

周波數領域LMS 2차 適數Volterra 필터와 그 分析

The Frequency-Domain LMS Second-order Adaptive Volterra Filter and Its Analysis

鄭 益 周*

(Ikjoo Chung)

ABSTRACT

The adaptive algorithm for the Volterra filter is considered. Owing to its simplicity, the LMS algorithm for adaptive Volterra filter(AVF) is widely used as in linear adaptive filters. However, the convergence speed is unsatisfactory. For improving the convergence speed, the frequency domain LMS second order adaptive Volterra filter (FLMS-AVF) is proposed and analyzed. We show that the time and frequency domain LMS AVF's have the same steady state performance under appropriate conditions. Moreover, it can be shown that this algorithm can improve the convergence speed significantly by applying self-orthogonalizing method.

요 약

本論文에서는 Volterra 필터의 適應化에 대하여 연구하였는데, 속도 개선을 위하여 周波數領域 LMS 2차 適應Volterra 필터를 提案하고 그 性能을 分析하였다. 分析에 있어서는 어떤 조건을 만족할 때 時間領域 適應Volterra 필터와 周波數領域 適應 Volterra 필터가 같은 性能을 가지는지를 밝혔다. 收斂速度를 향상시키기 위해서는 自己直交化(self-orthogonalizing) 알고리즘을 적용하여야 하는데 이를 적용하는 알고리즘을 誘導하였다.

實驗을 통하여 分析의 有效함을 보였고 또한 自己直交化 알고리즘이 適應Volterra 필터의 收斂速度를 얼마나 향상시키는지를 보였다. 計算量과 收斂速度를 고려하여 他알고리즘과 比較하였다.

I. 序 論

線型필터를 이용한 信號處理 기술은 여러 분야에 서 매우 중요한 부분을 차지하고 있으며, 또한 그것의 設計, 分析, 具現 面에 있어서 만족할 만한 결과를 주고 있다. 그러나 몇몇 경우에 있어서 필터의 성능 만으로는 만족할 만한 결과를 주지 못하며 따라서 새로운 기술을 要하게 된다. 특히 飽和型(Saturation-type)의 非線型성이 존재할 경우가 그 대표적인 예이다.[1] 이러한 非線型시스템을 線型필터를 이용하여 認知하려고 하면 경우에 따라서는 전혀 쓸모 없는 결

과를 얻게 될 수도 있다. 이와 같은 경우 외에도 대부분의 시스템들은 어느 정도 非線型성을 가지고 있으며 따라서 非線型필터를 사용하게 되면 보다 좋은 결과를 얻을 수 있다. 그러나 非線型필터는 대부분의 非線型문제들이 그러하듯이 分析하기가 매우 까다롭고 또한 상당한 計算量 필요로 한다. 이런 이유로 인하여 실제 응용에서는 그다지 많이 사용되지 않았으며, 非線型성이 존재하는 경우에도 이를 線型化하여 線型필터로 대처하곤 하였다. 최근들어 이러한 非線型필터들의 適應化가 활발히 연구되고 있으며 기술의 발달로 어느 정도 具現 가능하게 되었다.[2,3] 本論文에서는 그 중에서 多項式 시스템의 適應化에 대하여 연구하였는데 多項式시스템이란 出力信號가 잘린 Volterra 級數展開(truncated Volterra series

*강원대학교 전자공학과
접수일자: 1992년 12월 5일

expansion)를 통하여 入力信號와 관련되어지는 非線型시스템이다.[1] 이러한 適應多項式필터를 適應Volterra필터(adaptive Volterra filter, AVF)라고 부른다. 아직까지는 그 복잡성으로 인하여 주로 2次 Volterra필터를 대상으로 하고 있다. 適應Volterra필터의 응용범위로는 非線型 채널等化[4], echo除去[3], 雜音除去[2]와 가우스過程(Gaussian process)의 非線型函數의 檢出[5] 등을 들 수 있다. 뿐만 아니라 生物現象(biological phenomenon)의 모델링[6], 半導體素子の 特性化(characterization)[7], 바닷물의 漂流振動(drift oscillation)의 모델링[8]등 매우 다양하게 응용된다.

2절, 3절 4절에서는 Volterra필터와 周波數領域 LMS알고리즘에 대하여 간략히 설명하고 5절에서는 適應信號處理에서 速度를 개선하기 위해 사용되는 周波數領域에서의 自己直文化알고리즘을 適應Volterra필터에 적용한 周波數領域 LMS 2次 適應Volterra필터(FLMS-AVF)를 제안하고 分析한다. 6절에서는 컴퓨터 모의실험을 통하여 제안된 알고리즘이 기존의 알고리즘에 비하여 그 성능이 개선되었음을 보였다.

II. Volterra필터

非線型필터를 設計함에 있어서 마주치는 첫번째 문제는 그것을 어떻게 規定하고 표현하는가 하는 것이다. 그 중에 하나가 다음과 같은 형태이다.

$$y_n = h_0 + \sum_{k=1}^p \left[\sum_{S_k} h_k(m_1, m_2, \dots, m_k) x_{n-m_1}, x_{n-m_2}, \dots, x_{n-m_k} \right] \quad (1)$$

여기서 x_n 은 入力, y_n 은 出力이고 $h_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$ 는 變數集合 S_k 를 가지는, K 次元필터의 加動係數列(weight sequence)이다. S_k 는 m_1, m_2, \dots, m_k 에 있어서 合(summation)의 範圍를 지정한다. 식(1)이 p 개의 項으로 잘린 離散Volterra級數를 나타내므로 이것을 p 次 Volterra필터라고 부른다. 불필요한 복잡성을 피하기 위해 m_1, m_2, \dots, m_k 의 어떤 順列(permutation)에 대해서도 $h_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$ 의 값이 같다는 점에서 $h_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$ 가 對稱的이라고 假定한다. x_n 과 d_n 이 平均 0의 定常不規則過程(stationary random process)이라고 하고 d_n 과 出力 y_n 사이의 MSE를 最少化하는 Volterra필터 加動係數를 구한다고 하자. Volterra필터의 線型性 덕분에 MSE는 全體最少를

가지며 따라서 直交斜影(orthogonal projection) 정리를 이용할 수 있다. 最少MSE Volterra필터의 殘留(residual) 誤差는 필터 入力 x_n 뿐만 아니라 入力信號의 가능한 모든 곱(product) 즉 $x_{n-m_1}x_{n-m_2}\dots x_{n-m_k}$, $k=1, 2, \dots, p$ 에 대하여 直交關係에 있다. y_n^{opt} 을 最少MSE Volterra필터의 出力이라고 하면 모든 $(m_1, m_2, \dots, m_k) \in S_k$, $k=1, 2, \dots, p$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$E[d_n - y_n^{opt}] = 0 \quad (2a)$$

$$E[(d_n - y_n^{opt})x_{n-m_1}x_{n-m_2}\dots x_{n-m_k}] = 0 \quad (2b)$$

따라서 最適필터 加動係數는 다음 方程式으로 부터 구할 수 있다.

$$E[d_n] = h_0 + \sum_{k=1}^p \left[\sum_{S_k} h_k(m_1, m_2, \dots, m_k) E[x_{n-m_1}, x_{n-m_2}, \dots, x_{n-m_k}] \right] \quad (3a)$$

$$E \left[d_n \prod_{j=1}^k x_{n-\sigma_j} \right] = h_0 E \left[\prod_{j=1}^k x_{n-\sigma_j} + \sum_{k=1}^p \sum_{S_k} h_k(m_1, m_2, \dots, m_k) E \left[\prod_{j=1}^k x_{n-\sigma_j} \prod_{l=1}^k x_{n-m_l} \right] \right] \quad (3b)$$

여기서 모든 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \in S_p$, $p=1, 2, \dots, p$ 에 대하여 식(3b)가 성립한다. 식(3a)와 식(3b)로부터 最適Volterra필터 加動函數를 구하기 위해 필요로 하는 事前情報과 計算量이 어느 정도 인지를 분명히 알 수 있다. p 次 Volterra필터의 경우 $2p$ 개의 自己相關函數와 p 개의 相互相關函數를 알아야만 한다. 대부분의 실제의 경우 높은 次數의 相關函數들은 알려져 있지 않으며 이들을 推定하기 위해서는 엄청난 양의 計算을 필요로 한다. 더구나 S_k 가 N 개의 정수로 만들어진 곱集合(productset)으로 주어진다면

$$\sum_{k=0}^p \binom{N+k-1}{k} \quad (4)$$

갯수 만큼의 線型方程式을 풀어야 한다. 이러한 計算量은 $p=2$ 인 경우에도 무시하지 못할 정도이다. 엄청난 計算量 때문에 실제 응용되는 것은 2次 Volterra필터가 대부분이므로 이에 대하여 좀더 살펴보기로 한다. 2次 Volterra필터의 경우 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_n = h_0 + \sum_{j=0}^{N-1} w_j x_{n-j} + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_{i,k} x_{n-i} x_{n-k} \quad (5)$$

여기서 w_i 는 線型 필터 加重係數이고 v_{ik} 는 2차 필터 (quadratic filter) 加重係數를 나타낸다. 2차 필터 加重係數는 對稱이다. 즉 $v_{ik} = v_{ki}$ 이다. 원하는 信號 d_n 과 필터 出力 y_n 사이의 MSE

$$\epsilon = E[|d_n - y_n|^2] \quad (6)$$

을 最少化하여야 한다. 여기서 d_n 과 y_n 은 平均 0이고 定常的이라고 假定한다. 우선 필터出力이 偏差의 이 지 않기 위해서는 $E[d_n] = 0$ 이므로 $E[y_n] = 0$ 이어야 한다. 이로부터

$$h_0 = - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_{i,k} r_x(j-k) \quad (7a)$$

$$r_x(j) = E[x_n x_{n-j}] \quad (7b)$$

을 얻을 수 있다. 식(7a)를 식(5)에 代入하면 다음과 같이 된다.

$$y_n = \sum_{j=0}^{N-1} w_j x_{n-j} + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_{i,k} (x_{n-i} x_{n-k} - r_x(j-k)) \quad (8)$$

最少MSE를 주는 w_i 와 $v_{i,k}$ 를 구하기 위해서는 x_n 의 2차, 3차, 4차의 自己相關函數로 이루어진 行列의 逆行列을 구해야 하는데 그 計算量은 N^6 정도가 된다. N 이 클경우 거의 비현실적이며 또한 特異性 (singularity)문제가 발생할 수도 있다. 따라서 2차 Volterra 필터의 경우라 할지라도 보다 簡單하게 解를 구하고 分析을 하기 위하여 入力 x_n 이 가우시안이라고 假定을 한다. 우선 식(8)을 行列을 이용하여 표기 하자.

$$y_n = w' x_n + \text{tr}\{v [x_n x_n' - R_x]\} \quad (9)$$

여기서

$$x_n = [x_n x_{n-1} \dots x_{n-N+1}]' \quad (10a)$$

$$w = [w_0 w_1 \dots w_{N-1}]' \quad (10b)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \dots & v_{0,N-1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N-1,0} & v_{N-1,1} & \dots & v_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

이다. 식(3a)와 식(3b)로부터 最少MSE 2차 Volterra 필터를 위해서는 다음 方程式을 만족해야 한다.

$$E[d_n x_n] = E[x_n w' x_n + x_n \text{tr}\{v(x_n x_n' - R_x)\}] \quad (11a)$$

$$E[d_n x_n x_n'] = E[x_n x_n' w' x_n + x_n x_n' \text{tr}\{v(x_n x_n' - R_x)\}] \quad (11b)$$

식(11a)와 식(11b)로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$p_x = R_x w \quad (12a)$$

$$T_x = 2R_x v R_x \quad (12b)$$

여기서

$$p_x = E[d_n x_n], \quad R_x = E[x_n x_n'] \quad (13a)$$

$$T_x = E[d_n x_n x_n'] \quad (13b)$$

이다. 따라서 最適 필터 加重係數는

$$w_{\text{opt}} = R_x^{-1} p_x \quad (14a)$$

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{2} R_x^{-1} T_x R_x^{-1} \quad (14b)$$

을 얻는다. 식(14a)로부터 2차 最適 Volterra 필터의 線型 필터 加重係數는 最適 線型 필터의 그것과 같다는 것을 알 수 있다. 따라서 入力이 가우시안인 2차 Volterra 필터는 미리 設計된 線型 필터에 2차 필터를 그림 1과 같이 並列로 덧붙임으로써 얻을 수 있다. 한편 2차 Volterra 필터의 MSE는 다음과 같다.

$$\epsilon = E[d_n^2] + w'(R_x w - 2p_x) + 2\text{tr}\{v(R_x v R_x - T_x)\} \quad (15)$$

식(14a)와 식(14b)를 식(15)에 代入함으로써 最少 MSE를 얻을 수 있다.

$$\epsilon_{\text{min}} = E[d_n^2] - p_x' R_x^{-1} p_x - \frac{1}{2} \text{tr}(R_x^{-1} T_x R_x^{-1} T_x) \quad (16)$$

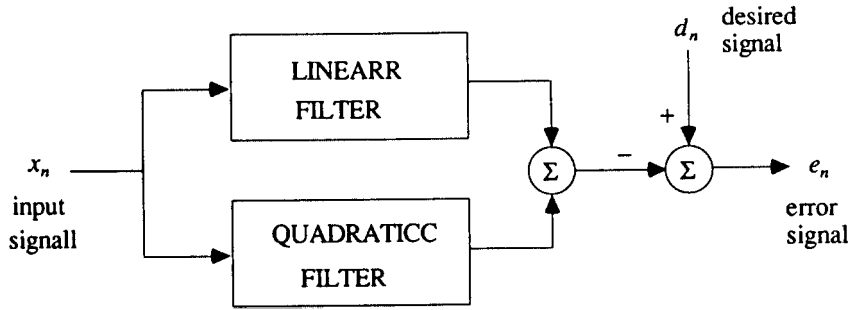


그림 1.가우시안 入力信號를 가지는 2次 Volterra필터의 構造

Ⅲ. 時間領域 LMS 2次 適數 Volterra필터

時間領域 LMS 2次 適數 Volterra필터(time-domain LMS second-order adaptive Volterra filter, TLMS-AVF)의 線型필터 加重係數의 適數알고리즘은 일반 線型필터의 경우와 同一이므로 여기서는 2次 필터 加重係數의 適數알고리즘에 대하여만 살펴 본다.[1,9] 우선 MSE의 v_n 에 대한 偏微分을 구하면

$$\frac{\partial e_n}{\partial v_n} = 2E[2R_x v_n R_x - T_x] = 2E[e_n x_n x_n'] \quad (17)$$

와 같이 되고 推定器로서 아래와 같이 標本推定器를 사용하면

$$\frac{\partial e_n}{\partial v_n} \cong \frac{\partial e_n^2}{\partial v_n} = -2e_n x_n x_n' \quad (18)$$

다음과 같은 適數式을 얻는다.

$$v_{n+1} = v_n + \mu_v x_n x_n' e_n \quad (19)$$

따라서 複素數를 入力으로 하는 2次 適數 Volterra 필터를 위한 LMS알고리즘은 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$e_n = d_n - x_n' w_n - \text{tr}\{v_n [x_n x_n' - R_x]\} \quad (20a)$$

$$w_{n+1} = w_n + \mu_w \bar{x}_n e_n \quad (20b)$$

$$v_{n+1} = v_n + \mu_v \bar{x}_n x_n' e_n \quad (20c)$$

μ_w 는 線型필터 부분의 收斂因子(convergence factor)를 나타내고 μ_v 는 2次필터 부분의 收斂因子를 나타낸다. $-$ 는 複소공역(complex conjugate)을, $*$ 는

복소공역 轉置(complex conjugate transpose)를 나타낸다. 알고리즘이 收斂할 充分條件은

$$0 < \mu_w < \frac{2}{N\sigma_x^2} = \frac{2}{\text{tr}R_x} < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (21a)$$

$$0 < \mu_v < \frac{1}{N^2\sigma_x^4} = \frac{1}{(\text{tr}R_x)^2} < \frac{1}{\text{tr}(R_x^2)} < \frac{1}{\lambda^2_{\max}} \quad (21b)$$

로 주어진다. 또한 線型필터와 2次필터에서 起因하는 超過 MSE는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\epsilon_w = \frac{1}{2} \mu_w \epsilon_{\min} \text{tr}R_x \quad (22a)$$

$$\epsilon_v = \frac{1}{4} \mu_v \epsilon_{\min} [2\text{tr}(R_x^2) + (\text{tr}R_x)^2] \quad (22b)$$

Ⅳ. 周波數領域 LMS알고리즘

TLMS-AVF의 경우도 LMS 알고리즘을 이용하는 대부분의 線型필터들이 그러하듯이 느린 收斂速度가 문제가 된다. 더구나 2次필터 加重係數들은 일반적으로 線型필터 加重係數들 보다 더 느리게 收斂하므로 適數Volterra필터의 경우 收斂速度를 向上시키는 알고리즘이 절실히 요구된다. 그 중에 한 방법이 序論에서 언급 했듯이 周波數領域에서 自己直交化알고리즘을 이용하는 것이다. 이번 節에서는 周波數領域 LMS(frequency-domain LMS, FLMS) 알고리즘에 대하여 살펴본다.[10,11] 다음 節에서는 이 알고리즘을 2次 適數Volterra필터에 적용할 것이다. FLMS알고리즘은 다음과 같다. 여기서 z_n 은 周波數領域에서의 複素數 加重係數를 나타낸다.

$$z_{n+1} = z_n + \eta \bar{s}_n e_n^f \quad (23a)$$

$$s_n = Fx_n = [s_{n,0}s_{n,1}\cdots s_{n,(N-1)}]^t \quad (23b)$$

$$e'_n = d_n - z'_n s_n \quad (23c)$$

식(23a)에서의 η 는 周波數領域에서의 收斂因子이고 식(23b)에서 F 는 DFT를 나타내는 行列로서 (l, m) 번째 요소(element)는 아래와 같다.

$$f_{lm} = \exp\{-j2\pi(l-1)(m-1)/N\}, 1 \leq l, m \leq N \quad (24)$$

周波數領域 加重係數와 周波數領域 最少 MSE는 다음과 같이 구해진다.

$$z_{opt} = R_s^{-1} p_s \quad (25a)$$

$$\epsilon'_{min} = E[d_n \bar{d}_n] - p_s^t R_s^{-1} p_s \quad (25b)$$

여기서

$$p_s = E[d_n \bar{s}_n], R_s = E[s_n \bar{s}_n] \quad (26)$$

이다. 한편 時間領域 變數들과는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$z_{opt} = (\bar{F}R_x F)^{-1} (\bar{F}p_x) = F^{-1} (R_x^{-1} p_x) = F^{-1} w_{opt} \quad (27a)$$

$$\epsilon'_{min} = E[d_n \bar{d}_n] - (\bar{F}p_x)^t (\bar{F}R_x F)^{-1} (\bar{F}p_x) = E[d_n \bar{d}_n] - p_x^t R_x^{-1} p_x = \epsilon_{min} \quad (27b)$$

식(27b)로부터 周波數領域에서의 最少MSE는 時間領域에서의 最少MSE와 같음을 알 수 있다. 收斂範圍와 超過MSE는 아래와 같이 주어진다.

$$0 < \eta < \frac{2}{\text{tr} R_s} \quad (28a)$$

$$\epsilon'_s = \frac{1}{2} \eta \text{tr} R_s \epsilon'_{min} = \frac{1}{2} \eta \text{tr} R_s \epsilon_{min} \quad (28b)$$

또한

$$\text{tr} R_s = \text{tr}(N\Lambda_x) = N \text{tr} \Lambda_x = N \text{tr} R_x \quad (29)$$

이 성립함을 보일 수 있으므로 식(28b)와 식(29)로부터

$$\eta = \frac{\mu}{N} \quad (30)$$

이 만족 되면 時間領域 LMS알고리즘과 周波數領域 LMS알고리즘이 定常狀態에서의 성능이 같아짐을 알 수 있다. 여기서는 μ 는 時間領域 LMS알고리즘의 收斂因子이다. 이제 周波數領域에서의 自己直交화 알고리즘에 대하여 살펴보도록 하겠다. 自己直交화 LMS알고리즘은 아래와 같다.

$$z_{n+1} = z_n + \gamma R_s^{-1} s_n e'_n \quad (31)$$

여기서 γ 는 自己直交화 FLMS알고리즘의 收斂因子이다. 그리고 이 알고리즘의 收斂範圍와 超過MSE는 다음과 같이 주어진다.

$$0 < \gamma < \frac{2}{\text{tr}(R_s^{-1} R_s)} = \frac{2}{N}$$

$$\epsilon'_s = \frac{1}{2} \gamma \text{tr}(R_s^{-1} R_s) \epsilon'_{min} = \frac{1}{2} \gamma N \epsilon_{min} \quad (32b)$$

식(32b)으로부터

$$\gamma = \mu \sigma_z^2 \quad (33)$$

이 만족되면 自己直交화 FLMS알고리즘의 超過MSE와 時間領域 LMS알고리즘의 超過MSE가 같아짐을 알 수 있다. 한편 식(31)에서 R_s^{-1} 의 計算을 필요로 하는데, 이것은 R_s 가 근사적으로 對角行列이란 사실로부터 각각의 對角要素(diagonal element)만을 推定하여 逆數를 취함으로써 간단히 얻을 수 있다. 따라서 自己直交화 FLMS알고리즘은 다음과 같이 요약할 수 있다.

$$a) s_n = Fx_n \quad (34a)$$

$$b) y_n = z'_n s_n \quad (34b)$$

$$c) e'_n = d_n - y_n \quad (34c)$$

$$d) \hat{R}_s^{-1}(n) \equiv \text{diag}(\hat{S}_{n,0}^{-1}, \hat{S}_{n,1}^{-1}, \dots, \hat{S}_{n,N-1}^{-1})$$

$$\hat{S}_{n,j} = \beta \hat{S}_{n-1,j} + (1-\beta)(s_{n,j} \bar{s}_{n,j}), 0 \leq j \leq N-1 \quad (34d)$$

$$e) z_{n+1} = z_n + \gamma \hat{R}_s^{-1}(n) \bar{s}_n e'_n \quad (34e)$$

V. 周波數領域 LMS 2차 通數Volterra 필터

周波數領域 LMS 2차 通數Volterra 필터(frequency-domain LMS secondorder adaptive Volterra filter, FLMS-AVF) 알고리즘을 다음과 같이 재안한

다.[13].

$$e'_n = d_n - s'_n w_n - \text{tr}\{v_n[s_n s'_n - R_s]\} \quad (35a)$$

$$w_{n+1} = w_n + \eta_w \bar{s}_n e'_n \quad (35b)$$

$$v_{n+1} = v_n + \eta_v \bar{s}_n s'_n e'_n \quad (35c)$$

여기서 w_n 과 v_n 은 각각 周波數領域 線型필터 加重係數와 周波數領域 2次필터 加重係數를 나타낸다. 또한 η_w 와 η_v 는 周波數領域에서의 收斂因子들이다. 그리고 入力 s_n 은 식 (23b)에서 定義된 바와 같다. 3절과 4절의 分析결과들을 이용하면 周波數領域에서의 最適加重係數는

$$w_{\text{opt}} = R_s^{-1} p_s \quad (36a)$$

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{2} R_s^{-1} T_s R_s^{-1} \quad (36b)$$

와 같이 주어지며 最少 周波數領域 MSE는 다음과 같이 주어진다.

$$\epsilon'_{\text{min}} = E[d_n \bar{d}_n] - p_s R_s^{-1} p_s - \frac{1}{2} \text{tr}(R_s^{-1} T_s R_s^{-1} T_s) \quad (37)$$

여기서

$$R_s = E[\bar{s}_n s'_n] \quad (38a)$$

$$p_s = E[d_n \bar{s}_n] \quad (38b)$$

$$T_s = E[d_n \bar{s}_n s'_n] \quad (38c)$$

이다. 한편 식 (9)나 식(35a)에서 適數 알고리즘을 구현하기 위해서는 自己相關 行列을 알아야만 한다. 일반적으로 실제 응용에서는 이 自己相關行列은 漸化推定器(recursive estimator)를 이용하여 推定한다. 本 論文에서는 Koh와 Power의 論文에서 처럼 간단함을 위하여 自己相關行列이 주어졌다고 假定하고 그것의 適數은 고려하지 않았다.[9]. 4절에서와 같은 방식을 이용하면 아래와 같이 周波數領域의 變數들을 時間領域 變數들로 표현할 수 있다.

$$w_{\text{opt}} = (\bar{F}R_x F')^{-1} (\bar{F}R_x) = F^{-1} w_{\text{opt}} \quad (39a)$$

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{2} (F^{-1} R_x^{-1} \bar{F}^{-1}) (\bar{F}T_x F) (F^{-1} R_x^{-1} \bar{F}^{-1}) = F^{-1} v_{\text{opt}} \bar{F}^{-1} \quad (39b)$$

$$\epsilon'_{\text{min}} = E[d_n \bar{d}_n] - p_s F F' F^{-1} R_x^{-1} \bar{F}^{-1} \bar{F} p_x - \frac{1}{2} \text{tr}(F^{-1} R_x^{-1} \bar{F}^{-1} \bar{F} T_x F F^{-1} R_x^{-1} \bar{F}^{-1} \bar{F} T_x F) = \epsilon_{\text{min}} \quad (39c)$$

식(39c)에서는

$$\text{tr}(A^{-1} B A) = \text{tr} B \quad (40)$$

의 性質이 이용되었다. 식(39c)로부터 FLMS-AVF의 最少 MSE는 時間領域의 그것과 같음을 알 수 있다. 또한 周波數領域에서의 線型필터와 2次필터에 의해 起因하는 超過 MSE는 각각 다음과 같다.

$$\epsilon'_{\text{w}} = \frac{1}{2} \eta_w \epsilon'_{\text{min}} \text{tr} R_s \quad (41a)$$

$$\epsilon'_{\text{v}} = \frac{1}{4} \eta_v \epsilon'_{\text{min}} [2 \text{tr}(R_s^2) + (\text{tr} R_s)^2] \quad (41b)$$

식(41a)은 4절에서 다루었으므로 식(41b)에 주목하면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\text{v}} &= \frac{1}{4} \eta_v \epsilon'_{\text{min}} [2 \text{tr}(\bar{F}R_x F' \bar{F}R_x F) + \text{tr}^2(\bar{F}R_x F)] \\ &= \frac{1}{4} \eta_v \epsilon'_{\text{min}} [2 \text{tr}(N^2 F^{-1} R_x^2 F) + N^2 \text{tr}^2(F^{-1} R_x F)] \\ &= \frac{1}{4} \eta_v \epsilon'_{\text{min}} [2 \text{tr}(R_x^2) + (\text{tr} R_x)^2] \end{aligned} \quad (42)$$

한편 收斂을 위한 조건은 아래와 같다.

$$0 < \eta_w < \frac{2}{N \text{tr} R_x} \quad (43a)$$

$$0 < \eta_v < \frac{1}{N^2 (\text{tr} R_x)^2} \quad (43b)$$

3절에서 얻은 결과들과 比較해 보면

$$\eta_w = \frac{\mu_w}{N} \quad (44a)$$

$$\eta_v = \frac{\mu_v}{N^2} \quad (44b)$$

을 만족할때 FLMS-AVF의 定常狀態에서의 성능과 TLMS-AVF의 定常狀態 성능이 같음을 알 수 있다.

이제 自己直交化알고리즘을 FLMS-AVF에 적용하고 그 성능을 分枝하고자 한다. 線型필터 부분은 4절에서 설명한 식(34a)에서 부터 식 (34e)까지의 알고리즘과 同一하므로 2次필터 加重係數의 自己直交化 適數알고리즘에 대하여만 고려할 것이다. w_n 과 v_n 이 $\{d_n, s_n\}$ 에 대하여 獨立이라고 假定하고 $\Delta v_n = v_n - v_{\text{opt}}$ 라고 定義하자.

그러면

$$E[e_n^T \hat{s}_n s_n^*] = -2R_s E[v_n] R_s + T_s \quad (45)$$

가 된다. 한편 식(35c)은

$$\begin{aligned} E[\Delta v_{n+1}] &= E[\Delta v_n] + \eta_v E[e_n^T \hat{s}_n s_n^*] \\ &= E[\Delta v_n] + \eta_v (-2R_s E[v_n] R_s + T_s) \\ &= E[\Delta v_n] + \eta_v (-2R_s E[v_n] R_s + 2R_s v_{opt} R_s) \\ &= E[\Delta v_n] - 2\eta_v R_s E[\Delta v_n] R_s \end{aligned} \quad (46)$$

와 같이 쓸 수 있다. 식(46)로 부터 다음과 같은 自己直交化알고리즘을 誘導할 수 있다.

$$v_{n+1} = v_n + \gamma_v R_s^{-1} \hat{s}_n s_n^* e_n^T R_s^{-1} \quad (47)$$

식(47)을 식(46)의 형태로 쓰면

$$E[\Delta v_{n+1}] = (1 - 2\gamma_v) E[\Delta v_n] \quad (48)$$

와 같이 된다. 여기서 γ_v 는 FLMS-AVF의 2차필터 부분의 收斂因子를 나타낸다. 식(48)로 부터 收斂을 위한 γ_v 의 範圍는

$$0 < \gamma_v < 1 \quad (49)$$

로 주어지며 2차필터에서 起因하는 超過 MSE는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} e_v^2 &= \frac{1}{4} \gamma_v e_{\min}^2 [2\text{tr}(R_s^{-1} R_s R_s R_s^{-1}) + \text{tr}^2(R_s^{-1} R_s)] \\ &= \frac{1}{4} \gamma_v e_{\min}^2 (2N + N^2) \end{aligned} \quad (50)$$

R_s 가 근사적으로 對角行列이란 사실을 이용하면 2차필터 부분의 自己直交化알고리즘은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$a) \quad s_n = Fx_n \quad (51a)$$

$$b) \quad y_n = w_n^T s_n - \text{tr}\{v_n [s_n s_n^* - R_s]\} \quad (51b)$$

$$c) \quad e_n^T = d_n - y_n \quad (51c)$$

$$\begin{aligned} d) \quad \hat{R}_s^{-1}(n) &\equiv \text{diag}\{\hat{S}_{n,0}, \hat{S}_{n,1}, \dots, \hat{S}_{n,N-1}\} \\ \hat{S}_{n,j} &= \beta \hat{S}_{n-1,j} + (1-\beta)(s_{n,j} \hat{s}_{n,j}), \quad 0 \leq j \leq N-1 \end{aligned} \quad (51d)$$

$$e) \quad v_{n+1} = v_n + \gamma_v R_s^{-1} \hat{s}_n s_n^* e_n^T R_s^{-1} \quad (51e)$$

식(34d)과 식(51d)에서 알 수 있듯이 自己直交化알고리즘을 위해서는 $\hat{R}_s^{-1}(n)$ 은 計算하여야 하는데 이 $\hat{R}_s^{-1}(n)$ 은 線型필터 부분이나 2차필터 부분에서 同一하게 사용되므로 한쪽에서 구한 것을 나머지 한쪽에 그대로 사용할 수 있다.

VI. 實驗결과 및 檢討

이는 節에서는 前節들에서 分析한 TLMS-AVF와 FLMS-AVF에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 分析의 有效함을 보이고 그 성능을 比較할 것이다. 實驗을 위하여 시스템 認知 문제를 고려했으며 시스템 認知에 대한 블록도가 그림 2에 나와 있다. 여기서 未知시스템의 線型 및 2차필터 加重系數들은 각각 다음과 같이 주어졌다.

$$w_{opt} = [0.35 \ 0.65 \ 0.65 \ 0.35] \quad (52a)$$

$$v_{opt} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.25 & 0.5 & -0.4 \\ -0.25 & 0.5 & 0.2 & -0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ -0.4 & -0.2 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (52b)$$

入力信號 x_n 은 아래와 같이 주어진 2차 AR(autoregressive)過程이다.

$$x_n = 0.75x_{n-1} - 0.5x_{n-2} + \omega_n \quad (53)$$

여기서 ω_n 은 分數1의 白色 가우스超過이고 그림 2의 η_n 은 分數 0.001의 白色 가우스加算雜音이다. 우선 그림 3은 TLMS-AVF의 收斂特性으로서 收斂因子가 커짐에 따라 收斂速度가 느려짐을 알 수 있다. 그림 4는 TLMS-AVF와 FLMS-AVF의 성능을 比較한 것인데 $\eta_w = \mu_w / 4$ 와 $\eta_v = \mu_w / 16$ 을 택함으로써 두 필터의 성능이 거의 同一함을 알 수 있다. 이는 5절의 分析과 일치하는 것이다. 그림 5는 自己直交化 FLMS-AVF와 TLMS-AVF를 比較한 것이다. 우선 두 필터의 定常狀態의 特性이 같게 하기 위하여 다음과 같이 하였다. 時間領域필터의 線型필터의 收斂因子를 $\mu_w = \alpha / \sigma^2$ 의 正規化된 收斂因子를 사용하였다. 周波數領域필터의 線型필터에 대한 收斂因子 γ_w 를 α 와 같게 놓으면 두 필터의 線型필터 부분은 같은 定常狀態의 성능을 갖는다.[10] 2차필터에 대해서는 다음을 만족하는 收斂因子 γ_v 를 사용하였다.

$$y_v = \frac{2 \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 + N^2 \sigma_x^4}{(2N + N^2)} \mu_v \quad (54)$$

위의 조건이 만족되면 식(50)과 식(22b)로부터 두 필터의 2차필터 부분은 같은 定常狀態 성능을 가짐을 알 수 있다. 그림 5에서 알 수 있듯이 定常狀態의 성능은 같으면서 時間領域필터보다 훨씬 빠르게 收斂함을 알 수 있다.

한편, 收斂速度가 빠른 最少自乘法(least square)을 이용한 適數Volterra필터와 比較해보기 위하여 RLS알고리즘을 이용한 適數Volterra필터(RLS-AVF)를 택하였다.[12] 그림 6은 RLS-AVF의 경우 엄청난 양의 計算을 감수한 덕분에 그림에서 보듯이 빠른 收斂速度를 얻을 수 있다. 실제 計算量을 比較해보면 傾斜法을 이용하는 2次 AVF의 경우 $O[N^2]$ 의 곱셈이 필요한 반면 RLS-AVF는 $O[N^4]$ 의 곱셈을 필요로 한다. 또한 自己直交化 FLMS-AVF의 경우 自己直交化를 위하여 $5N$ 의 곱셈과 FFT를 위하여 N 의 곱셈, 총 $6N$ 의 곱셈이 추가된다. FFT를 위하여 N 의 곱셈을 필요로 하는 理由는 한 샘플씩 이동시키면서 FFT를 할 경우 漸化式을 이용할 수 있기 때문이다.[11] 물론 처음 한번은 $M \log_2 N$ 의 곱셈을 필요로 한다. 정확한 계산량은 표 1에 나와있다.

한편, RLS-AVF와 傾斜化를 이용한 나머지 두 適數필터(FMLS-AVF, TLMS-AVF)의 收斂과정에서 相異한 양상을 볼 수 있다. RLS-AVF의 경우 초기

收斂이 완만하고 어느정도 收斂이 이루어지면 (그림에서 適應回數 1,000에 해당하는 부분) 收斂速度가 가속화된다. 반면 傾斜法을 이용하는 두 알고리즘은 초기收斂이 상당히 빠르지만 이내 速度가 느려져 時間이 갈수록 가장 느린 速度로 收斂하는 모드(mode)가 지배적이 되어 收斂速度가 느려지게 된다. 그림 7은 서로 다른 λ 값에 대한 RLS-AVF의 收斂特性을 보여주는데 $\lambda=0.99$ 일때가 $\lambda=0.995$ 일때 보다 收斂速度가 빠르지만 RLS 알고리즘의 결점인 數值的 不安定性이 나타난다. 數值的 不安定性은 FWL(finite word length) 效果 때문에 起因하는데 傾斜法을 이용하는 알고리즘의 경우 보다 RLS 알고리즘이 훨씬 심각하다. 이를 해결하기 위한 여러 변형된 알고리즘이 연구되었고 高速알고리즘의 등장과 더불어 이 분야는 더욱 활발히 연구되어지고 있다.

표 1. 2次 適應Volterra필터의 計算量 比較

	곱셈	덧셈
TLMS-AVF	N^2+2N+2	N^2+N
FLMS-AVF	N^2+3N+2 $(N^2+2N+2+N \log_2 N)$	N^2+2N+1 $(N^2+N+M \log_2 N)$
自己直交化 FLMS-AVF	N^2+8N+2 $(N^2+7N+2+N \log_2 N)$	N^2+3N+1 $(N^2+2N+M \log_2 N)$
RLS-AVF	$2N^4+4N^3+6N^2+4N+3$	$3N^4+6N^3+4N^2+N-1$

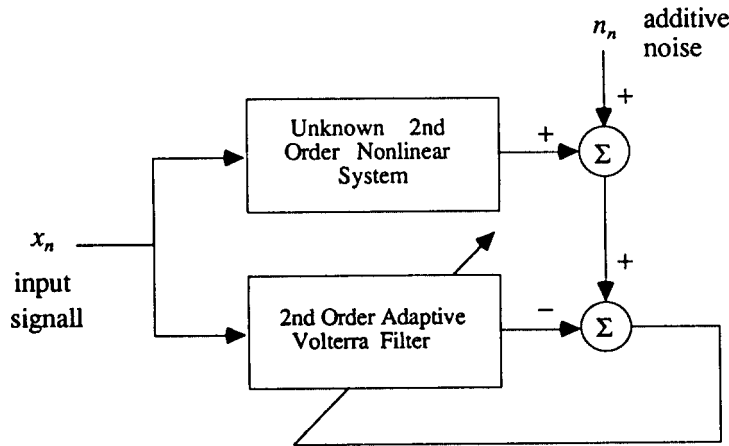


그림 2. 2次 適應Volterra필터를 이용한 시스템 認知

VI. 結 論

本論文에서는 適應非線型 필터의 개선된 알고리즘을 제안하고 그 분석에 대하여 연구하였다. 非線型 필터들은 非線型性 존재하는 문제에 있어서 線型 필터의 사용만으로는 만족스런 結果를 얻지 못할 경우 사용되어 질 수 있는데 分析의 까다로움과 상당량의 計算을 필요로 하므로 현재까지는 널리 사용되고 있지 않다. 그러나 최근들어 非線型 필터중 多項式 필터의 일종인 Volterra 필터가 디지털 IC 技術의 발달에 힘입어 그 適應具現이 활발히 進行되고 있으며 또한 그 알고리즘들도 속속 등장하고 있다. 時間領域 LMS 2차 適應 Volterra 필터(TLMS-AVF)는 역시 간단함으로 인하여 가장 선호되고 있으나 느린 收斂速度가 문제가 된다. 이 느린 收斂速度를 改善하기 위하여 周波數領域 LMS 2차 適應 Volterra 필터(FLMS-AVF)를 提案하고 그 性能을 分析하였다. 分析에 있어서는 FLMS-AVF의 收斂條件과 誤差整率을 구하였으며 또한 어떤 조건을 만족할 때 TLMS-AVF와 FLMS-AVF가 같은 性能을 가지는지를 밝혔다. 특히, 收斂速度를 향상시키기 위해서는 自己直交化 알고리즘의 적용을 요하는데 이를 적용할 수 있는 알고리즘을 誘導하고 그 性能을 分析하였다.

實驗을 통하여 分析의 有效함을 보였다. 自己直交化 알고리즘을 시스템 認知에 적용하여 適應 Volterra 필터의 收斂速度가 얼마나 향상되는가를 보였다. 最少自乘法을 이용한 RLS-AVF와의 比較에서는 自己直交化 FLMS-AVF의 收斂速度가 RLS-AVF보다 느린 반면 計算量이 적고 數值的으로 安定됨을 보였다.

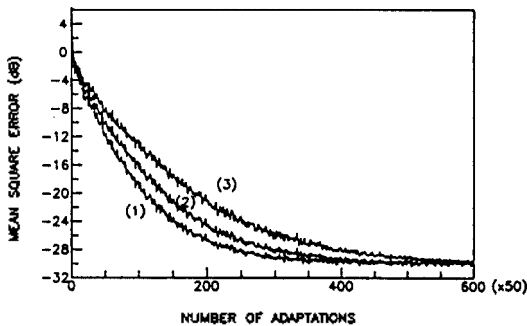


그림 3. TLMS-AVF의 收斂特性
 (1) $\mu_w = 0.01, \mu_r = 0.0025$ (2) $\mu_w = 0.01, \mu_r = 0.002$
 (3) $\mu_w = 0.01, \mu_r = 0.001$

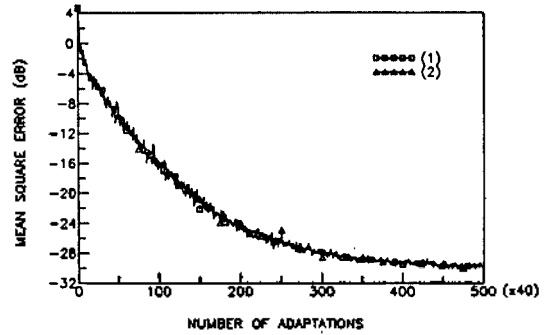


그림 4. TLMS-AVF와 FLMS-AVF의 收斂特性比較
 ($N=4, \sigma_s^2 = 1.778, \mu_w = 0.01 / \sigma_s^2, \mu_r = 0.0027 / \sigma_s^4, \eta_w = \mu_w / N$, and $\eta_r = \mu_r / N^2$)
 (1) TLMS-AVF (2) FLMS-AVF

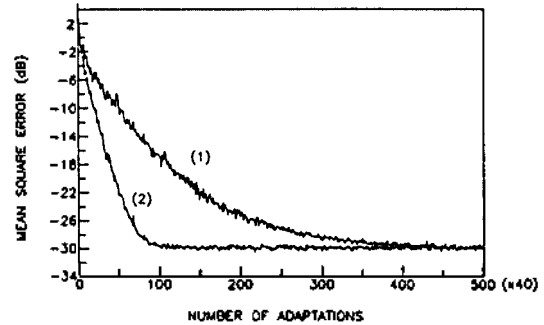


그림 5. 自己直交化 FLMS-AVF와 TLMS-AVF의 收斂特性比較
 ($\sigma_s^2 = 1.778, \mu_w = 0.01 / \sigma_s^2, \mu_r = 0.0027 / \sigma_s^4, \gamma_w = 0.01$, and $\gamma_r = 0.00315$)
 (1) TLMS-AVF (2) 自己直交化 FLMS-AVF

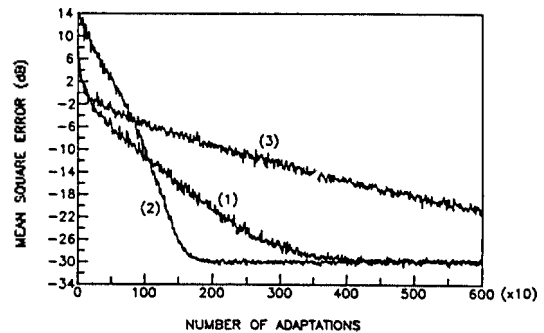


그림 6. RLS-AVF, TLMS-AVF, 自己直交化 FLMS-AVF의 收斂特性比較
 ($\sigma_s^2 = 1.778, \mu_w = 0.01 / \sigma_s^2, \mu_r = 0.0027 / \sigma_s^4, \gamma_w = 0.01$, and $\gamma_r = 0.00315$)
 (1) 自己直交化 TLMS-AVF
 (2) RLS-AVF ($\lambda = 0.995$)
 (3) TLMS-AVF

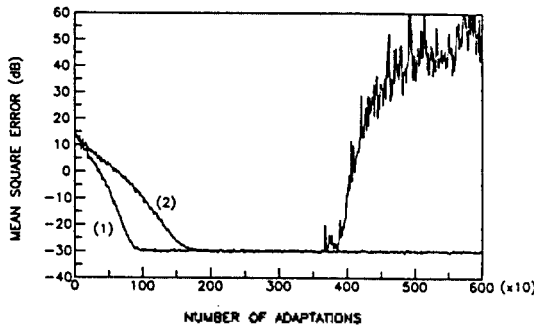


그림 7. 서로 다른 λ 에 대한 RLS-AVF의 收斂特性
(1) $\lambda=0.995$ (2) $\lambda=0.99$

1. V. J. Mathews, "Adaptive Polynomial Filters," IEEE Tran. Signal Processing Magazine, pp.10-27, July 1991.
2. M. J. Coker and D.N. Simkins, "A nonlinear adaptive noise canceller," in Proc. 1980 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, 1980, pp.470-473.
3. G. L. Sicuranza, A. Bucconi, and P. Mitri, "Adaptive echo cancellation with nonlinear digital filters," in Proc. 1984 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, 1984.
4. Benedetto, S. and E. Biglieri, "Nonlinear equalization of digital satellite channels," IEEE J. Selected Areas on Communications, Vol. SAC-1, pp. 57-62, 1983.
5. Kenefic, R. J. and D. D. Weiner, "Application of the Volterra functional expansion in the detections of Gaussian processes," IEEE Transactions on Communications, Vol. COM-33, No.3, pp.276-279, March 1985.
6. Hunter, I. W. and M. J. Korenberg, "The identification of nonlinear biological systems: Wiener and Hammerstein cascade models," Biological Cybernetics, Vol.55, pp. 135-144, 1986.
7. Javed, A., B. A. Syrett, and P. A. Goud, "Intermodulation distortion analysis of reflection-type IMPATT amplifiers using Volterra series representation," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-25, No. 9, pp. 729-733, September 1977.

8. Koh, T., E. J. Powers, and R. W. Miksad, "An approach to time-domain modeling of nonlinear drift oscillations in random seas," Proceedings of the International Symposium on Offshore Engineering, Rio de Janeiro, Brazil, 1983.
9. T. Koh and E. J. Powers, "Second-order Volterra filtering and its application to nonlinear system identification," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-33, pp.1445-1455, Dec. 1985.
10. J. C. Lee and C. K. Un, "Performance analysis of frequency-domain block LMS adaptive digital filters," IEEE Trans. Circuits and Syst., vol. CAS-36, pp.173-189, Feb. 1989.
11. S. S. Narayan, A. M. Peterson, and M. J. Narashima, "Transform domain LMS algorithm," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-31, pp.1073-1083, Oct. 1983.
12. C. E. Davila, A. J. Welch, and H. G. Rylander, III, "A second order adaptive Volterra filter with rapid convergence," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, pp.1259-1263, Sep. 1987.
13. Ikjoo Chung, Souguil Ann, "On the Frequency-Domain LMS Second-order Adaptive Volterra Filter," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, submitted Dec. 1991, revised Oct. 1992.

▲鄭 益 周



1964년 1월 9일 생
1986년 2월 : 서울대학교 전자
공학과 졸업
1988년 2월 : 서울대학교 전자
공학과 석사학위
취득
1992년 2월 : 서울대학교 전자
공학과 박사학위
취득

1991년 4월 ~ 1992년 7월 : 두인전자 선임연구원
1992년 8월 ~ 현재 : 강원대학교 전자공학과 전임강사
로 재직

*주 관심분야는 적응신호처리, 음성신호처리 및 실
시간 구현 등임