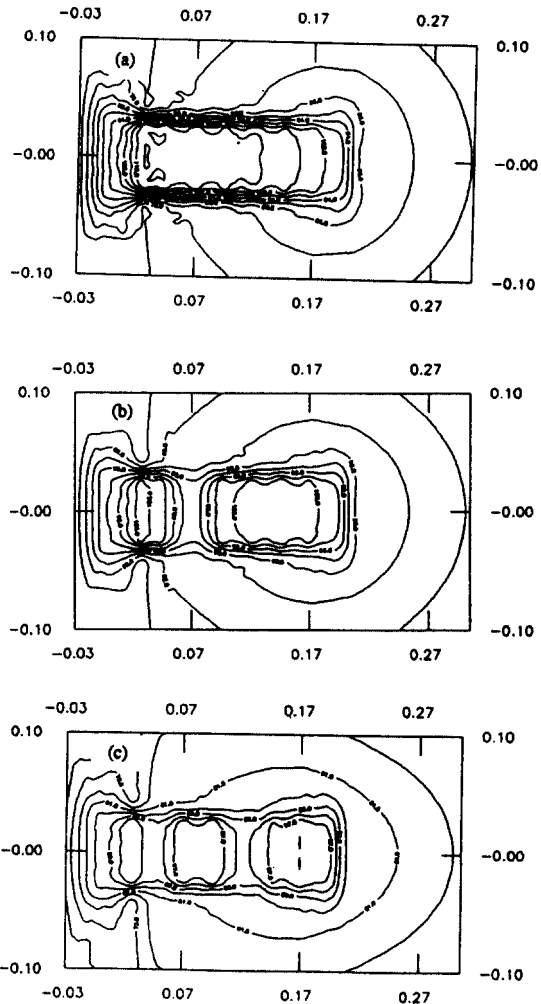


그림 11. 예측된 길이 방향의 3가지 음향 모드의 음압 분포. (a) $kl = 1.44$, (b) $kl = 4.40$, (c) $kl = 7.24$.

Fig 11. Predicted sound pressure distribution for 3 longitudinal acoustic modes. (a) $kl = 1.44$, (b) $kl = 4.40$, (c) $kl = 7.24$.

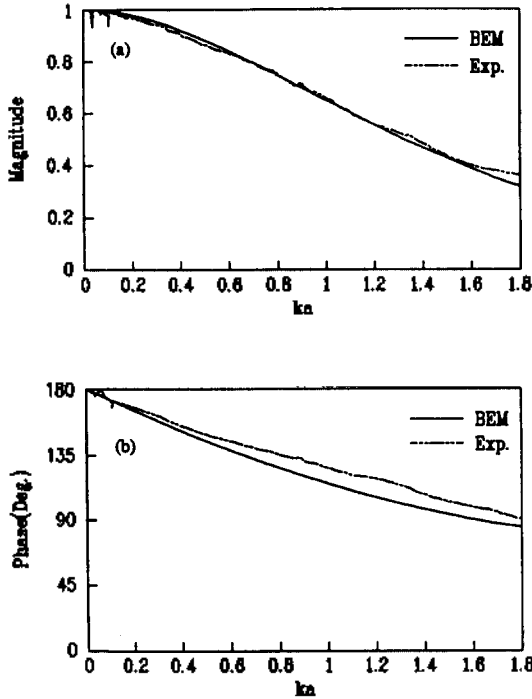


그림 12. 관의 개방 종단에서의 반사계수. (a)크기, (b)위상.
Fig 12. Predicted pressure reflection coefficient at open end of pipe compared with experimental one. (a)Magnitude, (b)phase.

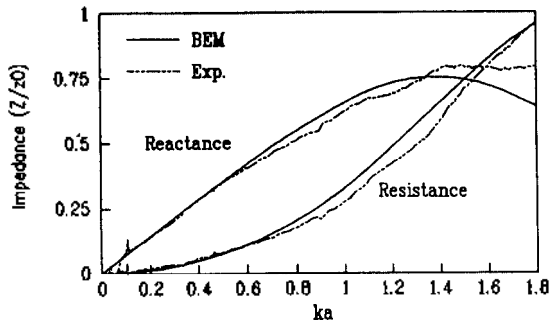


그림 13. 관의 개방 종단에서의 방사 임피던스.
Fig 13. Comparison of predicted radiation impedance at open end of pipe with experimental one.

해당되며, node와 anti-node가 명확하게 보임을 알 수 있다. 각 모우드는 끝단에서 음압이 최소가 되고, 소음원이 있는 벽쪽에서 최대의 음압을 갖게 된다. Fig.12의 반사계수(reflection coefficient)와 Fig.13의 종단 임피던스를 보아도 역시 실험과 계산의 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

IV. 결론 및 제언

연성된 계에 대한 경계요소법을 이용하여 기하학적인 특이점이 존재하는 음장에 대한 해석을 시도하였다. 한쪽면이 개방되어 있고 얇은 두께로 된 관을 대상으로 해석하여 실험 결과와 비교하였으며, 두 결과가 잘 일치함을 볼 수 있었다. 이와 아울러, 개방된 관에서의 예제 및 방사하는 구의 예제를 통하여 요소면의 개수 및 크기를 최적으로 선택하여야 벽면 근방에서의 오차를 최소화 한다는 것을 확인하였다.

이와 같은 연성된 경계요소해석법을 사용하는 경우, 여러개의 부분 영역으로 이루어져 있는 음향방사계 및 수동계의 음장 특성을 예측하기가 쉽고, 특히 기하학적인 특이점을 포함하고 있는 계에 대한 해석이 용이하므로, 지주파수 대역의 방사, 전달, 회절, 산란 문제등에 광범위하게 사용될 수 있다.

참 고 문 헌

1. G. Jennequin, "Is the computation of noise level inside a car feasible?" Proc. Instn. Mech. Engrs., Symposium on Vibration and Noise in Motor Vehicles, Paper C108/71, pp.132-137, 1971.
2. T. Shuku, A. Yoshida, M. Nagai, and A. Watari, "Reduction of interior car noise by control of cavity resonance," 14th FISITA Conference, Paper 1/9, pp.1/56-1/62, London, England, 1972.
3. G. Chertock, "Sound radiation from vibrating surfaces," J. Acoust. Soc. Am., Vol.36, pp.1305-1313, 1964.
4. L. G. Copley, "Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation," J. Acoust. Soc. Am., Vol.44, pp.28-32, 1968.
5. H. A. Schenck, "Improved integral formulation for acoustic radiation problem," J. Acoust. Soc. Am., Vol.44, pp.41-58, 1968.
6. T. Shuku and K. Ishihara, "The analysis of the acoustic field in irregularly shaped rooms by the finite element method," J. Sound Vib., Vol.29, pp. 67-76, 1973.
7. A. Craggs, "Some practical applications of acoustic finite elements," Proc. of World Congress on FEM in Structural Mechanics, pp.8.1-8.20, Bournemouth, England, 1975.
8. M. Petyt, J. Lea, and G. H. Koopman, "A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shaped cavities," J. Sound Vib., Vol.45,

- pp.496-502, 1976.
9. S. H. Sung, "Automotive applications of three-dimensional acoustic finite elements," SAE Paper 810397, 1981.
 10. W. L. Meyer, W. A. Bell, B. T. Zinn, and M. P. Stallybrass, "Boundary integral solutions of three dimension acoustic radiation problems," J. Sound Vib., Vol.59, pp.245-262, 1978.
 11. G. H. Koopman and H. Benner, "Method for computing the sound power of machines based on the Helmholtz integral," J. Acoust. Soc. Am., Vol.71, pp.78-89, 1982.
 12. A. F. Seybert, B. Soenarko, F. J. Rizzo, and D. J. Shippy, "Application of the BIE method to sound radiation problems using an isoparametric element," Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress and Rel. Des., Vol.106, pp.414-420, 1984.
 13. M. A. Latch and A. Akay, "Application of the Helmholtz integral in acoustics," Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress and Rel. Des., Vol.108, pp. 447-453, 1986.
 14. A. F. Seybert, B. Soenarko, F. J. Rizzo, and D. J. Shippy, "An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimension," J. Acoust. Soc. Am., Vol.77, pp.362-368, 1985.
 15. S. Suzuki, M. Imai, and S. Ishiyama, "ACOUST/BOOM-A noise level predicting and reducing computer code," Proc. BEM VIII, pp.105-144, 1986.
 16. Von P. Becker and H. Waller, "Vergleich der Methoden der Finiten Elemente und der Boundary-Elemente bei der numerischen Berechnung von Schallfeldern," Acustica, Vol.60, pp.21-33, 1986.
 17. A. F. Seybert, C. Y. Cheng, and T. W. Wu, "The solution of coupled interior/exterior acoustic problems using the boundary element method," J. Acoust. Soc. Am., Vol.88, pp.1612-1618, 1990.
 18. B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, Clarendon Press, Oxford, 1939.
 19. A. D. Pierce, *Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1981.
 20. A. J. Burton and G. F. Miller, "The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems," Proc. Royal Soc. London, Series A323, pp.201-210, 1971.
 21. Z. Reut, "On the boundary integral methods for the exterior acoustic problem," J. Sound Vib., Vol. 103, pp.297-298, 1985.
 22. J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee, "Nearfield acoustic holography : I. Theory of generalized holography and development of NAH," J. Acoust. Soc. Am., Vol.78, pp.1395-1413, 1985.
 23. G.-T. Kim and B.-H. Lee, "3-D sound source reconstruction and field prediction using the Helmholtz integral equation," J. Sound Vib., Vol.136, pp.245-261, 1990.
 24. A. F. Seybert and D. F. Ross, "Experimental determination of acoustic properties using a two-microphone random excitation technique," J. Acoust. Soc. Am., Vol.61, pp.1362-1370, 1977.
 25. A. F. Seybert, "Two-sensor methods for the measurements of sound intensity and acoustic properties in duct," J. Acoust. Soc. Am., Vol.83, pp.2233-2239, 1988.

▲배 정 웅(Jeong-Yong Bae)

1991년 2월 : 한국과학기술원 기계공학과(학사)
 1993년 2월 : 한국과학기술원 기계공학과(석사)
 1993년 3월 ~ 현재 : (주)금성사 생활 시스템 연구소
 연구원

▲이 정 권(Jeong-Guon Ih)

현재 : KAIST 기계공학과 부교수(11권 4호 참조)