

# 신호의 도착 방향을 추정하는 새로운 기법

## A New Technique for Estimating Direction of Arrival of Signals

崔眞豪\*, 尹眞鮮\*, 宋翊鎬\*, 朴聖日\*

(Jinho Choi\*, Jin Seon Yun\*, Ickho Song\*, Seong Ill Park\*)

### 요 약

이 논문에서는 신호원의 도착 방향을 추정할 때 쓰이는 영 스펙트럼의 일반화를 생각하였다. 일반화된 영 스펙트럼의 상하한, 곧 최대 영 스펙트럼과 최소 영 스펙트럼을 얻었고, 최대 영 스펙트럼이 다중 신호 분류 영 스펙트럼이나 Min-Norm 영 스펙트럼과 같은 것을 포함하는 다른 영 스펙트럼들보다 해상 능력이 좋은 것을 알았다. 컴퓨터로 모의 실험을 하여 여러 영 스펙트럼의 해상확률을 얻었는데 이로부터 최대 영 스펙트럼의 뛰어난 해상 능력을 확인할 수 있었다.

### ABSTRACT

A generalization of null-spectrum for use in the estimation of directions of arrival of signal sources is considered in this paper. The upper and lower bounds of the generalized null-spectrum, the maximum and minimum null spectra, are also derived. We observe that the maximum null-spectrum has higher resolution capability than other null-spectra including the two well-known null-spectra, the multiple signal classification (MUSIC) and Min Norm null-spectra. Through computer simulation the probabilities of resolution of various null-spectra are obtained, from which we confirmed the resolution capability of the maximum null-spectrum.

### 1. 머리말

협대역 다중 신호원의 위치를 추정하는 한 방법으로 고유구조에 바탕을 둔 영 스펙트럼 (null-spectrum) 제안되어 널리 쓰이고 있다 [1,2]. 고유구조에 (eigenstructure) 바탕을 둔 영 스펙트럼은 부공간분해라는 (subspace decomposition) 공통 특성을 갖는다. 부공간분해란 배열 출력의 공분산 행렬의 고유값을 써서 고유벡터를 신호 부공간과 잡음 부공간으로 나눌 수 있다는 것이다. 신호 부공간과 잡음 부공간은 신호의 도착 방향을 추정할 때 중요한 역할을 한다. 특히 다중신호분류와 (multiple signal classification : MUSIC) Min-Norm 방법은 신호원의 위치

를 추정할 때 많이 쓰이는 방법인데 이들은 모두 부공간분해에 크게 의존한다. 신호 부공간과 잡음 부공간은 서로 직교하는 공간인데 이 성질을 써서 신호의 도착 방향을 추정할 수 있다.

이 논문에서는 MUSIC 영 스펙트럼, Min-Norm 영 스펙트럼, 그리고 가중 MUSIC 영 스펙트럼과 [3] 같은 것을 특별한 경우로 포함하는 일반화된 영 스펙트럼을 정의한다. 그다음에 이 일반화된 영 스펙트럼의 상하한을 얻어서 이들로부터 해상 능력이 뛰어난 영 스펙트럼 몇 개를 정의하였다. 그뿐만 아니라 이들을 적절히 정규화하여 가중 MUSIC 영 스펙트럼의 성능도 몇가지 얻었다.

### II. 기본 이론

이득이 (gain) 1인 수신기 L개로 이루어진 배열 수

\* 한국과학기술원 전기 및 전자공학과  
접수일자: 1993년 3월 8일

신호를 생각해 보자. 협대역 신호원의 위치를 찾는 문제에서 표준 관측 모형을 다음과 같이 가정하자:

$$y(t) = A x(t) + n(t), \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

여기서  $L \times 1$  복소 벡터 공간을  $C^{L \times 1}$ 로 쓸 때,  $y(t) \in C^{L \times 1}$ 은 배열 출력 벡터이고,  $x(t) \in C^{M \times 1}$ 은 신호원 벡터이며, 평균이 1이고 공분산 행렬이  $\sigma^2 I$ 인 가산성 잡음  $n(t)$ 는 신호와 상관관계가 없다고 가정한다. 한편 (1)에서 행렬  $A$ 는  $L \times M$  ( $L > M$ ) 복소 행렬인데  $i$ 번째 신호의 도착 방향을  $\theta_i$ 라고 할 때 다음과 같은 꼴을 갖는다.

$$A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_M)].$$

여기서  $a(\theta_i) \in C^{L \times 1}$ 는 돌림 (steering) 벡터 또는 전달 (transfer) 벡터라고 한다.

신호원이 비동조이고 (noncoherent),  $n(t)$ 가 백색 잡음이며, 신호 사계열과 잡음이 모두 복소정규확률 변수라면  $y(t)$ 의 공분산 행렬은 다음과 같다.

$$R_y = A R_x A^H + \sigma^2 I. \quad (2)$$

여기서  $H$ 는 Hermitian이다 (곧,  $A^H = (A^*)^T$ 이고  $*$ 와  $T$ 는 각각 켈레 복소수와 전치를 나타낸다).

출력 벡터  $y(t)$ 의 공분산 행렬  $R_y$ 의 고유값을 큰 것부터 늘어 놓은 것을  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M \geq \lambda_{M+1} = \lambda_{M+2} = \dots = \lambda_L$ 이라 하고,  $\lambda_i$ 에 대응하는 정규화된 고유벡터를  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ 이라 하여 크기가  $L \times M$ 이고  $L \times (L-M)$ 인 두 행렬  $S = [e_1, e_2, \dots, e_M]$ 과  $G = [e_{M+1}, e_{M+2}, \dots, e_L]$ 을 생각하자.

이제 다음과 같이  $D(\theta)$ 를 정의하면,

$$D(\theta) = a^H(\theta) G G^H a(\theta). \quad (3)$$

이 함수  $D(\theta)$ 는  $\theta$ 가 어떤 값을 갖더라도 음이 아니며  $\theta \in \Theta$ ,  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M\}$ , 에서만 0이라는 것을 [4]에서 보았다. 그러나, 실제로 우리가 쓸 수 있는 것은  $R_y$ 의 추정값인

$$\hat{R}_y = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) y^H(t) \quad (4)$$

로부터 얻을 수 있는  $S$ 와  $G$ 의 추정값인  $\hat{S}$ 와  $\hat{G}$ 이다.

이 추정값  $\hat{S}$ 와  $\hat{G}$ 을 쓰면 MUSIC 영 스펙트럼  $f_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 는 다음과 같이 정의되는데

$$f_{\text{MUSIC}}(\theta) = a^H(\theta) \hat{G} \hat{G}^H a(\theta), \quad (5)$$

이 영 스펙트럼  $f_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 는 일반적으로  $\theta \in \Theta$  근처에서 극소점을 가진다.

한편, MUSIC 영 스펙트럼을 변형한 것 가운데의 하나가 Min-Norm 영 스펙트럼이다 [2]. 이를 좀더 자세히 살펴보자.  $\theta \in \Theta$ 를 추정하고자 할 때 다음을 만족시키는 벡터  $q = [q_1, q_2, \dots, q_L]^T$ 를 생각하자.

$$a^H(\theta) q = 0, \quad \theta \in \Theta. \quad (6)$$

첫째 원소가 1이고 원점부터 유클리드 거리가 최소라는 조건 아래에서 얻은 [2] 벡터를  $q_{\text{MN}}$ 이라 하면 Min-Norm 영 스펙트럼을 다음과 같이 정의할 수 있는데

$$f_{\text{MN}}(\theta) = |\hat{q}_{\text{MN}}^H a(\theta)|^2, \quad (7)$$

여기서  $\hat{q}_{\text{MN}}^H = \hat{h} \hat{G} \hat{G}^H u_{\text{MN}}$ 은  $q_{\text{MN}}$ 의 추정량이며  $\hat{h} = [u_{\text{MN}}^H \hat{G} \hat{G}^H u_{\text{MN}}]^{-1}$ 이고  $u_{\text{MN}} = [1, 0, \dots, 0]^T$ 이다.

Min-Norm 영 스펙트럼은 가중 MUSIC 영 스펙트럼으로도 [3] 생각할 수 있는데 가중 MUSIC 영 스펙트럼은 반양지 (positive semidefinite) 행렬  $W$ 로 다음과 같이 정의된다.

$$f_w(\theta) = a^H(\theta) \hat{G} W \hat{G}^H a(\theta). \quad (8)$$

### III. 일반화된 영 스펙트럼

이 절에서는 신호 도착 방향을 추정할 때 쓸 수 있는 일반화된 영 스펙트럼을 정의한 다음, 가까이 있는 두 신호를 분간하는 데에 이 일반화된 영 스펙트럼에 속하는 몇가지 영 스펙트럼을 쓸 수 있음을 보인다. 그리고 MUSIC 영 스펙트럼이 이 일반화된 영 스펙트럼의 한 보기임을 보인다.

먼저, 다음과 같은 초평면을 (hyperplane) 생각해보자.

$$V(\theta) = \{ \beta(\theta) : \sum_{i=1}^M |\alpha_i(\theta)|^2 \beta_i(\theta) = a^H(\theta) \hat{G} \hat{G}^H a(\theta), \beta_i(\theta) \geq 0 \}. \quad (9)$$

여기서  $\beta(\theta) = [\beta_1(\theta), \beta_2(\theta), \dots, \beta_M(\theta)]^T$ 이고,  $\alpha_i(\theta) = a^H(\theta)\hat{e}_i$ 이며  $\hat{G}$ 는 표본 잡음 부공간이다. 그러면 일반화된 영 스펙트럼  $f(\theta)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(\theta) = r^T(\theta)\beta(\theta), \quad r(\theta) \geq 0, \quad \beta(\theta) \in V(\theta). \quad (10)$$

이때  $r(\theta) \geq 0$ 은 벡터  $r(\theta)$ 의 어떤 원소도 음이 아닌 실수임을 뜻한다. 간단히 말하면 일반화된 영 스펙트럼  $f(\theta) = \sum_{i=1}^M r_i(\theta)\beta_i(\theta)$ 는  $\beta_i(\theta)$ ,  $i=1, 2, \dots, M$ 와 영이 아닌 가중값을 곱하여 더한 것이다. 한편, 가중 벡터  $r(\theta)$ 는 일반화된 영 스펙트럼의 특성을 결정하므로 이를 정하는 문제는 매우 중요한 것이다.

성질 1:  $\hat{e}_i = e_i$ ,  $i=1, 2, \dots, L$ 이라 하자.  $\theta \in \Theta$ 이면

$$\beta_i(\theta) = 0, \quad i=1, 2, \dots, M, \quad (11)$$

이고,  $\theta \notin \Theta$ 이면  $\beta_i(\theta)$ ,  $i=1, 2, \dots, M$ , 가운데에서 적어도 하나는 양의 실수이다.

성질 1이 말하는 때는 음이 아닌 함수  $f(\theta)$ 가  $\hat{e}_i = e_i$ ,  $i=1, 2, \dots, L$ 이면  $\theta \in \Theta$ 일 때에만 0이라는 것이므로 (10)으로 정의된 일반화된 영 스펙트럼  $f(\theta)$ 로 신호 도착 방향을 추정할 수 있다는 것을 알 수 있다.

성질 2: 음이 아닌 벡터  $r(\theta) = r_{MU}(\theta) = [|\alpha_1(\theta)|^2, |\alpha_2(\theta)|^2, \dots, |\alpha_M(\theta)|^2]^T$ 를 생각하면 일반화된 영 스펙트럼은 MUSIC 영 스펙트럼이다.

한편, (8)에 나타난 가중 행렬  $W$ 로 정의되는 어떠한 가중 MUSIC 영 스펙트럼도 (Min-Norm 영 스펙트럼을 포함하여)  $r(\theta)$ 를 다음과 같이 두면 일반화된 영 스펙트럼임을 알 수 있다.

$$r(\theta) = r_W(\theta) = \left( \frac{f_W(\theta)}{f_{MU}(\theta)} \right) r_{MU}(\theta). \quad (12)$$

그러면 이제 가중 MUSIC 영 스펙트럼이 아닌 일반화된 영 스펙트럼의 특별한 경우 두가지를 소개하고, 그 가운데 하나가 가까이 있는 두 신호를 분간할 때에 매우 쓸모있음을 보이고자 한다.

가중 벡터  $r(\theta) = [1, 1, \dots, 1]^T$ 로 하고, 다음과 같은 두 문제를 생각해 보자.

최대화 문제

$$\begin{aligned} \max \left( \sum_{i=1}^M \beta_i(\theta) \right) \\ \text{subject to } \beta(\theta) \in V(\theta) \end{aligned}$$

최소화 문제

$$\begin{aligned} \min \left( \sum_{i=1}^M \beta_i(\theta) \right) \\ \text{subject to } \beta(\theta) \in V(\theta) \end{aligned}$$

위의 두 문제에 대한 답은 쉽게 얻을 수 있다. 곧, 최대화 문제의 목적함수와 최소화 문제의 목적함수를 각각  $f_{\max}(\theta)$ 와  $f_{\min}(\theta)$ 라 한다면 이들은 다음과 같다.

$$f_{\max}(\theta) = \frac{a^H(\theta)\hat{G}\hat{G}^H a(\theta)}{\min_{1 \leq i \leq M} |\alpha_i(\theta)|^2} \quad (13)$$

와

$$f_{\min}(\theta) = \frac{a^H(\theta)\hat{G}\hat{G}^H a(\theta)}{\max_{1 \leq i \leq M} |\alpha_i(\theta)|^2}. \quad (14)$$

이제 일반화된 영 스펙트럼의 정규화를 생각해 보자.

$$f(\theta) = \frac{f(\theta)}{\|r(\theta)\|_1}. \quad (15)$$

여기서  $f(\theta)$ 는 일반화된 영 스펙트럼이고  $\|\cdot\|_1$ 은 1 norm이다.

$$\text{성질 3: } \bar{f}_{\max}(\theta) = \bar{f}_{\max}(\theta) \quad (16)$$

그리고

$$\bar{f}_{\min}(\theta) = \bar{f}_{\min}(\theta). \quad (17)$$

정규화된  $f_{MU}(\theta)$ 를  $\bar{f}_{MU}(\theta)$ 로 쓰면, 어떠한 상수  $s$ 에 대해서도  $\bar{f}_{MU}(\theta) \neq s \bar{f}_{MU}(\theta)$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , 임을 눈여겨 보아 두자. 이제 성질 4에서 정규화된 가중 MUSIC 영 스펙트럼의 눈여겨 볼만한 성질 하나를 알아보자.

성질 4:  $\theta$ 가 어떠한 값을 갖더라도  $\bar{f}_{MU}(\theta)$ ,  $\bar{f}_{MN}(\theta)$ ,  $\bar{f}_W(\theta)$ 가 0보다 크면 정규화된 가중 MUSIC 영 스펙트럼  $\bar{f}_W(\theta)$ 는 행렬  $W$ 와 상관이 없다. 곧 어떠한 만약  $W$ 에 대하여도 다음과 같다.

$$\bar{f}_{MU}(\theta) = \bar{f}_{MN}(\theta) = \bar{f}_W(\theta). \quad (18)$$

IV. 모의실험과 토의

배열크기  $L$ 이 10, 신호원수  $M$ 이 2, 두 신호원 방향은  $15^\circ$ 와  $17^\circ$ , 신호대 잡음비는 20 dB라고 하자. 표본 공분산 행렬은 100개의 독립적인 자료에서 얻었고 가산 잡음은 백색정규잡음이라 가정했으며 신호와 잡음은 모두 결합 복소 정규 확률 변수라 하였다. MUSIC, Min-Norm, 최대, 최소, 네 영 스펙트럼의 역을 그림 1에 보였다. 그림 1(a)와 그림 1(b)에 각각 MUSIC 영 스펙트럼의 역과 Min-Norm 영 스펙트럼의 역을 다섯번 그렸는데 신호원 수가 들인에도  $15^\circ$ 와  $17^\circ$  사이에 꼭지점이 하나만 보인다. 이는 두 신호원이 완전히 상관관계가 없을 때에도 MUSIC 영 스펙트럼과 Min-Norm 영 스펙트럼이 가까이 있는 두 신호원의 도착 방향을 알아내지 못함을 뜻한다. 그림

1(c)에는 최소 영 스펙트럼의 역을 다섯번 보였는데 그림 1(a)나 1(b)와 마찬가지로 최소 영 스펙트럼도 두 신호원의 도착 방향을 알아내는 데에 쓸 수 없음을 알 수 있다. 그러나, 그림 1(d)에서 최대 영 스펙트럼의 역이 두 신호원의 위치  $15^\circ$ 와  $17^\circ$ 에서 꼭지점을 가짐을 볼 수 있다. 그러므로 최대 영 스펙트럼이 다른 영 스펙트럼보다 더 나은 해상능력을 가지고 있다고 할 수 있다.

가까이 있는 두 신호원을 분간할 때 여러 영 스펙트럼의 해상 성능을 견주어 보는 또 다른 방법으로 그림 2에 신호대 잡음비와 해상 확률 (probability of resolution: PR) 그렸다. 여기서 두 신호원의 도착 방향을  $\theta_1$ 과  $\theta_2$ 라 하고  $\theta_m = (\theta_1 + \theta_2) / 2$ 라 할 때 해상 확률은 다음과 같이 정의된다 [5].

$$PR = \Pr\{f(\theta_1) \leq f(\theta_m) \text{ 그리고 } f(\theta_2) \leq f(\theta_m)\}. \quad (19)$$

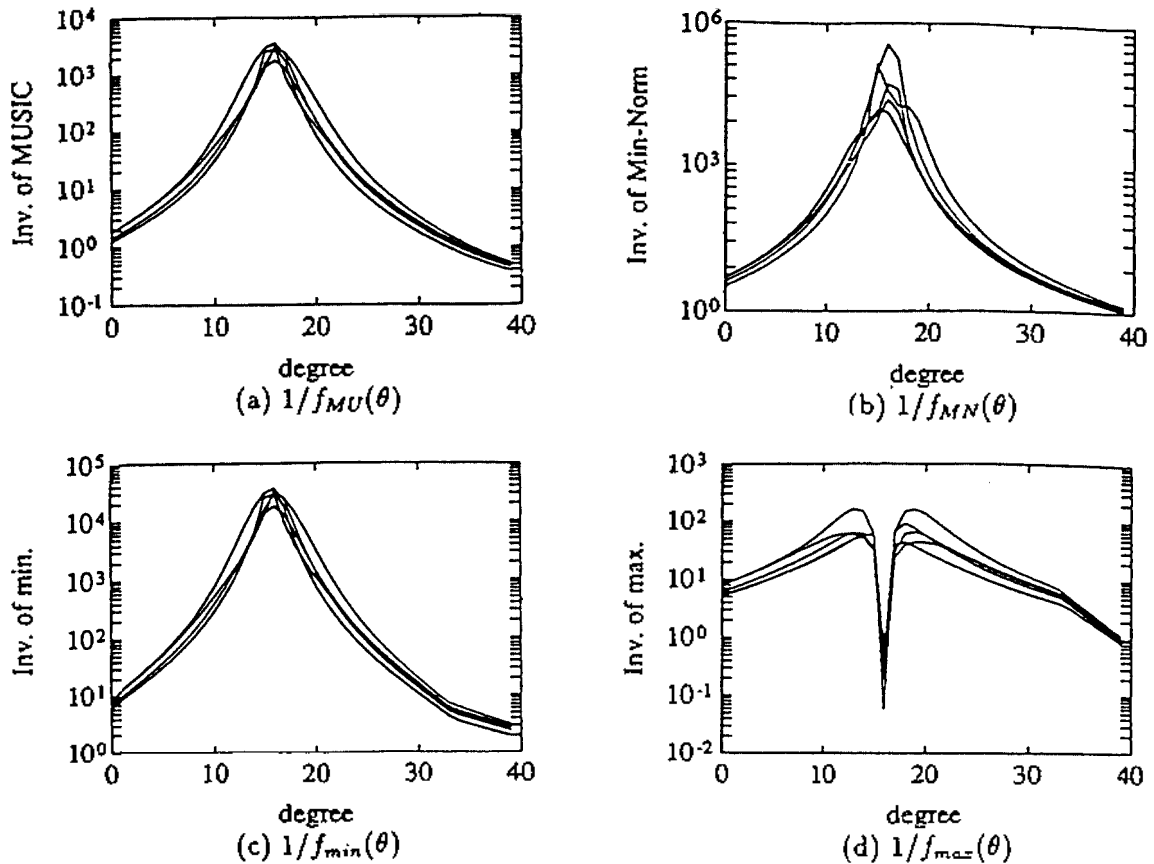


그림 1. 신호도착방향이  $15^\circ$ 와  $17^\circ$ 일 때 여러 영 스펙트럼의 역

Figure 1. Inverse of various null-spectra when the two DOA's are  $15^\circ$  and  $17^\circ$ .

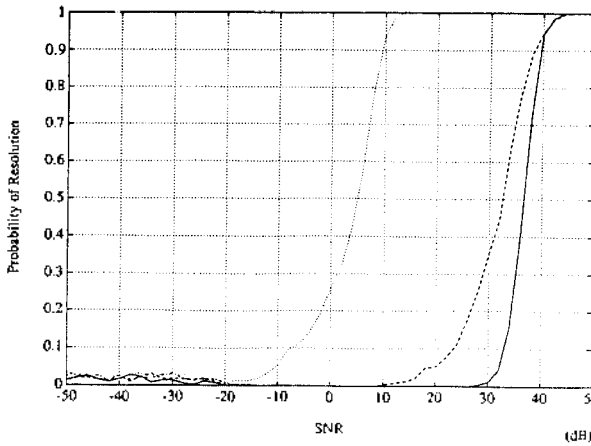


그림 2. 여러 영 스펙트럼의 해상화력(점선:  $f_{max}$ ; 점선:  $f_M$ ; 실선:  $f_{min}$ ,  $\bar{f}_M$ )

Figure 2. Probability of resolution for various null spectra  
(dotted line -  $f_{max}$ ; dashed line -  $f_M$ ; solid line -  $f_{min}$ ,  $\bar{f}_M$ ).

그림 2에서 두 신호원은 상관관계가 없고, 도착 방향은 15°와 17°이며 잡음은 백색 잡음이라 가정하였다. 그림 2의 각 곡선은 2 dB 간격으로 얻었고 각 점은 500번을 시행하여 얻었다. 해상 화력 기준으로 보아서도 최대 영 스펙트럼의 해상 능력이 다른 영 스펙트럼보다 나음을 알 수 있다.

V. 맺음말

참 (true) 공분산 행렬의 고유벡터와 표본 (sample) 공분산 행렬의 고유 벡터로 만들어지는 교란 (perturbation) 행렬을 써서 일반화된 영 스펙트럼을 정의하기 위해 초평면을 도입하였다. 일반화된 영 스펙트럼의 상하한을 유도하여 각각을 최대, 최소 영 스펙트럼이라 하였다. MUSIC 영 스펙트럼과 Min-Norm 영 스펙트럼은 잡음 부공간만으로 정의되지만 일반화된 영 스펙트럼은 신호와 잡음 부공간 모두에 바탕을 두고 정의되었다.

컴퓨터 모의 실험으로 여러 영 스펙트럼의 해상 화력을 얻었고, 이것으로부터 최대 영 스펙트럼이 다른 영 스펙트럼보다 뛰어난 해상 능력을 가지고 있음을 보였다. 보기를 들면, 같은 해상 화력을 얻고자 했을 때 최대 영 스펙트럼이 필요로 하는 SNR이 다른 영 스펙트럼이 필요로 하는 SNR보다 20-30dB 쯤 낫다는 것을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. K.M. Buckley and X.L. Xu, "Spatial-spectrum estimation in a location sector," *IEEE Trans. Acous. Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP 38, pp. 1842-1852, November 1990.
2. R. Kumaressan and D.W. Tufts, "Estimating the angles of arrival of multiple plane waves," *IEEE Trans. Aero. Electr. Sys.*, vol. AES-19, pp. 134-139, January 1983.
3. P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound: Further results and comparisons," *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-38, pp. 2140-2150, December 1989.
4. P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer Rao bound," *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP 37, pp. 720-740, May 1989.
5. H.B. Lee and M.S. Wengrovitz, "Statistical characterization of the MUSIC null-spectrum," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-39, pp. 1333-1347, June 1991.

▲崔 眞 豪 (Jinho Choi)

1967년 2월 22일생



1989년 2월: 서강대학교 전자공학 학과(공학사, magna cum laude)

1991년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학석사)

1991년 3월~현재: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정

▲尹 眞 鮮 (Jin Seon Yun)

1969년 2월 7일생:

1991년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학사)

1993년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사)

1993년 3월~현재: 현대전자 산업전자 연구소 연구원

▲宋 翊 鎭(Lickho Song) 1960년 2월 20일생



1982년 2월 : 공학사(magna cum laude), 서울대학교 전자공학과

1984년 2월 : 공학석사, 서울대학교 대학원 전자공학과

1985년 8월 : M.S.E., Dept. of EE, Univ. of Pennsylvania

1987년 5월 : Ph. D., Dept. of EE, Univ. of Pennsylvania

1987년 3월 ~ 1988년 2월 : Bell Communications Research(Morristown) 연구원

1988년 3월 ~ 1991년 8월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 조교수

1989년 : IEEE 한국지회 세무

1990년, 1992년 : 한국음향학회 편집위원

1991년 9월 ~ 현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 부교수

1989년 9월, 1990년 8월 : URSI 신진과학자상

1991년 11월 : 한국통신학회 학술상

관심연구영역 : 검파와 추정, 통계학적 신호처리, 배열신호처리, 스펙트럼 분석, 통신이론

▲朴 聖 日(Seong Il Park) 1968년 5월 19일생



1990년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학사)

1993년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학석사)

1993년 3월 ~ 현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정