

# 폰트리아긴의 최대원리의 수치적 해법\*\*

— 파업기간중 노사관계 모형을 중심으로 —

## Numerical Solution for the Pontryagin's Maximum Principle Problem

오형재\*

Hyungjae Oh

### Abstract

Although the Pontryagin's maximum principle theory is widely applied in control problems, its contributions to the solution procedure have been restricted just to figure out the rough picture of true solutions, probably due to the complexity of the two-point boundary value problems.

This paper discusses a numerical approach to solve the control problems in connection with the two-point boundary value problems. A model of labor-management negotiation during a strike has been constructed and solved explicitly by use of DVCPR subroutine introduced in IMSL.

The results have been turned out that the management is better increase wage very slowly during the strike period, while, on the labor side, it is more effective to show the high intensity of demonstration against the company at the outset and gradually decrease it.

### 1.서론

일반적으로 통제이론(control theory) 혹은 최적과정(optimal process) 이론에는 독립변수에 해당하는 통제변수(control variable)와 통제 불가한 변수인 상태 변수(state variable), 그리고 목적함수(objective function)가 등장한다. 그리고 통제 문제를 푼다는 의미는 주어진 제약조건하에

서 목적함수를 최적(극대화 혹은 극소화) 시켜주는 통제 변수를 구하는 과정을 말한다.

이때 경쟁 관계에 있는 둘 혹은 그 이상의 경쟁자가 상호 협조(cooperative) 혹은 비협조적(non-cooperative) 상황 하에서 그들이 사전에 설정한 목적 함수를 최적의 상태로 이끌어주는 해를구하고자할때 이문제는 금방 게임(differential game)의 형태를 띠게 된다.

\*\* 본논문은 서울시 학술연구조성비지원에 의하여 연구되었음.

\* 서울시립대학교 전산통계학과

최적과정이론은 20세기초에 태동하기 시작한 변분학(calculus of variation)에 그 근원을 두고 있다고하여도 큰 부리가 없을 것이다 [16]. 변분학은 1940년 발표된 Bliss의 저서[2]를 토대로 1956년 Pontryagin은 “최적과정의 이론”을 썼고[3], 1962년에는 세사람과 같이 “최적과정 수학적이론”[17]을, 같은 해에 Katz는 Pontryagin 이론의 중심이 되는 최대원리(maximum principle)에 대한 이산형 버전[9]을 발표함으로써 이제 통제문제는 통제 및 상태변수가 연속 혹은 이산적인 모든 경우를 다룰 수 있게 되었다.

그러나 최대원리의 수치해석적 접근을 위해서는 이산형 버전이 적절한 알고리즘을 거쳐 수작업이나 컴퓨터로 처리되어야 하는 바, 이에 관련된 문헌 등을 살펴보면 다음과 같다:

Pearson은 비선형계획법에서 거론되는 Kuhn-Tucker 정리를 이산형 최대원리에의 적용가능성에 대해 논하였으나 [15], 수치적 접근에 대한 언급은 없었으며 Noton은 최적 통제이론에 나오는 두 점 경계문제에 수치적 계산 방법을 제시하면서도 이문제에 대한 복잡성과 느린 수렴속도 때문에, 동적계획법으로 부터 수렴속도가 비교적 빠른 근사값을 구하는 알고리즘을 제시하였다[13].

그리고 같은 해 같은 논문집에 Darcy는 두점경계문제를 Electronics Associates 231R 아나로그 컴퓨터를 이용, 시스템이 비선형인 경우까지도 해를 도출하는 방법을 제시하였으나 아나로그 컴퓨터에 의한 해법을 제약측, 시스템의 대략적인 (large class) 해의 윤곽을 파악하는 선을 크게 벗어 나지 못했다. 서두에서도 언급하였지만 최적한 상태변수를 도출해내는 통제변수를 찾는 문제는 결국 두점 경계치문제에 귀결된다.

본 논문은 IMSL에 발표된 DVCPR 서브 프로그램을 사용함으로써, 어떠한 형태의 두점 경계치 문제도 해결할 수 있음을 보이고 있다. 지금까지 Pontryagin의 최대원리가 환상적인 이론임에도 불구하고 그 가치를 심분 발휘하지 못한 이유는 계산의 복잡성으로, 이에 관련된 대부분의 논문이 비교 정태/동태 분석(comparative statics/dynamics) 등을 통한 phase portrait 다이어그램을 그리는 정도에 그쳤던 이유도 사실은 컴퓨터를 통한 수치해석적 접근이 불가능했기 때문으로 사료된다 [14].

본논문의 제2장에서는 변분학의 근간이 되는 Euler-Lagrange 방정식의 기본개념을 토대로 하여 Pontryagin의 최대원리의 기본정리를 유도하고 제 3장에서는 파업기간중

노사 관계모형을 제시하며, 제4장에서는 S/W 패키지를 이용하여 이들 모형의 해답을 도출하였다.

## 2. 최적통제문제의 기본개념

### 2.1 개요

최적통제문제는 연속변수(혹은 연속시간)인 경우와 이산적변수인 경우 모두를 포함하고 있지만 본 논문에서는 연속변수인 경우만 취급하였다. 그 이유는 연속변수인 경우가 이산변수인 경우보다 모형이 더 단순할 뿐 아니라 Pontryagin 자신도 연속변수인 경우를 위주로 그의 논리를 전개해 나갔기 때문이다.

이제 변수(시간)  $t$ 가  $0 \leq t \leq T$  구간내의 값을 취할 때 다음 목적함수를 극소화 하는 문제를 고찰하기로 한다:

$$\min J = \Psi(X(T)) + \int_0^T L(X(t), u(t)) dt$$

$$\text{제약조건 : } \dot{X}(t) = f(X(t), u(t)) \quad (2.1)$$

$$X(0) = X_0, u(t) \in U$$

(2.1)에 라그랑주승수인 벡터  $\lambda(t)$ 를 (2.2)와 같은 형태로 도입한다:

$$J = \Psi(X(T)) + \int_0^T [L(X, u) + \lambda'(t)(f(X, u) - \dot{X})] dt \quad (2.2)$$

그리고 Hamiltonian H를

$$H(X, u, \lambda) = L(X, u) + \lambda' f(X, u) \quad (2.3)$$

로 정의하면

$$J = \Psi(X(T)) + \int_0^T [H(X, u, \lambda) - \lambda' \dot{X}] dt \quad (2.4)$$

와 같이 표시된다.

(2.4)에서  $-\int_0^T \lambda \dot{X} dt$ 를 부분 적분하면

$$-\int_0^T \lambda \dot{X} dt = (-\lambda X)_0^T + \int_0^T \dot{\lambda} X dt,$$

이를 (2.4)에 대입하면

$$J = \Psi(X(T)) - (\lambda X)_0^T + \int_0^T (H(X, u, \lambda) + (\lambda \dot{X})) dt \quad (2.5)$$

를 얻는다. 이때 (2.5)에서 J의 변분  $\delta J$ 는:

$$\begin{aligned} \delta J &= J(X + \delta X, u + \delta u) - J(X, u) = \delta X \frac{\partial J}{\partial X} + \delta u \frac{\partial J}{\partial u} \\ &= \left( \frac{\partial \Psi(T)}{\partial X} \right)' \delta X(T) - (\lambda \delta X)_0^T \\ &\quad + \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial X} \right)' \delta X + \lambda \delta \dot{X} + \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)' \delta u \right] dt \\ &= \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X} - \lambda \right)' \delta X \right]_T + (\lambda \delta X)_0 \\ &\quad + \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial X} + \lambda \right)' \delta X + \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)' \delta u \right] dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

단,  $\left( \frac{\partial H}{\partial X} \right)' = \left( \frac{\partial H}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial X_n} \right),$   
 $\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)' = \left( \frac{\partial H}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u_n} \right)$

와 같이 표시되는데 여기서 우리는 (2.6)이 0이되는 조건을 찾으려한다. 그 이유는 X와 u의 변분  $\delta J$ 가 0이 될 것이기 때문이다.

(2.6)에서

$$\lambda = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad t \in (0, T) \quad (2.8)$$

이면 (2.6)은 다음과 같이 된다:

$$\delta J = \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X} - \lambda \right)' \delta X \right]_T + (\lambda \delta X)_0 \quad (2.9)$$

만일  $X(t)$ 가  $X(0)$ 의 값으로  $X_0$ 와 같은 특정한 값을 가지면 (2.9)의  $\delta X(0)$ 는 0이 되며,  $X(T)$ 마저 특정한 값을 갖는 경우는  $\delta X(T)$ 도 0이되어  $\lambda(t)$ 는 (2.9)을 0으로 만드는 데에 아무런 제약이 없다.

통상  $X(t)$ 에는 특정한 값을 주지 않으므로 (2.9)가 0이되는 조건은

$$\lambda(T) = \frac{\partial \Psi(T)}{\partial X} \quad (2.10)$$

이다.

참고로  $X(T)$ 에 특정한 값을 부여하면 본 통제문제는 해를 갖지 못하던가 혹은 해를 갖는다 하더라도 그 해는 목적함수에 의해 영향을 받지 않는 해가 된다.

목적함수를 극대화할 경우는 Hamiltonian H를

$$H = -L(X, u) + \lambda f \quad (2.11)$$

로 정의하고  $\lambda(t)$ 는

$$\lambda(T) = -\frac{\partial \Psi(T)}{\partial X} \quad (2.12)$$

와 같이 놓아야 한다.

### 3. 수치적해법

#### 가. Riccati 방정식의 출현

Pontryagin의 최대원리의 수학적 계산의 복잡성은 두점 경계치문제에서 나온다. 즉 본문제가 Bang-Bang문제가 아니라면 (P. 501, [16])  $u(t)$ 는 최종적으로  $X$ 와  $\lambda$ 의 함수로 표시되어 결국 통제문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{X} = F(X, \lambda), \quad X(0) = X_0 \quad (3.1)$$

$$\dot{\lambda} = G(X, \lambda), \quad \lambda(T) = \pm \frac{\partial \Psi(T)}{\partial X}$$

단,  $\frac{\partial \Psi(T)}{\partial X}$ 의 부호는 목적함수 극대화시 -, 극소화시 + 임

Riccati 방정식에 의한 해법은 (3.1)을 해석적으로 풀기 위하여  $\lambda(t)$ 를  $X(t)$ 만의 함수로 가정하여 시도하는 기법인데 [12], 이경우는 목적함수가 다음과 같이 이차선형함수(linear system with quadratic cost function) 이어야 한다.

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^T [X(T)'Q(t)X(t) + u(t)'R(t)u(t)]dt$$

s.t.,  $\dot{X} = A(t)X(t) + B(t)u(t)$  (3.2)

단, Q, R : 대칭 행렬  
U : 제약 없음

그러나 이러한 제약조건하에서의 해법은 범용성의 폭이 좁아 목적함수를 다룰수 있는 기법의 필요성은 여전히 남는다.

### 나. 두점경계치 문제

두점경계치 문제는 초기치 문제와 더불어 상미방 문제에서 특수해를 구하는데에 이용되는 대표적인 제약조건이다.

가장 간단한 2계 미방에서의 두점경계치문제의 수치적 해법에는 크게 두가지가 있다. 그 하나는 shooting 방법이고 다른 하나는 finite difference 방법이다[10].

전자는 문제의 두번째 경계치를 개략적 초기치 조건으로, 인위적으로 만들어 푼다음,최초 설정해놓은 경계치조건을 만족시키는지의 여부를 반복적으로 검증하는 방법이며, 후자는 독립변수의 주어진 구간을 n개의 소구간으로 나눈후 각각의 점에 대한 도함수 값을 차분(finite difference) 방정식으로 나타낸후 n-1개의 연립방정식을 세워 문제를 푸는 방법이다.

예를 들어 2계상미분방정식이

$$\ddot{X} + a_1(t)\dot{X} + a_2(t)X = f(t) \quad (3.3)$$

$X(a) = X_a, X(b) = X_b$

로 주어졌을때

$$\frac{dX}{dt} = \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{2h}, \quad \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}}{h^2}, \quad (3.4)$$

이를 (3.3)에 대입하면

$$\frac{X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}}{h^2} + a_1(t_i) \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{2h} + a_2(t_i)X_i = f(t_i), \quad (3.5)$$

$i = 1, n-1$

이 된다.

이제 구간 (a,b)를 n등분하여  $a = t_0, b = t_n$ 으로 표시한 후  $t = t_0$ 부터  $t = t_{n-1}$ 까지 (3.5)에 따라 식을 세우면 연립방정식의 수는 n-1개가 되고 변수도 n-1개가 되어 문제를 풀수 있다. 그러나 우리의 경우 두점경계치 문제의 형태는 (3.1)과 같다;

### 4. DVCPR S/W 소개

IMSL에 수록된 본 패키지에 대한 사용자 안내서는 참고문헌[19]을 참고 바라며 이를 두점 경계치 문제에 적용한 한 예를 보이면 다음과 같다.

<예제>

$$y_1^{(IV)}(t) + 5Y_1''(t) + 4Y_1(t) = 40 \sin 3t \quad (4.1)$$

경계조건 :  $Y_1(0) = 2$

$$Y_1'(0) = 6 \quad (4.2)$$

$$Y_1''(2\pi) = -Y_1(2\pi) - Y_1'(2\pi) + 3$$

$$Y_1'''(2\pi) = -9Y_1(2\pi) - 3Y_1'(2\pi)$$

<해법>

(4.1)을 우선 다음과 같이 1계 미방의 연립미방으로 변형시킨다;

$$\dot{Y}_i = Y_{i+1}, \quad i=1,3 \quad (4.1)'$$

$$\dot{Y}_4 = -5Y_3 - 4Y_1 + 40 \sin 3t$$

단, (4.2)의 좌변 :  $Y_i^{(i)}(\cdot) = Y_{i+1}(\cdot), i=0,3 \quad (4.2)'$

예제를 구태여 (4.1), (4.2)와 같이 택한 이유는 예제문제가 (4.1)', (4.2)'로 변형되고 다시

$$X_i = Y_i, \quad \lambda_i = Y_{i+2}, \quad i=1,2$$

로 놓았을때 (4.1)', (4.2)'가 (3.1)의 형태와 같게 하기위함이다.

DVCPR 패키지를 사용함에 있어 주의 해야할 몇가지 사항을 기술하면 다음과 같다.

우선 (4.1)'의 좌변이  $[\dot{Y}_1, \dot{Y}_2, \dot{Y}_3, \dot{Y}_4]$ 가

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{Y}_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial \dot{Y}_1}{\partial Y_4} \\ \frac{\partial \dot{Y}_2}{\partial Y_1} & & \frac{\partial \dot{Y}_2}{\partial Y_4} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \dot{Y}_4}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial \dot{Y}_4}{\partial Y_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

와 같이 표시되어야 한다. 본 예제는 선형미방이므로 (4.4)의 우변을 AY로 나타냈을때 A는,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

처럼 쉽게 나타낼수 있으나, 비선형인 경우는 A의 요소들이 매우 복잡하게 표시된다. 또한 (4.2)의 경계조건은 다음과 같이 입력된다:

$$F(1) = Y_A(1) - 2.0$$

$$F(2) = Y_A(2) - 6.0$$

$$F(3) = Y_B(3) - Y_B(1) + Y_B - 3$$

$$F(4) = Y_B(4) - 9Y_B(1) + 3Y_B(2)$$

즉 입력요령에 Y의 첨자 A, B는 구간 (A, B)의 A, B를 각각 의미하며 F(i)=0, i=1,4를 의미한다.

끝으로 사용자안내서에 나오는 변수중 NGMAX는 맨 처음 큰수를 대입한 후 조금씩 줄여나가는 것이 효과적이고 NGRID는 Y<sub>1</sub>(t)의 값을 NGRID 수 만큼 출력시킨다는 의미의 변수이나 연산시 컴퓨터는 tolerance를 감안, 프로그램 자체내에서 오차를 의식하며 계산하므로 최초 입력한 NGRID수 보다 더 많은 점들을 출력시켜 주기도 한다.

(4.1)의 문제를 패키지가 풀이 출력한 결과를 보이면 그림 4-1과 같다(다음 페이지 참조).

그림 4.1의 X(i)는 시간 변수이고 Y(1,i)는 본 예제의 해이다.

(4.1)의 정확한 해는

$$Y(t) = \sin t + \cos t + \sin 2t + \cos 2t + \sin 3t \quad (4.5)$$

이고 Y(2,i) = Y'(t), Y(3,i) = Y''(t), 그리고 Y(4,i) = Y'''(t)이다. 그림 4.1의 결과는 정확한 해와 잘 일치하고 있다. 근사치와 정확한 해와의 오차는

$$|\text{참값} - Y(k, i)| \leq \Delta BT(k), k=1,4$$

이다.

## 5. 노사관계 중재 모형

### 가. 협상/홍정 모형에 관한 문헌

노사관계의 모형에 대한 명확한 구분은 없으나 이에 관련된 문헌은 협상/홍정(negotiation/bargaining)에 관한 논문이다.

Sebenius는 협상 분석 모형 구축의 어려움을 대략 다음 세가지로 기술하고 있다 [18]. 첫째는 협상을 위한 쌍방간의 표준화된 가정을 세우기가 어렵다는 점이고, 둘째는 특정 게임 참가자에게는 받아들일만한 가정이 상대방에게는 받아들여지지 않는 어려움이고 마지막은 협상 환경조성에 관련된 요소, 구성 그리고 룰 등이 게임 참가자 모두에게 충분히 알려져 있지 않다는 것이다. 따라서 수없이 많은 협상에 관한 이론이 모두 주관적이고 서술적이며 비정량적 일수 밖에 없다는 것이 그의 논지이다.

ABT(2)=0.00111509				
ABT(2)=0.00164570				
ABT(2)=0.00248183				
ABT(2)=0.00437005				
X(I)	Y(1,I)	Y(2,I)	Y(3,I)	Y(4,I)
0.000000	2.000000	6.000000	-5.110055	-35.823898
0.174444	2.938271	4.589461	-10.854617	-28.723892
0.261667	3.294269	3.540881	-13.098017	-22.453857
* * *				
5.931111	-0.169436	5.624719	6.647531	-25.903608
6.105556	0.887650	6.337794	1.272627	-34.634659
6.280000	1.981130	6.016030	-4.997160	-35.878265

그림 4-1 출력결과

Cramton은 불확실성이 협상자 모두에게 균등하게 분포된 상황에서 흥정비용이 발생하는 동적 바겐 모형을 구축하였다[5]. 그는 그 모형 구축에 흥정 대상의 절대적 가격 및 크기에 의존하여 나타나는 직각적인 계약, 지연후 계약 그리고 흥정비용을 쌍방이 부담하고 흥정을 포기시켜 버리는 경우로 구분, 각각의 경우에 대한 평형전략을 제시하였다.

Leitmann은 1974년 파업중인 노사 협상 미분게임 모형을 구축하였다 [11].

그는 노동자측의 요구변수와 사용자측의 허용변수의 차이의 함수로써 연립 양보방정식(simultaneous concession equation)을 세운후 양측에서 사전에 설정한 목적함수를 최적화하는 Nash 평형점을 제시하였다. 그로부터 7년후 Leitmann은 이들 식을 더욱 일반화하고 게임환경도 Nash 평형점 이외에 공표된 선도자(leader)의 의도에 대비한 순응자(follower)의 다양한 대응전략의 경우까지 확장한 stackelberg 해를 정의하였다 [4].

노사관계에 대한 약간 구체적인 모형으로는 Jorgensen의 논문들수있다[8]. 그는 두 생산업체를 대상으로 한 업체는 이윤 극대화를, 다른 업체는 노동자 한 명당 이윤의 극대화를 각각 목적함수로 설정하고, 시장가격은 이들 두 업체에서 출하한 출하량에 반비례한다고 단순화 시킨후, Pontryagin의 최대원리를 이용하여 해답을 도출하였다. 따

라서 이 논문은 파업 기간중의 노사관계에 관련된 모형이라고 보기는 어렵다.

본 논문은 이러한 문헌적 바탕을 토대로 한 업체에서 노사관계가 악화되어 파업에까지 이르렀을 때 사용자는 임금률을, 노동자는 파업의 강도를 통제변수로 한 미분게임의 모형을 구축한후 이를 S/W패키지 (DVCPR)를 이용하여 해를 도출한 것이다.

#### 나. 파업기간 중의 노사관계 모형

##### 1) 노사간의 기본전제

파업기간중 노사 양측은 협상이 원만히 진행되지 못할 경우, 공권력이 투입되면 사용자측이나 노동자측은 치명적인 손해를 입는다고 전제한다.

따라서 양측은 그러한 파경이 나타나지 않는 상황하에서, 사용자측은 임금 상승률을 최소화하고 노동자측은 파업의 강도를 최대한 이용, 파업후의 유형 및 무형의 이점을 극대화 하려 할 것이다.

##### 2) 모형기술 [7]

우선  $F(t)$ 를  $t$ 시간내에 공권력이 투입될 확률(물론 공권력은 사용자측의 요구에 의해 투입되기는 하지만)이라 할 때

$$\dot{F}(t) = (D - U_1(t))U_2(t)(1 - F(t)) \quad (5.1)$$

단,  $U_1(t)$  : 사용자측의 임금인상률  
 $U_2(t)$  : 노동자측의 파업의 강도  
 $D$  : 상수 ( $D > 0$ )

$$H^1 = (C_1 U_1 + (\lambda_1 + K_1))(D - U_1)U_2(1 - F) \quad (5.3)$$

$$H^2 = \left(\frac{1}{2}C_2 U_2^2 + (\lambda_2 + K_2)(D - U_1)U_2\right)(1 - F) \quad (5.4)$$

와 같은 제약식을 세운다. (5.1)의 의미는 t시간이내에 공권력이 투입되지 않은 조건하에 t시간에 공권력이 투입될 확률은 파업의 강도에 비례하며 사용자측의 임금인상률에 반비례한다고 보겠다는 뜻이다. 따라서 자연히  $F(0) = 0$  이다.

파업기간동안 사용자는 최소의 비용으로 협상이 원만히 해결되기를 기대할 것이고 노동자측은 공권력이 없는 상황에서 역시 최소의 비용으로 그들의 요구가 원만히 관철되기를 기대할 것이므로 결국 두 게임참가자는 다음과 같은 미분게임을 실시하게 된다:

사용자측 :

$$\min J_1 = \int_0^T [C_1(U_1)(1 - F) + K_1 \dot{F}] dt - S_1(T)(1 - F) \quad (5.2a)$$

단,  $C_1(U_1)$  : 임금 인상률의 함수로 표시된 회사측 비용  
 $K_1$  : 공권력이 투입되었을때의 damage  
 $S_1(T)$  : T시각때 발생하는 회사측의 권위, 체면등

노동자측 :

$$\min J_2 = \int_0^T [C_2(U_2)(1 - F) + K_2 \dot{F}] dt - S_2(T)(1 - F) \quad (5.2b)$$

단,  $C_2(U_2)$  : 파업강도의 함수로 표시된 노동자측의 제반 비용  
 $K_2$  : 공권력 개입시의 damage  
 $S_2(T)$  : T 시각때 발생하는 노동자측의 기대이익, 입지강화 등

### 다. 해의도출

(5.2)의  $C_1(U_1)$ 을  $C_1 U_1$ 으로,  $C_2(U_2)$ 을  $\frac{1}{2} C_2 U_2^2$ 으로 놓은 후 Hamiltonian 함수를 생각하면

와 같이 된다.

$H^1, H^2$  를  $U_1, U_2$  에 대해 편미분한후 0으로 놓으면 다음을 얻는다:

$$U_1 = D - \frac{C_1 C_2}{(\lambda_1 + K_1)(\lambda_2 + K_2)} \quad (5.5)$$

$$U_2 = D - \frac{C_1}{\lambda_1 + K_1} \quad (5.6)$$

한편  $\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H^i}{\partial F}$ ,  $i=1, 2$ 이므로

$$\dot{\lambda}_1 = C_1 U_1 + (\lambda_1 + K_1)(D - U_1)U_2 \quad (5.7)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 + (\lambda_2 + K_2)(D - U_1)U_2 \quad (5.8)$$

(5.5), (5.6)을 (5.7), (5.8)에 각각 대입하면

$$\dot{\lambda}_1 = C_1 D \quad (5.9)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{C_1^2 C_2}{(\lambda_1 + K_1)^2} \quad (5.10)$$

으로  $\lambda_1$ 가 상수가 되어 이채롭다.

이제 (5.1), (5.9) 그리고 (5.10)을 다음과 같이 모아 보자:

$$\dot{F} = \frac{C_1^2 C_2}{(\lambda_1 + K_1)^2 (\lambda_2 + K_2)} (1-F), \lambda_1 = C_1 D, \lambda_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{C_1^2 C_2}{(\lambda_1 + K_1)^2}$$

위의 1계 연립미방은 DVCPR 서부루틴을 사용하기 위해  $Y_1(t) = F(t)$ ,  $Y_2(t) = \lambda_1(t)$ , 그리고  $Y_3(t) = \lambda_2(t)$ 와 같이 놓으면

$$\dot{Y}_1 = C_1^2 C_2 / (Y_2 + K_1)^2 (Y_3 + K_2) \tag{5.11}$$

$$\dot{Y}_2 = C_1 D \tag{5.12}$$

$$\dot{Y}_3 = \frac{3}{2} C_1^2 C_2 / (Y_2 + K_1)^2 \tag{5.13}$$

단,  $Y_1(0) = 0, Y_2(T) = Y_{2T}, Y_3(T) = Y_{3T}$

와 같이 표시되어 패키지 사용 준비가 다 된셈이다. 앞서도 언급하였지만 본 문제는 비선형 연립 미방 이므로 DVCPR에 입력할 내용중 PD(N,N)을 위해서는

$$A = \|\partial \dot{Y}_i / \partial Y_j\| \quad i, j = 1, 3 \tag{5.14}$$

을 미리 계산하여 두었다가 입력시킨다.

(5.11), (5.12), (5.13)에 나와있는 계수 혹은 경계치를  $T=10, K_1=11, K_2=2.5, C_1=C_2=D=1$  그리고  $Y_{2T}=0, Y_{3T}=0.1$ 로 놓은후 출력시킨 결과는 그림 5-2와 같다.

그림 5.1에서  $ABT(i), i=1, 3$ 은 각각  $Y_1(t)$  값에 대한 최대 오차를 나타낸 것이다.

$u_1$ 과  $u_2$  그리고  $F$ (그림 5.1의 두번째란)에 해당 곡선을 그림으로 나타내면 다음과 같다:

그림 5.2의  $u_1(t), u_2(t)$  곡선은 매우 흥미롭다. 물론 미분게임에 나타나는 각 계수를 임의로 선정후 나타낸 결과 피아기는 하지만 노사간에 파업이 계속되는 동안 사용자 측은 임금인상률을 점차로 높이면서 파업협상에 임하는 것이 최적이고, 노동자측은 처음에 파업의 강도를 최대한

ABT(1) = 0.00804977					
ABT(2) = 0.00000010					
ABT(3) = 0.00450513					
X(1)	Y(1, I)	Y(2, I)	Y(3, I)	U1	U2
0.000000	0.000000	-10.000000	-1.269725	0.187173	1.000000
0.357143	0.175131	- 9.642858	-0.872805	0.547170	0.736842
0.714286	0.242765	- 9.285714	-0.643298	0.685823	0.583333
1.428571	0.312409	- 8.571428	-0.382543	0.805538	0.411765
2.142859	0.342261	- 7.857143	-0.241311	0.859143	0.318182
2.857143	0.358974	- 7.142857	-0.152755	0.889547	0.249259
3.571429	0.369778	- 6.428571	-0.091951	0.909159	0.218750
4.285715	0.277294	- 5.714285	-0.047592	0.922856	0.189189
5.714286	0.387581	- 4.285714	0.012855	0.940730	0.148936
7.142858	0.393859	- 2.857142	0.052081	0.951880	0.122807
8.571429	0.398184	- 1.428571	0.079535	0.959498	0.104478
10.000000	0.401314	0.000000	0.100000	0.965035	0.090909

그림 5-2 출력결과



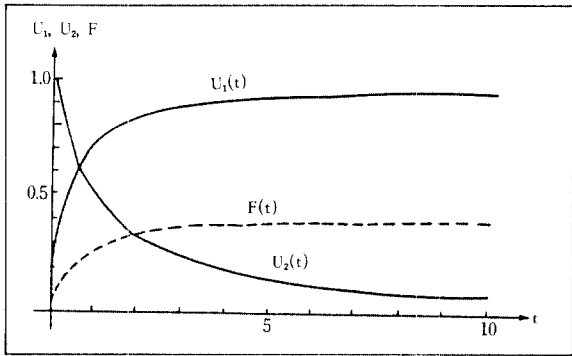


그림5-2  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  및  $F(t)$  곡선

높였다가 시간이 지남에 따라 점차 감소시키는 것이 최적이라는 결론을 도출하고 있다.

한편 노사간의 협상이 상기한 대로 계속되는 동안 공권력의 투입확률은 0.0에서 0.4로 증가하고 있다.

본 논문은 서론에서도 언급한 대로 Pontryagin의 최대원리가 근간이 되는 비협조상황하에서의 두 게임 참가자간의 미분게임을 S/W 패키지를 사용하여 수치적인 접근만을 시도하는데에 목적을 두었으므로, 미분게임에 나타나는 각종 계수에 대한 민감도 분석을 실시하지는 않았다. 그러나 민감도 분석을 여러 각도에서 시도한다면 매우 흥미있는 결과가 도출될 것으로 사료된다.

한 예로

$$\dot{\lambda}_1(t) = C_1 D \quad \text{이므로} \quad \lambda_1(t) = C_1 D t + \lambda_{1T} - C_1 D T$$

에서  $U_2(t)$ 는

$$U_2(t) = C_1 / (C_1 D t + \lambda_{1T} - C_1 D T + K_1) \quad (5.15)$$

이 되는바, 이 때

$$\lambda_{1T} + K_1 < C_1 D T$$

일때는 (5.15)의 분모가 (-) 혹은 0이 되는 수가 있다. 즉 파업의 강도를 (-)로 취할수도 있다는 사실은 현실적으로 무엇을 의미하는지 음미해 볼수도 있다는 말이다.

본문제의 해를 DVCPR 패키지로 도출함에 있어 패키지가 가지고 있는 한가지 제한사항이 발견되었다. 그것은  $t=0$ 인 경우의 조건식 하나에  $t=T$ 인 경우의 경계조건식 2개가 주어진 경우 DVCPR은 그것이 매우 부담이 되었던지 trivial solution ( $Y_1(t)=0, i=1,3$ )만 도출하였다. 따라서 본문제는 (5.12)의  $Y_2(T)=Y_{2T}=0$  대신  $Y_2(0)=-10$ 을 대입하여 풀었다. ((4.2)'의 경우는 전혀 문제가 되지 않았음)

## 6. 결론

1950년대 후반에 발표된 Bellmen [1]의 동적 계획법과 Pontryagin의 최대원리는 적어도 통제문제 혹은 최적 과정에 관심을 가지고 있는 모든 학자들에게 일대 회소식이었다.

Bellmen이 주장한 최적원리(principle of optimality)는 이산형 다단계 의사 결정 모형에 폭넓게 응용되고 있고 Pontryagin의 최대원리는 의사 결정 행위가 이산형이 아닌 연속형 통제 변수에 의해 표현됨으로써, 모형구축 대상의 범위도 넓고 모형 자체도 간결하게 표현되는 이점이 있다. 또한 목적 함수를 최적화하는 통제변수를 구하려는 자가 2인 이상 존재하고, 이들이 상호 비협조 상황하에서 경쟁관계에 있는 경우, Pontryagin의 이론은 미분게임 모형 구축에 아주 요긴하게 응용된다. 그의 이론이 이토록 화려함에도 불구하고 의사 결정행위에 구체적인 결심자료를 제공하지 못한 이유는, 해를 도출하는 과정에서 발생하는 두점 경계치 문제의 계산이 복잡하기 때문이다.

본 논문은 파업중 노사관계 협상 모형을 구축하고 해를 도출하는 과정에서 생성되는 두점 경계치 문제를 IMSL에 수록되어있는 DVCPR 패키지를 이용하여 본 모형의 수치적 해를 구하였다.

노사 관계 협상 모형에 나타난 계수에는 필자가 임의로 선정한 특정한 값이 대입되었고, 도출된 해에 대한 검증도 필요하지만, 연구의 결과는 대체로 파업기간동안 사용자 측은 노동자에 대한 임금인상률을 서서히 증가 시키며 협상에 임하는 것이 최적이고, 노동자측은 파업초기 파업의 강도를 크게 높였다가 서서히 강도를 감쇄시켜 나가는 것이 최적임을 보였다.

본 논문은 Pontryagin의 최대원리의 수치적 해법에 주목적을 두었으므로 노사관계 모형의 해에 대한 민감도 (혹은 시뮬레이션) 분석은 시도 되지 않았으나, 만일 수행된

다면 매우 유익한 의사 결정함수를 양측에 제공할 수 있으리라 사료된다.

한가지 DVCPR 패키지의 제한 사항이 발견되었다. 그것은 A,B 가 두 경계점 이라 할때 (B>A) 경계조건이 A 보다 B에 더 많이 주어지는 경우 프로그램은 이를 소화하지 못하였다.

두점 경계치 문제는 특히 모형이 비선형으로 주어지는 경우, 해의 도출이 불가하고, 설사 선형으로 주어졌다 하더라도 명시적(explicit) 해를 구하기 위해서는, 목적 함수의 형태를 2차함수로 놓아 Reccati 방정식으로 전환시킬때 문제 해결이 가능해지며, 여건이 그렇지 못할경우는 통상 정확한 해가 속할것으로 기대되는 영역을 암시하기위한 phase portrait 도표를 그리는 선에서 끝난다.

본 논문이 이러한 난관을 극복하는데에 적은 보탬이 될것을 기대한다.

## 참 고 문 헌

- [1] Bellman R., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957
- [2] Bliss, G. A., "Lectures on the Calculus of Variations," University of Chicago Press, Chicago, 1946
- [3] Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V.,and Pontryagin, L. S., "On the Theory of Optimal Processes," Doklady Akad. Nauk S.S.S.R., 110, 7-10, 1956
- [4] Chen, S.F., and Leitman, G., "Labor-management Bargaining Modelled as a Dynamic Game," Optimal Control Application Methods, Vol. 1, 11-25, 1980
- [5] Cramton, P.C., "Dynamic Bargaining with Transaction Cost," Management Science, Vol. 37, No. 10, October 1991
- [6] Darcy, V.J., "An Application of an Analog Computer to Solve the Two-point Boundary-value Problem for a Fourth-order Optimal Control Problem," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-12, NO.1, February 1967
- [7] Feichtinger, G., "A Differential Games Solution to a Model of Competition Between a Thief and the Police," Management Science, Vol 29, No. 6, June 1983
- [8] Jorgensen, S., "Labor-managed versus Profit-maximizing Firms: A Differential Games Solution to Problem of Determining Optimal Labor Forces," Optimal Control Theory and Economic Analysis, PP.353-372, North-Holland, Amsterdam, 1982
- [9] Katz, S., "A Discrete Version of Pontryagin's Maximum Principle," J. Electron. Control, Vol. 13, No.2, PP. 179-184, 1962
- [10] Kincaid, D., and Cheney, W., Numerical Analysis, PP. 540-549, International Student Edition, 1990
- [11] Leitmann, G.,and Liu, P.T., "A Differential Game Model of Labor-management Negotiations During a Strike," Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.13, PP. 427-435, 1974
- [12] Luenberger, D.G., Introduction to Dynamic Systems, PP. 413-416, John Wiley & Sons, 1979
- [13] Noton A.R.M., Dyer, P., and Markland, C.A., "Numerical Computation of Optimal Control, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-12, No.1, February 1967
- [14] Oniki, H., "Comparative Dynamics in Optimal Theory," J. Econom. Theory, Vol.6, PP. 265-283, 1973
- [15] Pearson Jr., J.B., Sridhar, R., "A Discrete Optimal Control Problem," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-11, NO.2, April 1966
- [16] Pierre, D.A., Optimization Theory with Application, PP. 62-74, John Wiley & Sons, Inc., 1969
- [17] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko, E.F., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc., New York. London, Sydney, 1962
- [18] Sebenius, J.K., "Negotiation Analysis : A Characterization and Review," Management Science, Vol.38, NO.1, January 1992
- [19] The IMSL Library, Volume 1, IMSL Inc., Revised June 1982

## 부 록 : 노사모형 주 프로그램

REAL X(100),Y(3,100),WORK(5039),XA,XB,PAR(5),  
ABT(3),TOL

```

INTEGER IWORK(904), N, IY, IER, NGMAX,
NGRID, IP, IR
EXTERNAL FCNI, FCNJ, FCNB
DIMENSION U1(20),U2(20)
DATA N,XA,XB,NGMAX,NGRID,IP,IR,3,0,0,10,0,100,8,2,1/
DATA TOL,IY,C1,C2,D,XK1,XK2/0.01,3,1,0,1,0,1,0,11,0,2,5/
PAR(1)=0.0
CALL DVCPR(N, FCNI, FCNJ, FCNB, XA, XB,
    NGMAX, NGRID, IP, IR, TOL, X, Y, IY,
    ABT, PAR, WORK, IWORK, IER)
DO 444 I = 1, N
WRITE(6,777) I, ABT(1)
777 FORMAT( 5X,'ABT ('I1,')='F12.8)
444 CONTINUE
DO 3822 I=1,NGRID
U1(I)=D-C1*C2/((Y(2,I)+XK1)*(Y(3,I)+XK2))
U2(I)=C1/(Y(2,I)+XK1)
3822 CONTINUE
WRITE(6, 999)
999 FORMAT (/,5X,' X(I)',6X,' Y(1,I)',4X,'Y(2,I)',5X,'
Y(3,I)', 6X,' U1 ',7X,'U2')
DO 555 I=1, NGRID
WRITE(6,888) X(I), Y(1,I), Y(2,I), Y(3,I),U1(I),
U2(I)
888 FORMAT( 2X, 6F11.6 )
555 CONTINUE
STOP
END
C
SUBROUTINE FCNI (N, X, Y, YPRIME )
INTEGER N
REAL X, Y(N), YPRIME(N)
DATA C1,C2,D,XK1,XK2/1.0,1.0,1.0,11.0,2,5/
BUNMO=(Y(3) +XK2)*(Y(2)+XK1)**2.0
YPRIME(1) = C1*C1*C2*(1.0-Y(1))/BUNMO
YPRIME(2) = C1*D
YPRIME(3) = 1.5*C1*C1*C2/(Y(2)+XK1)**2.0
RETURN
END
C
SUBROUTINE FCNJ(N, X, Y, PD)
INTEGER N
REAL X, Y(N), PD(N,N)
DATA C1,C2,D,XK1,XK2/1.0,1.0,1.0,11.0,2,5/
Y11=1.0-Y(1)
Y2K1=Y(2)+XK1
Y3K2=Y(3)+XK2
Y2K12=Y2K1**-2.0
Y2K13=Y2K1**-3.0
Y3K22=Y3K2**-2.0
PD(1,1) = -C1*C1*C2*Y2K12/Y3K2
PD(1,2) = -2.0*C1*C1*C2*Y11*Y2K13/Y3K2
PD(1,3) = -C1*C1*C2*Y11*Y2K12*Y3K22
PD(2,1) = 0.0
PD(2,2) = 0.0
PD(2,3) = 0.0
PD(3,1) = 0.0
PD(3,2) = -3.0*C1*C1*C2*(Y(2)+XK1)**-3.0
PD(3,3) = 0.0
RETURN
END
C
SUBROUTINE FCNB(N, YA, YB, F)
INTEGER N
REAL YA(N), YB(N), F(N)
F(1) = YA(1) - 0.0
F(2) = YA(2)+ 10.0
F(3) = YB(3)- 0.1
RETURN
END

```

## ● 저자소개 ●



오형재(吳炯在)

1938. 2. 2일생

학 력 : 1960 육사(이학사)

1964 Univ. of Colorado

응용수학과(이학석사)

1975 한국과학원

산업공학과(공학석사)

1987 서울대학교

산업공학과(공학박사)

관심분야 : OR, 미분게임, 수치해석, 시뮬레이션 등

현 재 : 서울시립대학교 전산통계학과 교수

한국시뮬레이션학회 회장

한국경영과학회 부회장

한국군사OR학회 감사