

## 〈論 文〉

# Eulerian-Lagrangian 혼합모형에 의한 종확산 방정식의 수치해법

## An Eulerian-Lagrangian Hybrid Numerical Method for the Longitudinal Dispersion Equation

田 庚 秀\*, 李 吉 成\*\*

JUN, Kyung Soo and LEE, Kil Seong

**Abstract** □ A hybrid finite difference method for the longitudinal dispersion equation was developed. The method is based on combining the Holly-Preissmann scheme with the fifth-degree Hermite interpolating polynomial and the generalized Crank-Nicholson scheme. Longitudinal dispersion of an instantaneously-loaded pollutant source was simulated by the model and other characteristics-based numerical methods. Computational results were compared with the exact solution. The present method was free from wiggles regardless of the Courant number, and exactly reproduced the location of the peak concentration. Overall accuracy of the computation increased for smaller value of the weighting factor,  $\theta$  of the model. Larger values of  $\theta$  overestimated the peak concentration. Smaller Courant number gave better accuracy, in general, but the sensitivity was very low, especially when the value of  $\theta$  was small. From comparisons with the hybrid method using the third-degree interpolating polynomial and with split-operator methods, the present method showed the best performance in reproducing the exact solution as the advection becomes more dominant.

**요 지 :** 종확산 방정식에 대한 유한차분 모형으로서, 5차의 보간다항식을 사용한 Holly-Preissmann 기법과 Generalized Crank-Nicholson 기법을 결합한 혼합모형을 개발하였다. 순간적으로 부하된 오염원의 종확산문제에 본 모형 및 특성곡선을 고려한 다른 수치기법들을 적용하여 정확해와 비교하였다. 본 모형에 의한 계산결과, Courant 수에 관계없이 수치진동이 전혀 발생하지 않았으며, 최대농도 발생지점도 정확해와 일치하였다. 모형의 적용에 있어서 시간가중치  $\theta$ 의 값이 작을수록 계산의 정확성이 전반적으로 향상되는 것으로 나타났으며,  $\theta$ 의 값을 크게 할수록 최대농도값을 과대평가하는 경향을 보였다. 전반적으로 Courant 수가 작을수록 정확한 계산결과를 나타내고 있으나 그 민감도는, 특히  $\theta$ 의 값이 작을수록, 매우 작게 나타났다. 3차의 보간다항식을 사용하는 혼합모형 및 연산자 분리방법들과의 비교결과, 이송항이 지배적인수록 본 모형이 정확해와 가장 근사한 계산결과를 보임을 알 수 있었다.

## 1. 서 론

종확산 방정식의 유한차분법에 관하여 현재까지 많은 연구가 진행되어 왔으나(강주환과 이길성, 1987; 윤태훈, 1979; Abbott와 Basco, 1989; Bresler, 1973; Chaudhari, 1971; Leonard, 1979) 이러한 수치기법들은 고정된 계산격자들을 이용하여 시간 및

공간에 대한 편미분을 근사함으로써, 방정식에 내재된 쌍곡선성 즉 정보전달의 방향성을 적절히 반영하지 못하여 실제의 물리적 현상과는 거리가 먼 수치진동(numerical oscillation)이나 수치분산(numerical diffusion) 현상을 수반하는 경우가 많다. Holly와 Preissmann(1977)은 이러한 점을 감안하여 이송방정식의 유한차분 근사방법으로서 특성곡선(characteristic line)을 따라 시간에 따른 전

\* 정희원, 서울대학교 공과대학 토목공학과 연구원

\*\* 정희원, 서울대학교 공과대학 토목공학과 교수

미분(total derivative)을 근사시킴으로써 방정식의 쌍곡선성을 반영하는, 양해법의 수치기법인 Holly-Preissmann 방법을 개발하였다. 이러한 유한차분법의 적용을 위해서는 고정된 계산격자뿐만 아니라 특성곡선이 통과하는 임의점에서의 농도값이 주어져야 하는데, 이에 대한 근사방법으로서 특성곡선 통과지점 양측의 두 격자점에서의 농도 및 그 공간미분값들을 계수로 하는, Courant 수의 함수인 보간다항식(Hermite interpolating polynomial)을 도입하였다. 그들은 또한 임의점에서의 농도의 2계 공간미분값을 보간다항식의 2계 공간미분으로부터 구하여 확산항을 근사시킴으로써 그들의 방법을 확산항을 포함한 방정식에 확장, 적용하였다.

Holly와 Polatera(1984)는 확산항이 포함되지 않은 이송방정식을 Holly-Preissmann 기법을 이용하여 풀고, 이어서 이송항이 포함되지 않은 확산방정식을 Crank-Nicholson 방법에 의하여 계산하는 연산자 분리방법(split-operator method)을 개발하여 2차원 이송확산 방정식에 적용하였다. 이들의 방법은 1차원 종확산 방정식에 적용되어 하천 수질모형인 CE-QUAL-RIV1(Environmental Laboratory, 1990)의 계산모형으로서 사용되고 있다. 이러한 연산자 분리방법은 수치진동이나 수치분산이 매우 작은, 비교적 정확한 해를 주는 방법이지만, 이송과 확산을 독립적으로 취급한다는 점이 물리적으로는 설명하기 어렵고 확산방정식의 계산을 위한 경계조건을 임의로 부가해야 하는 문제가 따른다. 이러한 문제점을 감안하여 Toda와 Holly(1987)는 종확산 방정식의 유한차분법으로서 이송항에 대해서는 Holly-Preissmann 기법을, 확산항에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 사용하되 두항을 동시에 포함하여 풀 수 있는 방법을 개발하였다. Toda와 Holly(1987)가 3차의 보간다항식을 사용하기 위하여 농도 및 농도의 1계 공간미분에 관한 종확산 방정식들을 풀 반면, 본 연구에서는 여기에 농도의 2계 공간미분에 관한 방정식을 추가함으로써 5차의 보간다항식을 사용하였다. 또한 Courant 수가 1 이상인 경우에도 계산이 가능하도록 모형을 일반화하였다. 해석해가 존재하는 종확산 문제에 모형을 적용하여, 그 결과를

Toda와 Holly(1987)의 혼합모형 및 연산자 분리방법(田庚秀와 李吉成, 1993) 등 특성곡선을 고려한 다른 수치기법들에 의한 계산결과들과 비교하였다.

## 2. 계산모형

일정한 단면을 갖는 1차원 수로에서의 종확산 방정식은 다음의 두가지 형태로서 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \text{ for all } x \text{ and } t \quad (1)$$

또는

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \text{ along the characteristic line} \\ \frac{dx}{dt} &= U \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $C(x, t)$ 는 농도,  $U$  및  $D$ 는 각각 유속 및 종확산계수로서 일정한 것으로 가정하였으며,  $x$ 와  $t$ 는 각각 공간 및 시간좌표를 나타낸다. 종확산 방정식의 유한차분 근사에 있어서 2 시간준위(two time level) Eulerian 기법들의 경우에는  $x$  및  $t$ 에 관한 편미분들로 구성된 식 (1)의 각 항을 근사함으로써  $(i-1, n)$ ,  $(i, n)$ ,  $(i+1, n)$ ,  $(i-1, n+1)$ ,  $(i, n+1)$ ,  $(i+1, n+1)$  등 6개 격자점에서의 값들 또는 그중 일부로서 차분식이 구성되는데 반하여, 본 연구에서 사용된 유한차분식은 식 (2)에 대한 근사로서 다음과 같다(Fig. 1 참조).

$$C^{n+1} = C_i^n + D\Delta t \left[ (1-\theta) \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_i^n + \theta \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)^{n+1} \right] \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} &= C_i^n + D\Delta t (1-\theta) C_{xx}^n + \\ &\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \theta (C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (3b)$$

여기서  $\xi$ 는 격자점  $(i, n+1)$ 을 지나는 특성곡선의 시간준위  $n$ 에서의 위치로서 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

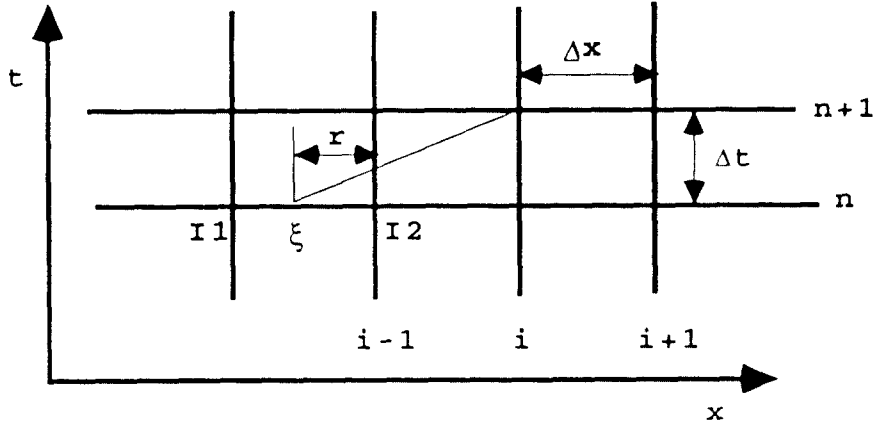


Fig. 1. Schematic Representation of the Numerical Scheme

$$\xi = i - \frac{U\Delta t}{\Delta x} \quad (4)$$

$C_{xx}$ 는  $x$ 에 관한  $C$ 의 2계 편미분을 나타내며, 가중치  $\theta$ 는 0과 1 사이의 값을 갖는다. 상기한 차분식 (3b)는 우선 전미분항의 경우 격자점  $(i, n+1)$  및  $(\xi, n)$ 에서의 값들로서 근사시키고, 확산항의 경우 시간준위  $(n+1)$ 에서는  $(i-1, n+1)$ ,  $(i, n+1)$ ,  $(i+1, n+1)$ 의 세 점을 이용하여 근사 하되 시간준위  $n$ 에서는 역시  $\xi$ 에서의 2계 미분치를 이용함으로써 방정식의 쌍곡선성을 고려하고 있음을 알 수 있다. 결국 확산항의 근사에 있어서는 시간준위  $n$  및  $(n+1)$ 에서의 2계 미분의 가중평균치를 취한다는 점에서 Generalized Crank-Nicholson 기법과 유사한 형태를 갖는다.

식 (3b)에서  $C_{\xi}^n$ 는 다음과 같은 보간함수로부터 구한다(Fig. 1 참조).

$$C_{\xi}^n(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + a_4 r^4 + a_5 r^5 \quad (5)$$

$$r = I2 - \xi \quad (6)$$

여기서  $r$ 은 Toda와 Holly(1987)에서와 같이 Courant 수( $U\Delta t/\Delta x$ )가 1 이하인 경우, 즉  $i-1$  및  $i$ 가 각각  $I1$  및  $I2$ 와 일치하는 경우에는 Courant 수와 같으며, 1 이상의 Courant 수에 대하여도 적용할 수 있도록 일반화한 본 모형에 있어서는 Courant 수에서 정수부분을 제외한 0과 1 사이의

값을 갖는다(Fig. 1 참조). 위의 보간다항식은 6개의 계수를 갖는데 이들은  $\xi$ 양측의, 즉 특성곡선으로부터 가장 가까운 위치에 있는 두 격자점,  $I1$  및  $I2$ 에서의  $C$ ,  $C_x(x$ 에 대한 1계 편미분) 및  $C_{xx}$ 의 값들로 나타낼 수 있다. 즉,  $C_{\xi}^n(0) = C_{I1}^n$ ,  $C_{\xi}^n(1) = C_{I2}^n$ ,  $C_{x\xi}^n(0) = C_{xI1}^n$ ,  $C_{x\xi}^n(1) = C_{xI2}^n$ ,  $C_{xx\xi}^n(0) = C_{xxI1}^n$  및  $C_{xx\xi}^n(1) = C_{xxI2}^n$ 의 조건들로부터 계수 값들을 구하면 다음과 같다.

$$a_0 = C_{I1}^n \quad (7)$$

$$a_1 = -\Delta x C_{xI2}^n \quad (8)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(\Delta x)^2 C_{xxI2}^n \quad (9)$$

$$a_3 = 10C_{I1}^n - 10C_{I2}^n + 4\Delta x C_{xI1}^n + 6\Delta x C_{xI2}^n + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 C_{xxI1}^n - \frac{3}{2}(\Delta x)^2 C_{xxI2}^n \quad (10)$$

$$a_4 = -15C_{I1}^n - 15C_{I2}^n - 7\Delta x C_{xI1}^n - 8\Delta x C_{xI2}^n - (\Delta x)^2 C_{xxI1}^n - \frac{3}{2}(\Delta x)^2 C_{xxI2}^n \quad (11)$$

$$a_5 = 6C_{I1}^n - 6C_{I2}^n + 3\Delta x C_{xI1}^n + 3\Delta x C_{xI2}^n + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 C_{xxI1}^n - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 C_{xxI2}^n \quad (12)$$

결국 보간다항식 (5)의 적용을 위해서는 모든 격자점에서의  $C$ 값 외에도  $C_x$  및  $C_{xx}$ 의 값들이 필요하게 된다. 지배방정식 (2)를  $x$ 에 대하여 미

분하면 Cx에 대한 종확산 방정식이, 이를 두번 미분하면 Cxx에 대한 종확산 방정식이 각각 다음과 같이 얻어지는데,

$$\frac{dCx}{dt} = D \frac{\partial^2 Cx}{\partial x^2}, \text{ along the characteristic}$$

$$\text{line } \frac{dx}{dt} = U \quad (13)$$

$$\frac{dCxx}{dt} = D \frac{\partial^2 Cxx}{\partial x^2}, \text{ along the characteristic}$$

$$\text{line } \frac{dx}{dt} = U \quad (14)$$

매 시간준위마다 이들 두 방정식을 식 (2)와 더불어 뚫으로써 다음 시간준위에서 사용할 보간다항식의 계수값들을 구할 수 있다. 식 (2)에 대한 차분법과 같은 방법에 의하여 식 (13) 및 (14)에 대하여 다음과 같은 차분식을 각각 얻을 수 있다.

$$Cx_{i+1}^n = Cx_i^n + D\Delta t(1-\theta)Cxxx_i^n + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \theta(Cx_{i+1}^{n+1} - 2Cx_i^{n+1} + Cx_{i-1}^{n+1}) \quad (15)$$

$$Cxx_{i+1}^n = Cxx_i^n + D\Delta t(1-\theta)Cxxxx_i^n + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \theta(Cxx_{i+1}^{n+1} - 2Cxx_i^{n+1} + Cxx_{i-1}^{n+1}) \quad (16)$$

식 (3b), (15) 및 (16)의 Cx<sub>i</sub><sup>n</sup>, Cxx<sub>i</sub><sup>n</sup>, Cxxx<sub>i</sub><sup>n</sup> 및 Cxxxx<sub>i</sub><sup>n</sup>는 다음식 (17)과 같은 관계를 이용하여

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial r} \quad (17)$$

식 (6)으로부터 구할 수 있다. C<sub>i</sub><sup>n</sup>, Cx<sub>i</sub><sup>n</sup>, Cxx<sub>i</sub><sup>n</sup>, Cxxx<sub>i</sub><sup>n</sup> 및 Cxxxx<sub>i</sub><sup>n</sup>를 I1과 I2에서의 농도 및 x에 대한 1, 2계 미분치들에 관하여 정리하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left(\frac{\partial^k C}{\partial x^k}\right) = \alpha_{1k}C_{i1}^n + \alpha_{2k}C_{i2}^n + \alpha_{3k}Cx_{i1}^n + \alpha_{4k}Cx_{i2}^n + \alpha_{5k}Cxx_{i1}^n + \alpha_{6k}C_{i2}^n \quad (18)$$

식 (18)에서 k=0, 1, ..., 4에 대한, 즉 C<sub>i</sub><sup>n</sup>,

Cx<sub>i</sub><sup>n</sup>, ..., Cxxxx<sub>i</sub><sup>n</sup>의 계산을 위한 계수값들은 Table 1에 정리한 바와 같다. Courant수가 1보다 크면 특성곡선이 시간축을 통과하게 되는 경우가 생기는데(Fig. 1 참조), 이때에는 C<sub>i-1</sub>, C<sub>i2</sub>, Cx<sub>i1</sub>, Cx<sub>i2</sub>, Cxx<sub>i1</sub>, 및 Cxx<sub>i2</sub>의 값을 모두 상류단 경계치로 주도록 하였다.

식 (3b), (15) 및 (16)을 각각 대수 연립방정식의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$PC_{i+1}^{n+1} + (1-2P)C_i^{n+1} + PC_{i+1}^{n+1} = S_\xi \quad (19)$$

$$PCx_{i+1}^{n+1} + (1-2P)Cx_i^{n+1} + PCx_{i+1}^{n+1} = Sx_\xi \quad (20)$$

$$PCxx_{i+1}^{n+1} + (1-2P)Cxx_i^{n+1} + PCxx_{i+1}^{n+1} = Sxx_\xi \quad (21)$$

여기서

$$P = -\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \theta \quad (22)$$

$$S_\xi = C_i^n + D\Delta t(1-\theta)Cxxx_i^n \quad (23)$$

$$Sx_\xi = Cx_i^n + D\Delta t(1-\theta)Cxxxx_i^n \quad (24)$$

$$Sxx_\xi = Cxx_i^n + D\Delta t(1-\theta)Cxxxx_i^n \quad (25)$$

식 (19), (20) 및 (21)의 우변 S<sub>ξ</sub>, Sx<sub>ξ</sub>, Sxx<sub>ξ</sub>는 시간준위 n에서의 각 격자점 농도 및 농도의 1, 2계 공간미분값과 보간다항식으로부터 계산되는 기지값이다. 따라서, 시간준위 (n+1)에서의 각 격자점 농도 및 농도의 1, 2계 공간미분값들을 미지수로 하는 식 (19), (20) 및 (21)은 각각 삼중 대각행렬을 이루어 上流 및 下流의 경계조건이 주어지면 Thomas algorithm(Carnahan et al., 1969)을 이용하여 해를 구할 수 있다.

본 수치모형의 안정조건은 Eulerian 기법들의 경우처럼(강주환과 이길성, 1987; Anderson et al., 1984) Courant 수 및 Diffusion 수(=DΔt/(Δx)<sup>2</sup>) 등의 수식적인 함수관계로서 도출할 수는 없으나, Toda와 Holly(1987)의 경우와 유사한 von Neumann 행렬 안정성 분석에 의하여 θ, Courant 수 및 Diffusion 수(=DΔt/(Δx)<sup>2</sup>)에 따른 안정성 여부를 결정할 수 있다. 본 모형의 안정성 분석은 그 과정이 매우 복잡하고 장황하여, 이

Table 1. Coefficients for the Computation of C, Cx and Cxx at  $\xi$

k	0	1	2	3	4
$\alpha_{1k}$	$r^3(10-15r+6r^2)$	$-30r^2(1-r)/\Delta x$	$60r(1-3r+2r^2)/(\Delta x)^2$	$-60(1-6r+6r^2)/(\Delta x)^3$	$360(2r-1)/(\Delta x)^4$
$\alpha_{2k}$	$1-\alpha_{10}$	$1-\alpha_{11}$	$-\alpha_{12}$	$-\alpha_{13}$	$-\alpha_{14}$
$\alpha_{3k}$	$r^3(1-r)(4-3r)\Delta x$	$-r^2(2-3r)(6-5r)$	$12r(1-r)(2-5r)/\Delta x$	$-12(2-14r+15r^2)/(\Delta x)^2$	$24(-7+15r)/(\Delta x)^3$
$\alpha_{4k}$	$-r(1-r)^3(1+3r)\Delta x$	$(1-r)^2(1-3r)(1+5r)$	$12r(1-r)(3-5r)/\Delta x$	$12(3-16r+15r^2)/(\Delta x)^2$	$24(-8+15r)/(\Delta x)^3$
$\alpha_{5k}$	$r^3(1-r)^2(\Delta x)^2/2$	$-r^2(1-r)(3-5r)\Delta x/2$	$r(3-12r+10r^2)$	$-3(1-8r+10r^2)/\Delta x$	$12(-2+5r)/(\Delta x)^2$
$\alpha_{6k}$	$r^2(1-r)^3(\Delta x)^2/2$	$-r(1-r)^2(2-5r)\Delta x/2$	$(1-r)(1-8r+10r^2)$	$3(3-12r+10r^2)/\Delta x$	$12(3-5r)/(\Delta x)^2$

는 추후의 연구과제로 미루기로 한다.

### 3. 모형의 적용

중화산 방정식에 대한 수치계산의 문제점인 수치 분산이나 수치진동 여부가 잘 나타나도록 하기 위하여, 순간적으로 부하된 Gauss형 초기 농도분포를 갖는 오염원의 중화산 문제에 본 계산모형을 적용하였다. 또한, 3차의 보간다항식을 사용한 혼합

모형인 Toda와 Holly(1987)의 방법과, 역시 특성곡선을 고려한 방법들로서 이송항과 확산항을 분리하여 계산하되 이송항의 계산에는 Holly-Preissmann 기법을, 확산항의 계산에는 Crank-Nicholson 기법을 사용하는 연산자 분리방법들(田庚秀와 李吉成, 1993; Environmental Laboratory, 1990)에 의한 계산을 수행하여 본 모형에 의한 계산결과와 비교하였다.

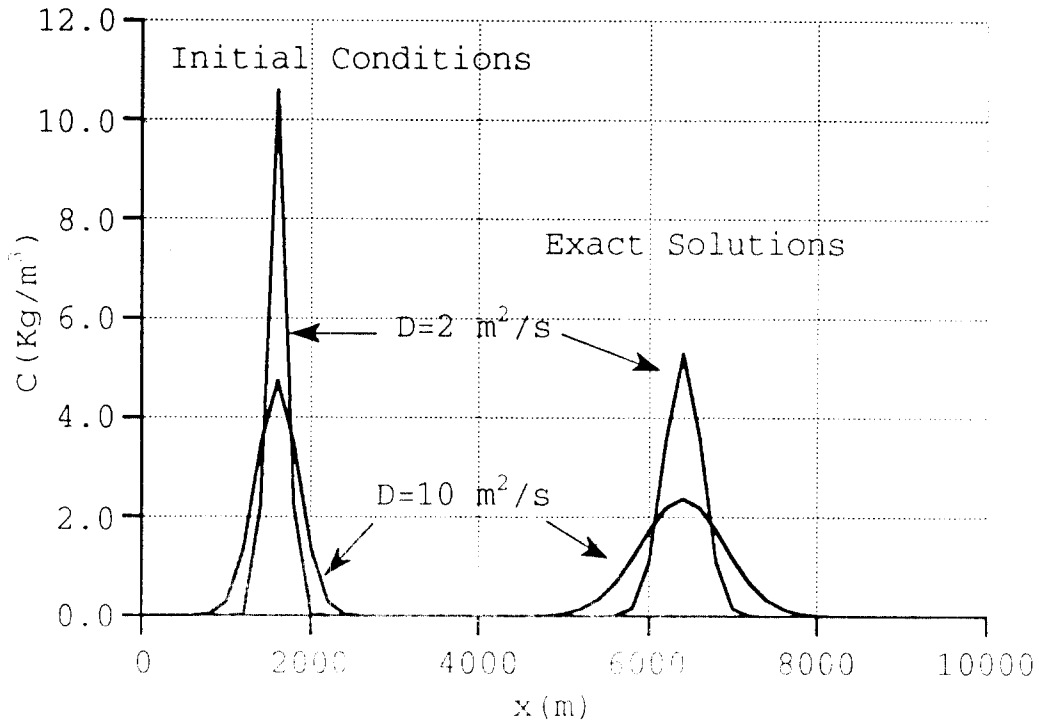


Fig. 2. Initial Conditions and the Exact solutions

### 3.1 초기 및 경계조건

시각  $t=0$ 에서 단위 흐름면적당 질량  $M$ 이  $x=0$ 에서 순간적으로 방류되었을 경우, 농도분포의 시간변화는 다음과 같다(Fischer et al., 1979).

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4Dt}\right] \quad (26)$$

위의 식에서  $t=3200$  초일때의 농도분포를 초기 조건으로 하여, 이로부터 9600초 후까지 즉  $t=12800$ 초까지 계산을 수행하였다. 유속  $U=0.5$  m/sec,  $M=3000$  kg/m<sup>2</sup>으로 일정하게 하고, 종확산계수  $D=2$  및  $10$  m<sup>2</sup>/sec의 경우에 대하여 계산을 수행하였다. 각각의 경우에 대하여 식 (26)으로부터 계산된 초기조건 및 계산 종료시의 농도분포는 Fig. 2에 나타낸 바와 같다.  $C_x$  및  $C_{xx}$ 에 관한 초기조건은 식 (26)의 1, 2계 공간미분 함수로부터 주어진다.

모형의 적용을 위한 상류단( $i=0$ ) 경계조건으로는  $C_0$ ,  $C_{x0}$  및  $C_{xx0}$ 를 모두 영으로 하였다. 즉,  $C$ ,  $C_x$  및  $C_{xx}$ 에 대한 상류단 경계조건은 식 (19), (20) 및 (21)에서  $i=1$ 로 하고 좌변 첫째항을 각각 영으로 둔 식이 된다.  $C_x$  및  $C_{xx}$ 에 대한 하류단( $i=I$ ) 경계조건으로는  $C_{xi}$  및  $C_{xxi}$ 를 영으로 하였다. 따라서, 이들에 대한 하류단 경계조건은 식 (20) 및 (21)에서  $i=I-1$ 로 하고 좌변 셋째항을 각각 영으로 둔 식이 된다.  $C$ 에 대한 하류단( $i=I$ ) 경계조건으로는 영의 농도경사를 부과하였으며, 이는 다음과 같은 차분식으로 나타내진다.

$$PC_{i+1}^{n+1} + (1-P)C_i^{n+1} = S_i \quad (28)$$

### 3.2 계산결과 및 분석

Fig. 3는  $\Delta x$  및  $\Delta t$ 를 각각 200 m 및 200 초로 하고(따라서 Courant 수는 0.5), 가중치  $\theta$ 를 변화시켜 가며 계산된,  $D=2$  m<sup>2</sup>/sec의 경우에 대한 농도분포를 나타내고 있는데, 각  $\theta$ 값에 대한 계산결과가 최대농도 발

생지점 부근을 제외하고는 정확해와 거의 일치하는 결과를 보이고 있다. Table 2에는 Courant 수를 변화시켜가며 수행한, 본 모형 및 Toda와 Holly(1987)에 의한 계산결과와 정확도 분석결과를 정리하였다.  $\Delta x$ 는 200 m로 일정하게 하고,  $\Delta t$ 를 각각 100, 200, 300 및 600 초로 함으로써 Courant 수 0.25, 0.50, 0.75 및 1.50의 경우에 대한 계산을 수행하였다. Table 2의  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  및  $E_4$ 는 Noye(1987)에 의하여 제시된, 종확산 방정식에 관한 수치기법의 정확도 분석을 위한 척도들로서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$E_1 = \frac{\sum_{i=1}^I |C_i - CE_i|}{\sum_{i=1}^I CE_i} \quad (29)$$

$$E_2 = (C_{\max} - CE_{\max})/CE_{\max} \quad (30)$$

$$E_3 = \text{Min}(C_i)/CE_{\max} \quad (31)$$

$$E_4 = (X_p - XE_p)/\Delta x \quad (32)$$

여기서  $C$ 와  $CE$ 는 모형에 의한 계산치와 식 (26)에 의한 정확해(exact solution)를 각각 나타내며,  $X_p$ 와  $XE_p$  계산치와 정확해의 최대농도 발생지점을 각각 나타낸다. 상기한 무차원의 척도들 중  $E_1$ 은 계산모형의 전반적인 정확성을 나타내며,  $E_2$ 는 수치분산 정도를 평가하는 척도이다.  $E_3$ 는 수치진동을 평가하는 척도로서, 진동이 있을 경우  $E_3$ 은 음의 값을 갖게되고 그 정도가 심할수록 절대값이 크게된다.  $E_4$ 는 최대농도 발생지점 오차를 계산격자 간격으로 무차원화한 값이다.

Table 2에서 알 수 있듯이 Toda와 Holly(1987)에 의한 계산결과가 약간의 수치진동을 보이는데 반하여, 본 모형에서는 Courant 수에 관계없이 전혀 나타나지 않고 있으며 최대농도 발생지점도 모든 경우에 정확해와 일치하고 있다. 또한, Toda와 Holly(1987)의 계산결과가 모든  $\theta$ 값에 대하여 수치분산을 보이는데 비하여, 본 모형의 경우에는 실질적으로 양해법인  $\theta=0$ 의 경우를 제외하고는 오히려 최대농도를 과대평가하는 것으로 나타났다.  $\theta$ 값에 대한 수치분산 정도의 민감도는 본 모형의 경우가 더 크게 나타났다. 계산결과와 전반적인 정확성을 살펴보면 Toda와 Holly(1987)의

경우  $\theta$  값이 커짐에 따라 다소 향상되는데 반하여, 본 모형의 경우에는 반대로 값이 작아질수록 더욱 정확한 계산결과를 보이고 있다. 이러한 경향은 모든 Courant 수에 대하여 동일하게 나타남을 알 수 있다. 즉 확산항의 근사에 있어서 이전 시간준위에서의 공간 2계미분 근사치, 즉  $C_{xx}$  에 큰 가중치를 줄수록 正確度가 향상되는데, 이는 본 모형이  $C_{xx}$  의 계산을 위한 보간다항식에 2차의 격자점에서의 공간 2계미분치를 포함하기 때문인 것으로 사료된다. 또한 전반적으로 Toda와 Holly (1987)의 경우에는 Courant 수가 클수록 정확한 계산결과를 보이는 반면, 본 모형의 경우에는 Courant 수가 작을수록, 즉  $\Delta t$ 가 작을수록 정확한 계산결과를 나타내고 있다. 그러나,  $\theta$ 의 값이 작을수록 Courant 수에 따른 민감도가 매우 작음을 알 수 있다. 본 모형의 가중치  $\theta$  값이 0.5 이하일 경우, Courant 수에 관계없이 수치분산, 진동 등 모든 면에서 Toda와 Holly(1987)에 비하여 정확한

계산결과를 나타내고 있다.

Table 3 및 Fig. 4는 본 모형 및 Toda와 Holly (1987)의 모형과 함께, 특성곡선을 고려한 두가지 연산자 분리방법들에 의한 계산의 정확도 분석결과 및 Courant 수 0.5에 대한 계산결과를 각각 나타내고 있다. Split(4) 및 Split(6)는 확산방정식의 계산에는 모두 Crank-Nicholson 기법을 사용하고, 이송방정식의 계산에 있어서 Split(4)는 3차의 보간다항식을 사용하는 two-point fourth-order Holly-Preissmann 기법을, Split(6)는 5차의 보간다항식을 사용하는 sixth-order Holly-Preissmann 기법을 사용한 연산자 분리방법(Environmental Laboratory, 1990; 田庚秀와 李吉成, 1993)을 각각 나타낸다. 또한, 혼합모형인 본 모형과 Toda와 Holly(1987)의 적용에 있어서, 연산자 분리방법의 확산항 계산모형인 Crank-Nicholson 기법과 일관성을 갖도록  $\theta$ 를 0.5로 하여 계산된 결과를 비교하였다. 혼합모형 및 연산자 분리모형

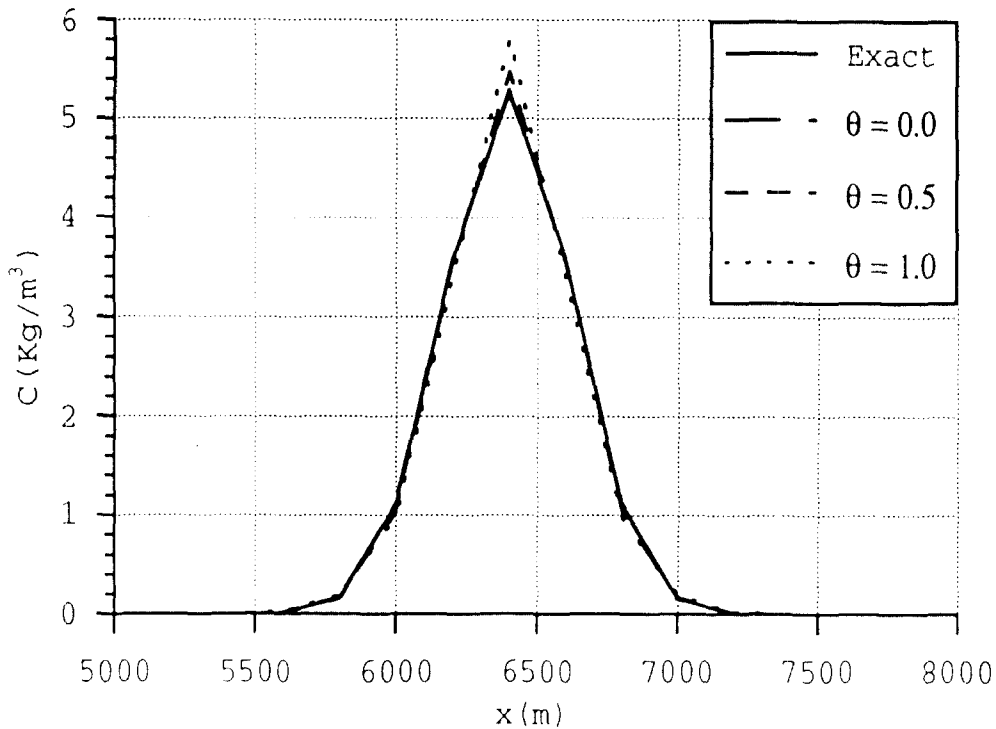


Fig. 3. Computational Results for Various Weighting Factors(D=2 m²/s)

Table 2. Analysis of Results for Various Courant Numbers and Weighting Factors( $D=2m^2/s$ )

(a) Present Sstudy						(b) Toda and Holly(1987)					
Courant Number	$\theta$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	Courant Number	$\theta$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
0.25	0.0	0.009	-0.007	0	0	0.25	0.0	0.152	-0.138	-0.022	0
	0.25	0.009	0.009	0	0		0.25	0.149	-0.135	-0.022	0
	0.5	0.024	0.027	0	0		0.5	0.146	-0.132	-0.022	0
	0.75	0.045	0.049	0	0		0.75	0.143	-0.129	-0.021	0
	1.0	0.068	0.076	0	0		1.0	0.141	-0.126	-0.021	0
0.50	0.0	0.007	0.006	0	0	0.50	0.0	0.094	-0.095	-0.012	0
	0.25	0.010	0.012	0	0		0.25	0.089	-0.090	-0.011	0
	0.5	0.030	0.033	0	0		0.5	0.084	-0.085	-0.010	0
	0.75	0.053	0.060	0	0		0.75	0.079	-0.080	-0.009	0
	1.0	0.083	0.097	0	0		1.0	0.073	-0.075	-0.008	0
0.75	0.0	0.008	-0.007	0	0	0.75	0.0	0.056	-0.055	-0.005	0
	0.25	0.010	0.012	0	0		0.25	0.049	-0.047	-0.004	0
	0.5	0.031	0.035	0	0		0.5	0.041	-0.039	-0.003	0
	0.75	0.055	0.063	0	0		0.75	0.035	-0.031	-0.002	0
	1.0	0.085	0.101	0	0		1.0	0.031	-0.023	-0.001	0
1.50	0.0	0.013	0.012	0	0	1.50	0.0	0.013	0.012	0	0
	0.25	0.007	0.009	0	0		0.25	0.007	0.009	0	0
	0.5	0.031	0.035	0	0		0.5	0.031	0.035	0	0
	0.75	0.060	0.070	0	0		0.75	0.060	0.070	0	0
	1.0	0.101	0.121	0	0		1.0	0.101	0.121	0	0

Table 3. Analysis of Results by Various Characteristics-Based Methods( $D=2m^2/s$ )

Method	Courant Number	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
Split(4)	0.25	0.141	0.127	0.021	0
	0.50	0.075	0.076	0.008	0
	0.75	0.033	0.023	-0.001	0
Split(6)	0.25	0.079	0.075	-0.000	0
	0.50	0.079	0.093	0	0
	0.75	0.080	0.094	0	0
Toda and Holly (1987)	0.25	0.146	0.132	-0.022	0
	0.50	0.084	0.085	-0.010	0
	0.75	0.041	-0.039	-0.003	0
Present Study	0.25	0.024	0.027	0	0
	0.50	0.030	0.033	0	0
	0.75	0.031	0.035	0	0



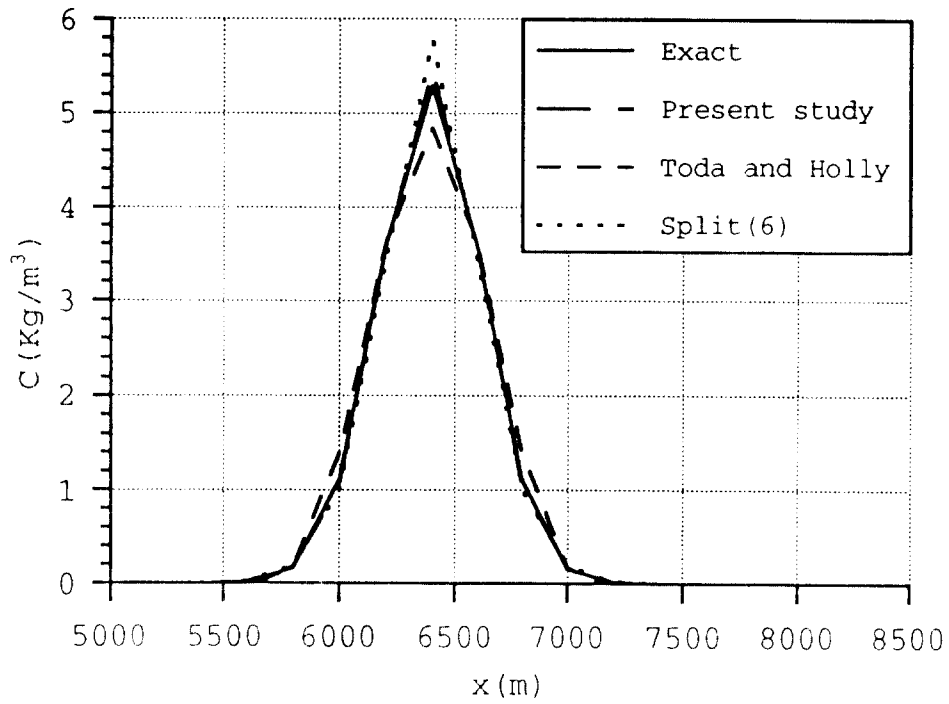


Fig. 4. Comparison of Results by Various Methods( $D=2 \text{ m}^2/\text{s}$ )

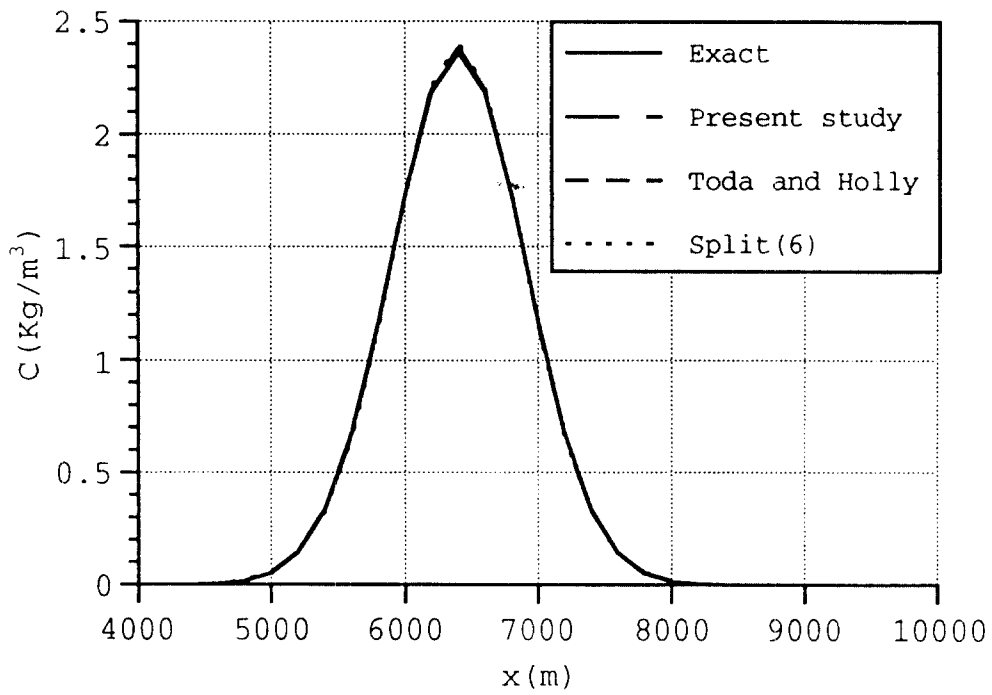


Fig. 5. Comparison of Results by Various Methods( $D=10 \text{ m}^2/\text{s}$ )

의 두방법 모두 3차의 보간다항식을 사용할 경우에는 수치분산 및 약간의 진동이 발생하는데 비하여, 5차의 보간다항식을 사용한 계산결과들은 수치진동은 나타내지 않으나 최대농도를 과대평가하는 경향을 보이고 있다. 또한 연산자 분리방법의 경우에는 보간다항식의 차수 증가에 따른 계산의 正確性 향상이 거의 없는데 반하여, 혼합모형의 경우에는 다소 향상된 결과를 보이고 있다. Table 2 및 3의 결과를 전체적으로 비교해 볼때, 5차의 보간다항식을 사용하는 혼합모형이 가중치  $\theta$ 를 0.5 이하로 할 경우, 정확해와 가장 근사한 계산결과를

보임을 알 수 있다.

$D=10 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우에 대한 정확도 분석결과 Table 4에 정리하였으며 Fig. 5는 계산결과들의 비교이다. Courant 수가 0.75이고  $\theta$ 값이 영인 경우, 본 모형에 의한 계산은 수치적 불안정성을 나타내었다. 적용된 네가지 방법 모두에 대하여 수치분산( $E_2$ ), 수치진동( $E_3$ ) 및 전반적인 정확성( $E_4$ )을 나타내는 무차원 척도들이 앞에서 살펴본  $D=2 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우에 비하여 매우 작은값을 나타내고 있다. 이같은 경향은 Fig. 5에서도 나타나고 있는데, 모든 방법에 의한 계산결과가  $D=10 \text{ m}^2/\text{sec}$ 인

**Table 4.** Analysis of Results by Various Characteristics-Based Methods( $D=10 \text{ m}^2/\text{s}$ )

Method	Courant Number	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	
Split(4)	0.25	0.0018	0.0003	-0.000	0	
	0.50	0.0053	0.0058	0	0	
	0.75	0.0092	0.0102	0	0	
Split(6)	0.25	0.0138	0.0155	0	0	
	0.50	0.0139	0.0156	0	0	
	0.75	0.0138	0.0155	0	0	
Toda and Holly (1987)	0.25	$\theta=0.0$	0.0094	-0.0099	-0.0000	0
		$\theta=0.5$	0.0034	-0.0036	-0.0000	0
		$\theta=1.0$	0.0027	0.0022	0	0
	0.50	$\theta=0.0$	0.0055	-0.0059	0	0
		$\theta=0.5$	0.0017	-0.0018	0	0
		$\theta=1.0$	0.0009	0.0100	0	0
	0.75	$\theta=0.0$	0.0175	-0.0161	-0.0005	0
		$\theta=0.5$	0.0044	-0.0046	0	0
		$\theta=1.0$	0.0149	0.0167	0	0
Present Study	0.25	$\theta=0.0$	0.0021	-0.0022	0	0
		$\theta=0.5$	0.0066	0.0073	0	0
		$\theta=1.0$	0.0158	0.0178	0	0
	0.50	$\theta=0.0$	0.0040	-0.0044	0	0
		$\theta=0.5$	0.0066	0.0072	0	0
		$\theta=1.0$	0.0179	0.0202	0	0
	0.75	$\theta=0.0$	unstable			
		$\theta=0.5$	0.0064	0.0071	0	0
		$\theta=1.0$	0.0198	0.0225	0	0

경우(Fig. 4)에 비하여 정확해와 더욱 가까운 것을 알 수 있다. 이는 이송항의 비중이 확산항에 비하여 상대적으로 감소함에 따른 것으로서, 종확산 방정식의 수치계산에 있어서 오차의 대부분이 이송항에 기인함을 나타내는 결과라 하겠다. 본 모형의 경우  $\theta$  값이 작아질수록 비교적 정확한 계산결과를 보이며, 커질수록 최대농도를 과대평가하는 경향이  $D=2 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우와 마찬가지로 나타나고 있다. 그러나, 다른 방법들에 대한 상대적인 정확성은  $D=2 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우보다 못한 것으로 나타났다.

#### 4. 결 론

종확산 방정식에 대한 유한차분 모형으로서, 5차의 보간다항식을 사용한 Holly-Preissmann 기법과 Generalized Crank-Nicholson 기법을 사용한 혼합모형을 개발하였다. 순간적으로 부하된 오염원의 확산문제에 모형을 적용하여, 정확해와 비교한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

3차의 보간다항식을 사용하는 Toda와 Holly (1987)의 계산결과가 약간의 수치진동을 보이는데 반하여, 본 모형의 경우 Courant 수에 관계없이 전혀 발생하지 않고 있으며, 최대농도 발생지점도 정확해와 일치하고 있다. 전반적으로 Courant 수가 작을수록 정확한 계산결과를 나타내고 있으나, 확산항의 근사를 위한 가중치  $\theta$ 의 값이 작을수록 Courant 수에 따른 민감도가 매우 작게 나타났다. 또한, Toda와 Holly(1987)의 계산결과가 대부분의 경우 수치분산을 보이는데 비하여, 본 모형의 경우에는  $\theta$ 의 값이 커질수록 오히려 최대농도를 과대평가하는 것으로 나타났다. 계산결과 전반적인 正確性에 있어서는 값이 작아질수록 더욱 정확한 계산결과를 보이고 있다. 또한, Holly-Preissmann 기법과 Crank-Nicholson 기법을 사용하는 연산자 분리방법들과의 비교결과, 이송항의 비중이 확산항에 비하여 상대적으로 클수록, 5차의 보간다항식을 사용하는 혼합모형이 정확해와 가장 근사한 계산결과를 보임을 알 수 있었다.

본 모형에 관하여 향후 개선 또는 보완하여야 할 과제로서 우선 모형의 실용화를 들 수 있다. Holly-Preissmann 기법과 Crank-Nicholson 기법을 사용한 연산자 분리방법은 이미 실용화되어 하천 수

질모형의 종확산 계산모형으로서 사용되고 있다. 따라서 흐름이 일정하지 않은 자연하천에의 적용을 위한 모형의 개선이 필요하다. 또한 본 연구에서는 1. 下流의 경계조건이 일정한 경우에 대해서만 다루었으나, 경계조건이 시간에 따라 변화하는 경우, 특히 Courant 수가 1보다 큰 경우에 대한 1. 流 경계조건의 처리문제 등에 대해서는 더 많은 연구가 필요하리라 사료된다. 또한 본 모형의 안정성 분석도 긴요한 향후 연구과제이다.

#### 감사의 글

본 연구는 제 1 저자의 1992-1993 년도 한국과학재단 국내 Post-Doc. 연구과제의 일부로서 수행되었으며, 지원해주신 한국과학재단에 사의를 표합니다.

#### 참 고 문 헌

1. 강주환, 이길성 (1987). "대류분산 모형에 관한 유한차분근사의 특성", 大韓土木學會論文集, 제 7권, 제 4호, pp. 147-157.
2. 윤태훈 (1979). "不均 斷面을 갖는 河川에서 汚染物의 縱擴散", 大韓土木學會誌, 제 27권, 제 3호, pp. 83-87.
3. 田庚秀, 李吉成 (1993). "Eulerian-Lagrangian 연산자 분리에 의한 종확산 방정식의 수치해법". (대한토목학회논문집에 게재하고자 제출)
4. Abbott, M.B. and Basco, D.R. (1989). *Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers*, Longman Scientific & Technical, London, Chapters 4 and 5.
5. Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H. (1984). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, Chapter 4.
6. Bresler, E. (1973). "Simultaneous transport of solutes and water under transient unsaturated flow conditions", *WRR*, Vol. 9, No. 4, pp. 975-986.
7. Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969). *Applied Numerical Methods*, John Wiley

- & Sons, New York, pp. 441-442.
8. Chaudhari, N.M. (1971). "An improved numerical technique for solving multidimensional miscible displacement equations", *J. Soc. Petroleum Engrs.*, Vol. 11, Sept., pp. 277-284.
  9. Environmental Laboratory (1990). *CE-QUAL-RIV1: A Dynamic, One-Dimensional (Longitudinal) Water Quality Model for Streams*, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, pp. 37-46.
  10. Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C., Imberger, J., and Brooks, N.H. (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, Orlando, Chapter 2.
  11. Holly, F.M. and Preissmann, A. (1977). "Accurate calculation of transport in two dimensions", *J. Hyd. Div.*, ASCE, Vol. 103, No. 11, pp. 1259-1277.
  12. Holly, F.M. and Usseglio-Polatera, J.M. (1984). "Pollutant dispersion in tidal flow", *J. Hyd. Engrg.*, ASCE, Vol. 110, No. 7, pp. 905-926.
  13. Leonard, B.P. (1979). "A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 19, pp. 59-98.
  14. Noye, J. (1987). "Numerical methods for solving the transport equation", in *Numerical Modeling: Applications to Marine Systems*, ed. J. Noye, Elsevier, Amsterdam, pp. 195-229.
  15. Toda, K. and Holly, F.M. (1987). "Hybrid numerical method for linear advection-diffusion", *Microsoftware for Engineers*, Vol. 3, No. 4, pp. 199-205.