

〈論 文〉

河川에서의 動水力學的 流動解析을 위한 有限要素模型의 開發 Finite Element Model for the Hydrodynamic Analysis in a River

韓 健 淵*, 李 鍾 泰**, 金 弘 泰***
HAN, Kun Yeun, LEE, Jong Tae and KIM, Hong Tae

Abstract □ A finite element model RIV-FEM2 for the hydrodynamic study in a river is developed based on two-dimensional shallow water wave equation and dissipative Galerkin's method. RIV-FEM2 consists of pre-processing, analysis processing and post-processing. Pre- and analysis processing is programmed with Fortran-77 and post-processing with turbo-Pascal respectively. The model is tested with two dimensional problems, including flow through bends, bridges, and symmetric contraction. The two dimensional tests shows stable and efficient results for various situations. Applicability of the model is verified by applying to natural river. The model will provide a basic contribution to the hydrodynamic analysis in a river.

요 지 : 하천에서의 동수역학적 유동해석을 위하여 2次元 淺水方程式을 기본방정식으로 하고 이를 不連續補間函數와 upwinding weighting을 도입한 減衰型 Galerkin 방법에 의하여 해석하는 RIV-FEM2를 개발하였다. RIV-FEM2는 前處理, 主處理, 後處理 過程으로 구성되었으며, 전처리와 주처리 과정은 Fortran-77으로, 후처리 과정은 turbo-Pascal에 의하여 각각 처리할 수 있도록 개발하였다. 2차원의 灣曲部, 橋梁部, 縮小部를 가진 對稱水路部등의 경우와 실제 하천에 대하여 본 모형을 적용한 결과 流速分布, 水面形 및 質量 流出入量 保存등의 면에서 안정성과 효율성이 우수하게 나타나 본 모형의 적용성을 입증할 수 있었다. 본 모형은 실제 하천의 治水 및 治水管理에 기여할 수 있을 것으로 판단된다.

1. 서 론

하천에서 홍수시에는 홍수과의 거동을 정확히 규명하고 평수 및 갈수시에는 수질오염 해석을 정확히 수행하기 위한 흐름특성의 파악면에서 2차원 동수역학적 유동해석은 그 중요성이 크게 증가하고 있다. 유한요소법을 이용한 하천에서의 동수역학적 흐름해석은 그 기법이 가지는 다양한 특성을 적절히 활용한다면 매우 이상적인 수치모형이 될 수 있다. 즉, 하천에서의 복잡한 지형학적 조건을 효과적으로 다룰 수 있고 각종 상, 하류부 경계조건들을 처리할 수 있으며, 다양한 유한요소망을 적절히

이용하여 국부적인 흐름 해석까지도 가능한 2次元 淺水方程式을 기본으로 하는 유한요소모형의 개발은 매우 중요하다.

이를 위하여 본 연구에서는 2차원 천수방정식을 기본방정식으로 하고 이를 減衰型 (dissipative) Galerkin 방법에 의하여 해석한 유한요소모형을 개발하였다. 본 유한요소모형은 전처리과정, 주처리과정, 후처리과정의 세 부분으로 구성되어 있으며 이 과정들은 각각 Fortran-77 과 turbo-Pascal등으로 프로그램을 작성하고 각 처리과정은 일관성 있게 수행되도록 구성하였다. 개발된 유한요소모형의 적용성을 입증하기 위하여 2차원 가상하도의 경우 만곡부, 교량부, 축소부를 가진 대칭수

* 경북대학교 공과대학 토목공학과 부교수

** 경기대학교 공과대학 토목공학과 교수

*** 경북대학교 대학원 토목공학과 박사과정

로에 적용하였으며, 불규칙한 지형형상과 각종 상, 하류단의 경계조건을 갖는 실제하천의 경우에 적용하여 본 모형의 활용성을 입증하였다. 본 연구를 통하여 개발된 유한요소모형은 지류에서의 흐름조건, 홍수터에서의 흐름양상, 교량, 댐, 웨어등의 주위에서의 복잡한 흐름양상 등을 광범위하게 처리할 수 있어, 앞으로 수질오염도 해석, 토사이동의 추적을 통한 하상변동 해석등을 위한 동수역학적 유동해석에 크게 기여할 수 있을 것으로 판단된다.

하천에서의 동수역학적 흐름해석을 위한 유한요소법의 적용은 King (1976), Cooley 와 Moin (1976), Keuning (1976) 등에 의하여 시도되었는데 이들이 사용한 1차원 유한요소모형은 기존의 implicit 차분모형에 비하여 계산속도 및 정도에 있어 크게 우월하지 못한 것으로 나타났다. Gray 와 Lynch (1979)는 조석해석에 있어 시간항을 semi-implicit 로 처리한 유한요소모형을 이용하였고 Gray 와 Kinmark(1982)는 2차의 isoparametric 요소를 사용하고 explicit 시간미분치를 사용한 유한요소모형을 潮汐解析에 이용하였다. Gray (1980)는 자유수면의 흐름에 대한 Galerkin 방법의 적용이 불규칙경계를 정확하게 다루는데는 유리하나 급변하는 부정류를 해석하는 데에는 문제점이 있음을 지적하였다. Lee 와 Froehlich(1986)의 조사 연구에 의하면 2차원 천수방정식을 유한요소법으로 해석할때 많은 연구자들이 유속 및 수심항에 대하여 동일한 次數의 補間函數를 사용하는 것으로 나타났으나 King 과 Norton (1978), Walters 와 Cheng (1978, 1980), Norton (1980), Gee 와 MacArthur (1981) 등은 유속항에 대하여서는 2차보간함수를, 수심항에 대하여는 선형보간함수를 사용하여 해석한 것으로 나타났다. 한편, 불연속 보간함수의 이론에 관한 기초는 Dendy (1974), Raymond 와 Garder (1976) 등이 쌍곡선형의 편미방정식에 이용될 수 있도록 수학적 이론을 개발하였고, Baker 와 Soliman (1981)은 감쇠항을 도입한 Galerkin 방법에서 적정 감쇠치 선정에 대하여 연구하였으며, Katopodes(1984)는 Dendy 의 이론을 개수로내의 surge 해석에 적용하였다.

국내에서 2차원 천수방정식에 관한 수치해석기

법은 주로 유한차분기법을 중심으로 연구되어 왔는데 최병호(1981)가 경기만의 조석해석, 한건연등(1982)이 울산만의 조석해석, 이종태등(1983)이 항내의 장주기파 해석에 각각 적절한 유한차분모형을 적용하였고, 이길성등(1989)이 천수방정식의 유한차분특성을 연구하였다. 또한 윤태훈(1982), 서승원(1983)등이 각각 항내의 토사이동 예측과 단면급변화에 의한 흐름을 유한요소법에 의하여 연구한 예가 있으나 자연 하천에서의 부등류해석 뿐 아니라 홍수에보등을 위한 부정류 해석에 적용할 수 있는 2차원 유한요소모형의 개발에 관한 실용적인 연구는 아직까지 미비한 실정이다.

우리나라에서와 같이 하상계수가 큰 하천유역에서의 수자원 관리는 많은 어려움이 있는 바, 본 2차원 유한요소모형은 기존의 1차원 유한차분모형이 제공하기 어려웠던 자연하천에서의 흐름문제 해석이 가능하게 되어 하천유동에 관한 많은 정보를 보다 정확하게 해석함으로써, 이수 및 치수관리에서 크게 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

2. 하천에서의 동수역학적 유동해석

2.1 2차원 천수방정식

수심평균치를 취한 2차원 천수방정식은 자유수면을 가진 물의 운동을 기술하는 3차원 Navier-Stokes의 일반식을 수심방향으로 적분함으로써 유도될 수 있는데 이를 위하여서는 鉛直方向의 가속도항은 무시하여 압력항을 靜水壓 分布로 처리한다. 일반적으로 자연하천 흐름의 경우, 亂流成分에 기인한 운동량의 擴散項은 천수방정식의 나머지항과 비교하여 무시될 수 있다. 그러나, 좁은 영역에서의 循環의 문제등을 취급하는 경우에는 운동량의 확산항이 방정식내에 존재하여야 할 것이다. 흐름에 대한 抵抗效果는 하상경계에서의 마찰 용력을 경험적인 공식에 의하여 기술하였다.

2次元 淺水方程式을 保存型으로 표시하면 (1), (2), (3)식과 같다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = -i \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_2}{\partial y} = e_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{\partial r_3}{\partial y} = e_y \quad (3)$$

여기서, x, y는 수평면의 좌표축, t는 시간

$$h=h(x, y, t)$$

$$p=u(x, y, t) h(x, y, t)$$

$$q=v(x, y, t) h(x, y, t)$$

$$r_1=u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \quad (4)$$

$$r_2=uvh$$

$$r_3=v^2h + \frac{1}{2}gh^2$$

$$e_x(x, y, t) = gh(S_{ox}-S_{ix}) + f_q + \frac{u}{2}i - \frac{1}{\rho}\tau_{sx} + \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon \frac{\partial p}{\partial y}) \quad (5)$$

$$e_y(x, y, t) = gh(S_{oy}-S_{iy}) - f_p + \frac{v}{2}j - \frac{1}{\rho}\tau_{sy} + \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon \frac{\partial q}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon \frac{\partial q}{\partial y}) \quad (6)$$

이들 식에서 h는 수심, u, v는 수심평균치를 취한 x, y 방향의 유속, f는 Coriolis 계수, g는 중력가속도이고, S_{ox}와 S_{oy}는 바닥면 경사로서 (7)식과 같이 정의된다.

$$S_{ox} = -\frac{\partial Z_b}{\partial x} \quad S_{oy} = -\frac{\partial Z_b}{\partial y} \quad (7)$$

여기서, Z_b는 바닥면 표고이고, S_{ix}와 S_{iy}는 바닥면 마찰경사항으로서 Manning 식에 의하여 보존형으로 표현하면 다음과 같다.

$$S_{ix} = \frac{n^2 p(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{10/3}} \quad (8)$$

$$S_{iy} = \frac{n^2 q(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{10/3}}$$

여기서, n은 Manning의 조도계수, τ_{sx}, τ_{sy}는 바람에 의한 수표면 응력, ε는 亂流粘性 係數(또는 渦粘性係數), ρ는 밀도이다. (5), (6)식에서

Coriolis항, 난류점성의 항은 다른항에 비하여 작아서 무시할 수 있으므로 (1)-(3)식은 (9)-(13)식과 같이 매트릭스 형태로 기술된다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + D=0 \quad (9)$$

$$\text{여기서, } U=[h \ p \ q]^T \quad (10)$$

$$F_x=[p \ r_1 \ r_2]^T \quad (11)$$

$$F_y=[q \ r_2 \ r_3]^T \quad (12)$$

$$D=[i \ gh(S_{ox}-S_{ix})-ui/2 \ gh(S_{oy}-S_{oy})-vi/2]^T \quad (13)$$

2.2 유한요소방정식

공학분야에서 일반화되어 사용되고 있는 유한요소 기법중 종래의 Galerkin법은 과도방정식과 같은 쌍곡선형 방정식에 적용하는 것은 무리가 있는 것으로 나타났다. 이것은 종래의 Galerkin 방법이 가지는 非減衰 특성에 기인한 것으로서 이를 극복하기 위하여 기존의 自由水面을 갖는 흐름(free surface flow)에 관한 유한요소 모형은 Reynolds 應力項을 포함시키고 이 값을 檢定過程에서 渦粘性 係數를 과도하게 설정하고 있다. 따라서, 流體移動에 의해 지배되는 흐름(convection-dominated flow)을 擴散에 의해 지배되는 흐름(diffusion-dominated flow)으로 왜곡하여 해석함으로써 인하여 물리적인 의미를 상실하게 되었으며 Gray 등은 이를 유한요소법 적용의 한계성으로 지적한 바 있다.¹³⁾

본 연구에서 사용한 감쇠형 Galerkin 방법은 최근에 연구되고 있는 p-version FEM기법의 하나로서 Galerkin 방법의 비감쇠 특성을 개선한 것이다. 보간 함수로서 불연속적인 특성과 upwinding weighting의 특성을 갖는 보간 함수를 이용하여 해석하는 기법으로 雙曲線型 방정식의 물리적 특성을 보존한 상태에서 안정해를 얻을 수 있다.¹⁰⁾

2.2.1 감쇠형 Galerkin 방법

Galerkin방법이 갖는 비감쇠의 약점을 개선하기 위하여 (14)식과 같은 不連續의 補間函數와 up-stream weighting을 도입한 減衰型 Galerkin 방법을 적용하였다.

$$N^* = N + \rho_x A^T \frac{\partial N}{\partial x} + \rho_y B^T \frac{\partial N}{\partial y} \quad (14)$$

여기서, N^* 는 감쇠형 Galerkin 방법의 형상함수 (shape function), N 은 기존의 형상함수, ρ_x 와 ρ_y 는 감쇠도이고 이 식은 C^{-1} continuity를 만족하는 조건식이 된다. (14)식에서 적절한 감쇠치의 설정이 문제가 되며 본 연구에서는 (15), (16)식과 같이 要素網의 크기와 유속 u, v 및 波速 c 에 의하여 제시된 값을 사용하였다. ^{7), 18)}

$$\rho_x = \frac{\Delta x}{(u+c)\sqrt{15}} \quad (15)$$

$$\rho_y = \frac{\Delta y}{(v+c)\sqrt{15}} \quad (16)$$

이제 (14)식의 加重函數에 의하여 (9)식을 유한요소 방정식으로 표시하면 (17)식과 같다.

$$\sum^{NE} \{ \rho(N^*)^T [\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + D] d\Omega = 0 \quad (17)$$

여기서, NE 는 전체 요소의 수, Ω 는 한 요소의 면적이고, $A = \partial F_x / \partial x$, $B = \partial F_y / \partial y$ 로 기술된다.

2.2.2 시간미분항의 처리

시간미분항에 대한 Galerkin방법의 적용은 有限差分型으로 표현되며 가중치 θ 를 도입한 형태로 기술하면 (18)식과 같다.

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t [\theta (\frac{\partial U}{\partial t})^{n+1} + (1-\theta) (\frac{\partial U}{\partial t})^n] \quad (18)$$

여기서, θ 는 時間加重值로서 $\theta=0$ 일때 explicit 기법, $\theta=0.5$ 일때 Crank-Nicholson기법, $\theta=1.0$ 일때 fully implicit 기법이고 $n, n+1$ 은 각각 현재 시간대와 다음 시간대이다.

여기서, $U = [h \ p \ q]^T$ 이므로 $[\partial h / \partial t \ \partial p / \partial t \ \partial q / \partial t]^T$ 의 항으로 (18)식을 정리하면 (19)식과 같다.

$$(\frac{\partial U}{\partial t})^{n+1} = \alpha U^{n+1} - \beta \quad (19)$$

$$\text{여기서, } \alpha = \frac{1}{\theta \Delta t} \quad (20)$$

$$\beta = \alpha U^n + \frac{1-\theta}{\theta} (\frac{\partial U}{\partial t})^n \quad (21)$$

이제 (18)식을 (9)식에 대입하면 非線形 代數方程式을 얻게 되는데 이에 대한 해는 Newton-Raphson 방법에 의하여 그 해를 구할수 있으며, (22), (23)식과 같이 기술된다.

$$J'(U^k) \Delta U^k = -f(U^k) \quad (22)$$

$$U^{k+1} = U^k + \Delta U^k \quad (23)$$

여기서, J' 는 Jacobian 매트릭스, U^k 는 초기 추정 벡터값, U^{k+1} 는 개선된 벡터값, k 는 반복계산 횟수이고 ΔU^k 가 허용한계 이내에 들때까지 계산을 반복 수행하여 그 해를 구하게 된다. (22)식에서의 각 요소에 대한 Jacobian값은 (24), (25), (26)식과 같고, 이식들에서 $W_x = \partial x / \partial t$, $W_y = \partial y / \partial t$ 이다.

연속방정식 C 에 대한 Jacobian 식 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \{H\}} &= \alpha N - W_x \frac{\partial N}{\partial x} - W_y \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial \{P\}} &= \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial \{Q\}} &= \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned} \quad (24)$$

x방향 운동량 방정식 M_x에 대한 Jacobian 식 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial \{H\}} &= -\frac{2PN}{h^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2P^2N}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{P^2}{h^2} \frac{\partial N}{\partial y} \\ &\quad - \frac{qN}{h^2} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{PN}{h^2} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{2PqN}{h^3} \frac{\partial h}{\partial y} \\ &\quad - \frac{Pq}{h^2} \frac{\partial N}{\partial y} + g N \frac{\partial h}{\partial x} \\ &\quad + gh \frac{\partial N}{\partial x} + g N \frac{\partial Z_1}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{7}{3}gN \frac{n^2 P(P^2+q^2)^{1/2}}{h^{10/3}} + g n^2 N \frac{(2P^2+q^2)}{h^{7/3}(P^2+q^2)^{1/2}} \\
 & + \frac{P_i}{2h^2} N - \frac{iN}{2h} \\
 \frac{\partial M_x}{\partial(P)} = & aN \tag{25} \\
 & + \frac{2N}{h} \frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{2P}{h} - W_x\right) \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{2PN}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & + \left(\frac{q}{h} - W_y\right) \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{N}{h} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{qN}{h^2} \frac{\partial h}{\partial y} \\
 & + g n^2 N \frac{(2P^2+q^2)}{h^{7/3}(P^2+q^2)^{1/2}} \\
 & - \frac{iN}{2h} \\
 \frac{\partial M_x}{\partial(Q)} = & \frac{N}{h} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{P}{h} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{PN}{h^2} \frac{\partial h}{\partial y} \\
 & + g n^2 N \frac{Pq}{h^{7/3}(P^2+q^2)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

y방향 운동량 방정식 M_y에 대한 Jacobian 식 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_y}{\partial(H)} = & -\frac{2qN}{h^2} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{2q^2N}{h^3} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{q^2}{h^2} \frac{\partial N}{\partial y} \\
 & - \frac{PN}{h^2} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{qN}{h^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2PqN}{h^3} \frac{\partial h}{\partial y} \\
 & - \frac{Pq}{h^2} \frac{\partial N}{\partial x} \\
 & + g N \frac{\partial h}{\partial y} + gh \frac{\partial N}{\partial y} + g N \frac{\partial Z_i}{\partial y} \\
 & - \frac{7}{3}gN \frac{n^2 q(P^2+q^2)^{1/2}}{h^{10/3}} \\
 & + \frac{q_i}{2h^2} N \\
 \frac{\partial M_y}{\partial(P)} = & \frac{N}{h} \frac{\partial q}{\partial x} \tag{26} \\
 & + \frac{q}{h} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{qN}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & + g n^2 N \frac{Pq}{h^{7/3}(P^2+q^2)^{1/2}} \\
 \frac{\partial M_y}{\partial(Q)} = & aN + \frac{2N}{h} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{2q}{h} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{2qN}{h^2} \frac{\partial h}{\partial y} \\
 & + \frac{P}{h} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{N}{h} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{PN}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x}
 \end{aligned}$$

이제 (22)식의 계산은 주어진 要素내에서 수행되며 表面積分은 4點 Gaussian quadrature 식에 의하여 계산되었다. 또한 본 연구에서는 global matrix의 형성시 non-pivoting과 all core routine을 사용함으로써 계산용량을 줄일 수 있었고 계산속도에서의 효율성을 증대시켰다.^{16), 17), 27)}

2.3 초기조건 및 경계조건

(22)식의 유한요소방정식을 풀기 위해서는 초기조건과 경계조건이 필요하게 된다. 수학적 관점에서 보면 초기조건과 적절한 수의 경계조건이 부여되어야만 well-posed condition이 된다. 경계조건이 수가 부적절하거나 잘못된 형태의 경계조건이 주어졌을 때에는 ill-posed condition일 경우에는 경계에서의 작은 변화가 해석 영역에서는 큰 변화를 야기하게 되어 해가 불안정하게 된다.

2.3.1 초기조건

초기조건으로서는 靜的 計算始作 (cold-start) 조건과 動的 計算始作 (hot-start) 조건의 두가지로 나누어 생각할 수 있다. 정적조건에서는 해석 영역내의 모든 점에서의 수위를 동일하게 하고, x 및 y방향 유속을 '0' 으로 놓아 부정류 계산의 초기조건으로 부여한다. 동적조건은 이전 계산에서의 결과치를 새로운 부정류조건의 초기치로 사용하는 경우이다. 본 연구의 유한요소모형은 정적 계산시작 조건과 동적 계산시작조건을 모두 처리할 수 있도록 구성하였다.

2.3.2 상하류단 경계조건

상하류단의 개방 경계조건은 일관성 있게 주어져야 한다. 2차원 常流상태에서는 유입경계에서 2개의 경계조건(예를들면 x 및 y방향 유속 또는 유량)이 부여되고, 유출 경계에서는 1개의 경계조건(유량 또는 수위)이 필요하게 된다. 2차원 射流상태에서는 유입경계에서만 3개의 경계조건이 필요하고 유출부는 자유상태 또는 어떤 값도 부여되

지 않는 상태로 처리한다. 2차원 유한요소망을 1차원적으로 해석하고자 할 경우에는 常流에서는 상, 하류단 각 1개의 조건이 필요하고 射流에서는 상류단에서만 2개의 조건이 필요로 하게 된다.

2.3.3 불규칙 경계면의 조건

하천의 흐름을 계산하는데 있어서는 不規則한 境界面에 대한 조건이 규정되어야 하는데 不透水層을 갖는 경계면에서는 유량의 연직방향 성분이 일반적으로 '0' 이 된다. 즉,

$$\vec{Q} \cdot \vec{n} = 0 \quad (27)$$

여기서, \vec{n} 는 경계면에서의 外向單位 벡터이고 \vec{Q} 는 유량벡터이다. 유입경계에서는 (27)식의 우변항이 경계면에서의 연직방향 유량성분과 같다. 연직방향 벡터가 x 및 y 방향으로 위치하고 있을 때, 유량의 연직 및 접선방향 성분 유량의 x 및 y 방향에 대한 성분인 p, q 와 동일하다. 만일 연직방향 벡터가 x 및 y 축을 따라 놓여 있지 않다면 x 축에 대한 경사각 θ 를 결정하여 해석하여야 한다.

3. 유한요소모형 RIV-FEM2의 개발

앞절에서 기술된 유한요소 방정식을 기초로 하여 유한요소모형인 RIV-FEM2를 개발하였다. RIV-FEM2는 크게 세가지 부분으로 구성되어 있다. 즉, 전처리(pre-processing)와 주처리(analysis processing)과정은 Fortran-77으로 작성하였고 후처리(post-processing)과정은 turbo-Pascal을 이용하여 전처리와 주처리 과정에서 계산된 결과를 그래픽화 하여 효과적으로 처리할수 있도록 하였다. 후처리 과정은 사용자가 손쉽게 사용할수 있도록 對話式(interactive system)으로 구성하였다.

3.1 前處理 과정 (Pre-Processing)

본 유한요소 모형의 전처리 과정은 부 프로그램 INPUT와 PREP에 의하여 수행된다. INPUT은 각종 입력자료를 처리하는 부분으로서, 전체 격점의 수, 요소의 수, 경계 격점의 수, 계산 시간간격, 계산수행시간, x-y방향의 감쇠치, 조도계수, 시간

가중치등을 읽어 들인다. PREP는 Isoparametric - Laplacian generator 방법에 의하여 자동으로 유한요소망을 생성하는 기능을 갖고 있는데 컴퓨터 내에서 최소한의 band width를 갖도록 처리하고 있다. 유한요소망의 생성은 직선형 및 곡선형에 대하여 가능하며 이들을 조합처리 하거나 별도의 유한요소 좌표에 대한 입력도 가능하도록 되어 있다.

3.2 主處理 과정 (Analysis Processing)

주처리 과정은 부프로그램 GLOBAL, BOUND, NEWRAP, JACOB으로 구성되며, JACOB은 임의의 형상을 가진 local element를 처리하여 Jacobian을 구하는 과정이고 GLOBAL는 local matrix를 global matrix로 바꾸며 NEWRAP 과정에서는 비대칭형 매트릭스를 풀기 위하여 Gauss 소거법을 적용하고 있는데 이 때의 해석 기법은 Hood^{16), 17)}가 개발한 non-pivoting 과 all-core routine 방법을 이용하였다. 계산결과치는 VOLUME에 의하여 내부적인 체적의 보존을 검산하며 DATASV에 의하여 계산된 결과가 저장되고 후처리 과정에 이용되도록 하였다.

3.3 後處理 과정 (Post-Processing)

후처리과정은 2차원 유한요소모형에 의한 계산 결과를 그래픽으로 처리하기 위하여 개발되었다. 이 프로그램은 최대 1000개의 유한요소망을 처리할수 있으며 IBM 방식의 개인용 계산기에서 수행될 수 있도록 하였고 프로그램의 실행을 위한 그래픽카드는 VGA와 HGC의 두가지이고 출력은 화면과 레이저 프린터에 의하여 얻을수 있다. 프로그램은 자료의 입력, 선택사항의 입력, 화면보기, 화면확대, 프린터출력으로 구성된다. 자료입력은 정해진 양식에 의해서 자료를 입력하고, 선택사항 입력은 그림을 그리는데 있어서의 각종 선택이 가능하다. 화면보기는 입력된 자료와 선택에 의해서 화면상에 그림을 그리며, 화면확대는 'zoom' 기능으로서 확대하여 보고 싶은 곳이 있는 경우 그곳을 확대하여 볼 수 있게 하였으며, 프린터 출력은 화면에 그려진 그림을 레이저 프린터로 출력한다.

에 대한 본 모형의 안정성과 수렴성을 검토하였다.

4. 유한요소모형 RIV-FEM2의 적용

본 수학적 모형의 일반적인 거동을 시험하기 위하여 다양한 수치실험이 실시되었다. 2차원 모형을 1차원적으로 해석한 surge와 댐 붕괴 문제에 적용하여 해석적인 해와 비교하였는데 본 연구에서의 감쇠형 Galerkin 법이 안정도 및 surge 선단부 등의 추적에 있어 보다 만족할만한 결과를 얻을수 있었다. RIV-FEM2 모형을 2차원 가상하도에 대하여 수치실험을 실시하여 모형이 가지는 특성을 분석하였다. 수치실험을 위한 2차원 하도로서는 灣曲部, 橋梁部, 縮小部를 가진 水路部 등으로 고려하였다. 본 수치실험을 통하여 모형의 安定性, 收斂性 및 영역내의 質量 流出入量 (mass flux) 의 保存과 計算遂行能力등을 중심으로 검토하였다. 실제 하천에 대한 적용은 하도단면 자료와 상하류단 경계조건을 구할수 있는 미국 미시간주의 휴런강 유역을 설정하여 불규칙한 경계조건과 변화하는 수심

4.1 가상 하도에 대한 적용

4.1.1 만곡부의 경우

그림 1과 같이 격점수 96개, 요소수 74개로 구성된 900 만곡부 수로를 통한 흐름 특성을 해석하였다. 초기의 수심은 1m, 유속은 '0' 으로 놓았고, 1m³/s/m의 유량이 상류단에서 유입되는 것으로 보았으며, 하류단은 閉鎖境界로 처리하여 만곡부에서 渦流현상을 관측하고자 하였다. 또한 평균 Courant 수는 1.2로 하였고 감쇠치는 0.2582로 계산하였다. 그림 1,2는 각 시간대에 대한 유속분포 양상 및 등수심선을 나타내고 있다, 계산결과는 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 만곡부에서의 渦流現象과 이에 따른 水位上昇을 잘 표현하고 있었다.

해석 영역 내에서 본 모형에 의한 계산결과와 질량 유출입량의 오차는 2% 미만으로 나타났고 해의 안정성도 우수하게 나타났다.

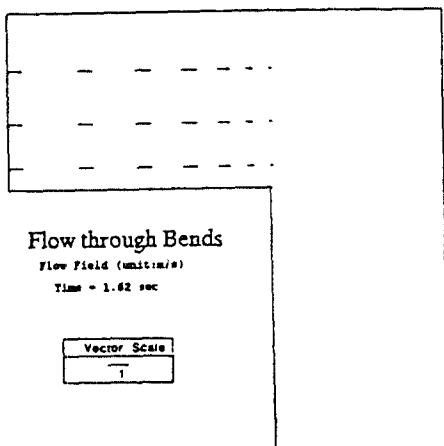


그림 1(a) 만곡부에서의 유속분포 (timestep=7)

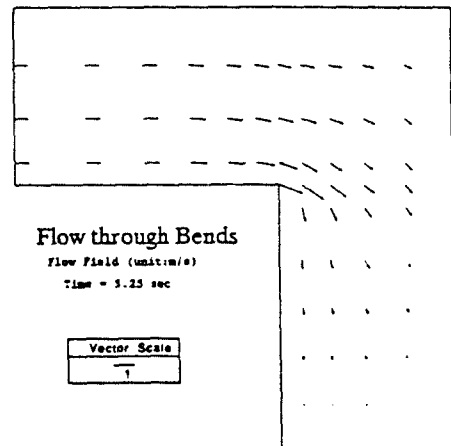


그림 1(b) 만곡부에서의 유속분포 (timestep=14)

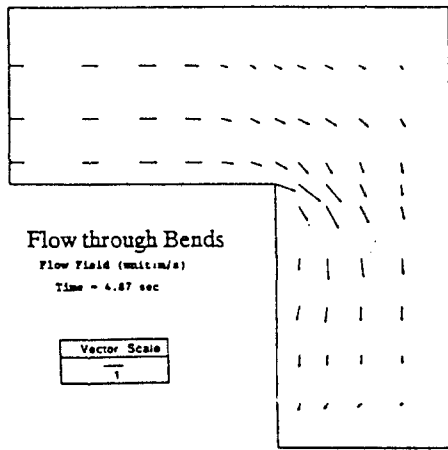


그림 1(c) 만곡부에서의 유속분포
(timestep = 21)

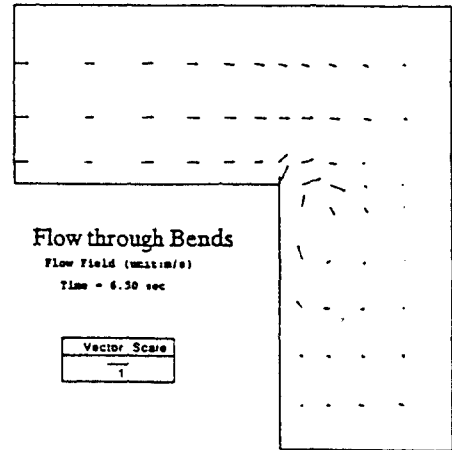


그림 1(d) 만곡부에서의 유속분포
(timestep = 28)

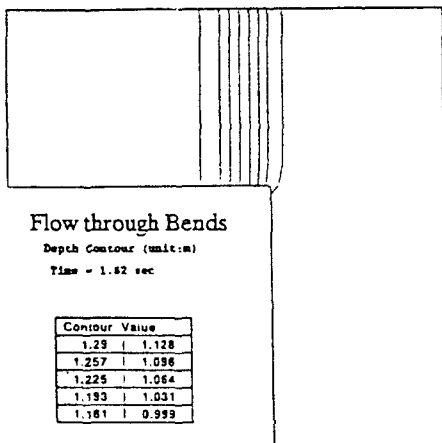


그림 2(a) 만곡부에서의 수심분포
(timestep = 7)

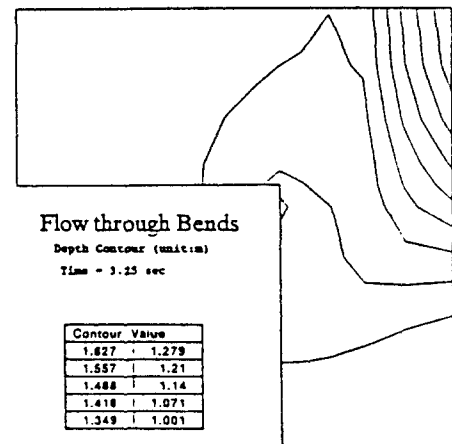


그림 2(b) 만곡부에서의 수심분포
(timestep = 14)

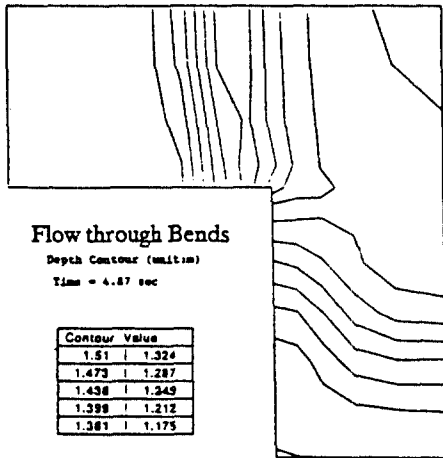


그림 2(c) 만곡부에서의 수심분포 (timestep=21)

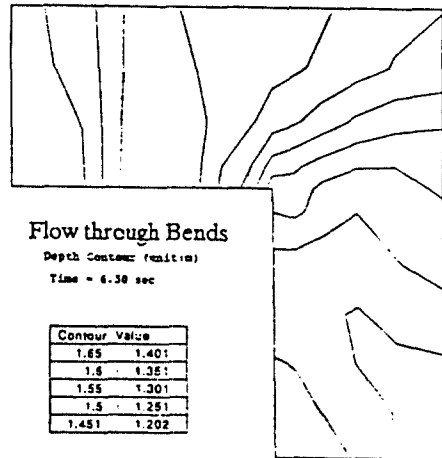


그림 2(d) 만곡부에서의 수심분포 (timestep=28)

4.1.2 교량부의 경우

하도내에 교량부의 영향은 단면축소의 현상으로 나타낼 수 있으며 그림 3의 점축소단면(교량부 1)과 그림 4의 급축소단면(교량부 2)을 교각으로 고려하여 해석하였다. 초기조건은 靜的 計算始作 條件으로 보았고 $1m^3/s/m$ 의 유량이 상류단에서 유입되고 하류단은 개방단으로 처리하였고, 그 밖의 조건은 만곡부의 경우와 동일하게 고려하였다.

축소부로 인한 상류부 동일 지점에서의 수위상승 값은 각 시간대에 대하여 차이를 보이고 있는데 그 결과를 표 1에 정리하였다. 표에서 보는 바와 같이 급축소단면의 경우가 점축소단면에 비하여 5-12cm까지의 더 높은 수위 상승이 나타났으며 교각형상의 영향이 교량상류부에 미치는 효과를 검토하여 볼 수 있었다.

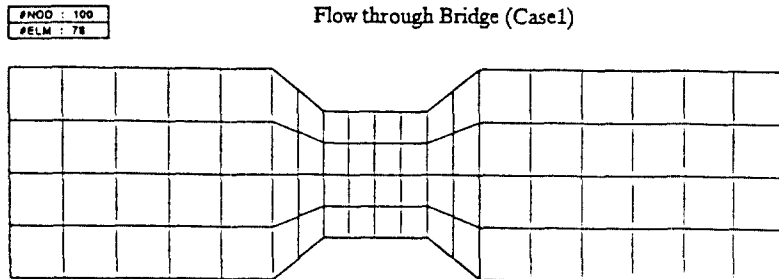


그림 3 교량부(1)의 유한요소망

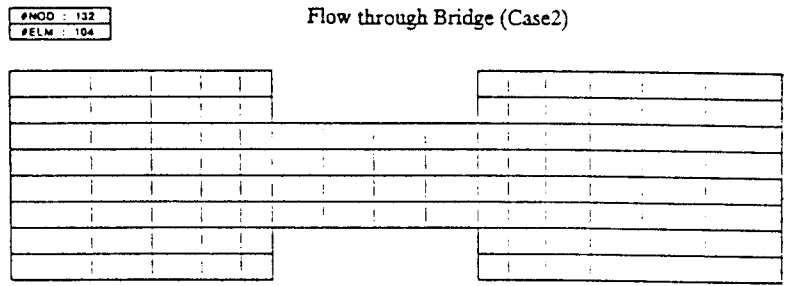


그림 4 교량부(2)의 유한요소망

표 1 교량상류부에서의 수위 (단위: m)

Timestep	점축소단면	급축소단면
7	1.33	1.38
14	1.38	1.43
21	1.40	1.50
28	1.42	1.54

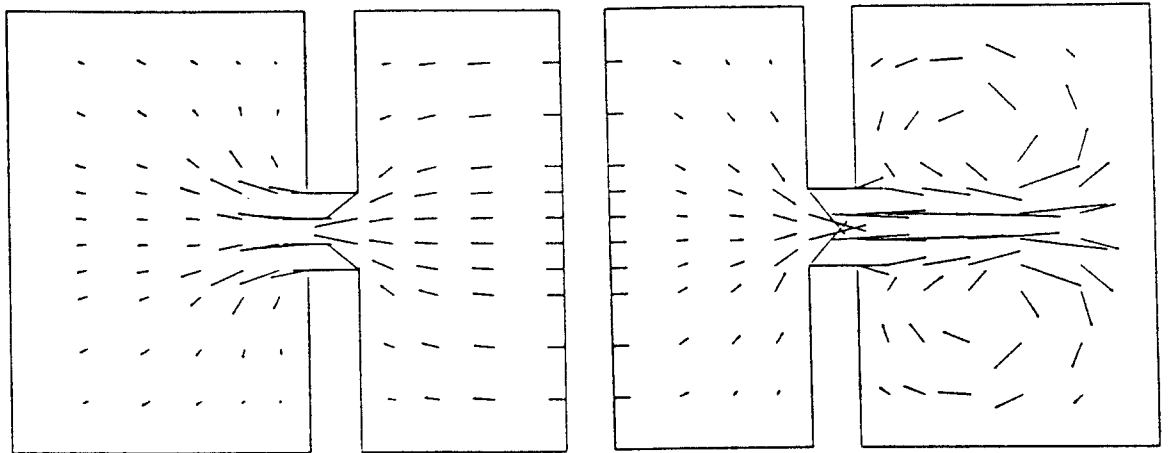


그림 5(a) 대칭적인 축소부를 갖는 수로에서의 유속분포 (timestep=14)

그림 5(b) 대칭적인 축소부를 갖는 수로에서의 유속분포 (timestep=28)

4.1.3 축소부를 가진 대칭수로부

축소부를 갖는 수로의 경우에는 수평한 직사각형 수로에 급격한 축소단면을 가상의 河川堤防 또는 댐 破壞의 경우로 보고 하류단을 폐쇄단으로 처리해서 수위 및 유속분포 상황을 수치실험 하였다. 이 실험의 목적은 급격한 축소와 확대에 의한 비선형항의 유속에 대한 영향이 증대되고 서로 다른 상하류단 경계조건이 존재하는 비교적 복잡한 흐름 상황에서 모형의 계산수행 능력을 평가하고자 함에 있다. 초기조건으로는 유속이 '0'이고 수위를 1m로 가정하였고 상류개방단에서 $1\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$ 의 유량이 연속적으로 유입되도록 하였다. 평균적인 Courant 수가 1.3에서도 안정되고 그림 5와 같이 대칭적인 수치결과를 얻을 수 있었다. 초기상태에서는 흐름은 축소부를 통과하기 전에 수축되었고, 확대부로 유입될때 확산 되었으며 이후에는 渦流領域이 형성되었다. 시간경과에 따라 主流領域의 형성이 중앙부에 집중되고 있으며 와류영역도 뚜렷하게 나타났는데 이는 유사한 경우에 대하여 Garcia 등이 유한차분기법에 의해 계산한 결과치와 그 속도벡터등이 잘 일치되고 있었다.¹¹⁾

4.1.4 비교검토

2차원 만곡부, 교량부, 대칭수로부등에 대하여 본 RIV-FEM2모형을 적용하여 얻은 결과는 표 2, 3과 같다. 표 2는 2차원 수치실험에 대한 관련자료로서 각 경우의 요소수, 격점수, 방정식의 수 및 저장용량의 수를 나타내고 있다. 본 연구에서는 global matrix로 형성된 sparse matrix를 처리할 시 non-pivoting과 all-core routine을 적용함으로써 저장용량을 80-90%까지 감소시킬 수 있었고 계산시간도 극소화를 이룰 수 있었다. 2 차원 수치실험은 IBM 방식의 개인용 컴퓨터 (386 DX급)에서 수행되었으며 대략적인 계산시간은 100개의 요소에 대하여 한 시간당대 약 17-20sec 정도가 소요되어 기존의 계산방법과 비교할때 그 계산속도면에서 매우 효율적인 모형으로 사료되었다. 또한 표 3 에서와 같이 계산영역내에서의 질량 유출입량의 오차는 1.5%-2.3% 정도로 약 2% 내외로 나타났는데 이는 계산과정에서 포함된 數值近似化 과정에서의 오차를 고려한다면 잘 일치되는 것으로 판단되었다.

표 2 2차원 수치실험에 대한 관련자료

	No. of Element	No. of Nodes	No. of Equations	No. of Storage
만곡부	74	96	235	11823
교량부(1)	76	100	249	7774
교량부(2)	104	132	333	16137
대칭수로부	116	148	358	23260

표 3 RIV-FEM2의 효율성 비교

	No. of storage		저장용량의 감소율	mass flux 의 오차
	all-core routine	기존의 방법		
만곡부	11823	55225	78.5%	1.8%
교량부(1)	7774	59536	86.9%	1.5%
교량부(2)	16137	104976	84.6%	2.0%
대칭수로부	23260	128164	81.9%	2.3%

4.2 실제 하천에 대한 적용

실제하천에서의 복잡한 흐름에 관한 수치모형화 과정에 있어서는 대상시스템의 기하학적 지형학적 특성을 반영하여 수치해를 일관성있게 처리하여야 한다. 감쇠형 Galerkin 방법을 사용한 본 유한요소모형은 해석적 및 수치계산적으로 만족할 만한 계산 결과를 얻을 수 있는 수치해석 모형으로 증명되었고, 전처리 및 후처리과정을 효율적으로 다룰 수 있도록 범용화된 프로그램으로 제시하였다. 본 연구에서 개발한 RIV-FEM2의 적용성을 증명하고자 미국 Michigan주에 위치한 Huron 강에 대한 하천자료 및 상하류단 경계조건 자료를 사용하였다. 하도구간은 그림 6에서 보는 바와 같이 격점수가 694, 요소수가 611, 경계 격점의 수가 168개로 하였고 대형시스템(Cyber 170)에서 수행되었다. 계산시간 간격은 0.01 hrs, Manning의 조도계수는 0.024, 초기수위는 10m, 초기유속은 '0'인 靜的 計算始作 條件으로 하였다. 해석구간내에서는 2개의 섬이 위치하고 있었으며 상류단 경계조건으로 1-6 및 7-11 격점에서 x 및 y 방향의 유량의 경계조건이 주어졌고 하류단 경계조건으로 682-694 격점에서 수위경계 조건이 주어졌다. 계산결

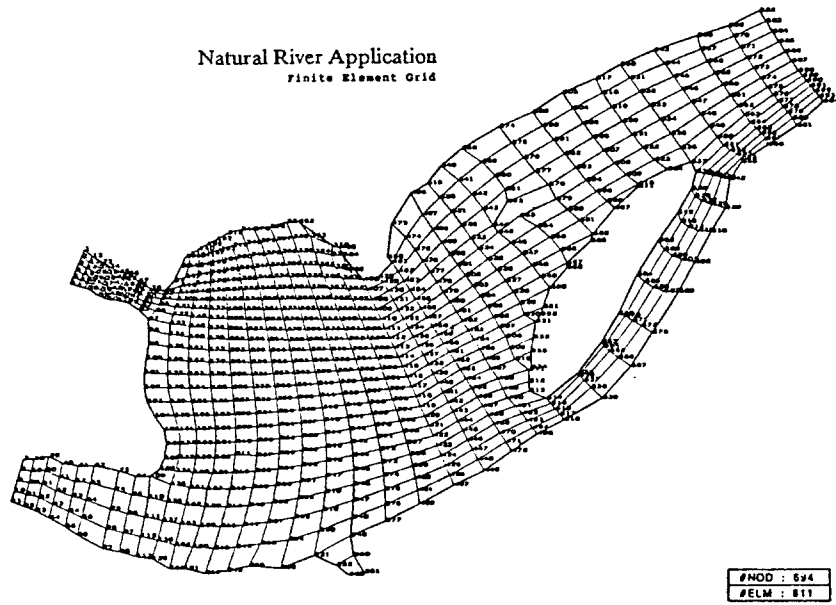


그림 6 실제 하천에서의 유한요소망

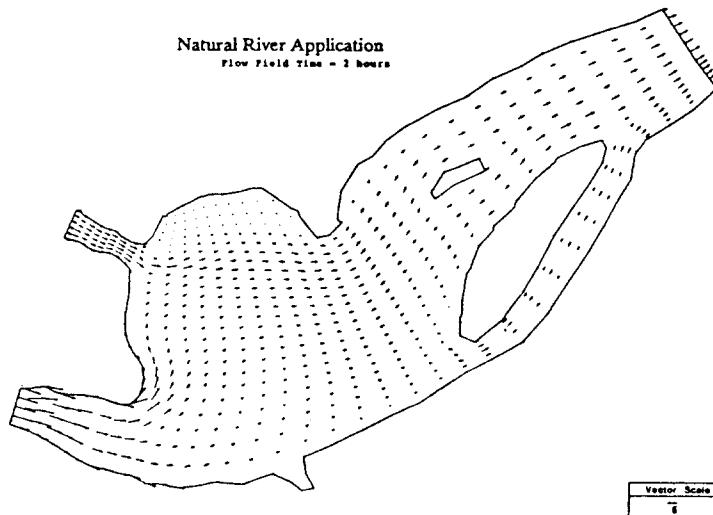


그림 7 실제 하천에서의 유속분포도

과 각 시간대에서 그림 7과 같이 유속벡터를 얻을 수 있었던 바, 수위 및 x,y 방향의 유속벡터를 구할 수 있었다. 계산시작 2시간 이후에는 흐름의 流速場에 큰 변화가 없었으므로, 이 때부터 定常狀態에 도달한 것으로 판단되었다. 이 시간대에서 단면의 폭이 비교적 좁은 상류단 부근에서는 유속이 매우 크게 나타났고 좌측상단부의 貯溜領域에서는 유속이 거의 없는 상태로 계산되었으며 섬돌레에서도 유속벡터 및 수위변화가 합리적으로 계산되었다. 특히, 정상상태에서 유입되는 유량과 유출되는 유량의 오차가 2.5% 정도로 나타나 질량 유출입량이 잘 보존되고 있었는데 이는 계산과정에 포함된 數值近似化와 離散化 過程으로 인한 오차등을 고려한다면 매우 양호한 결과로 판단되었다. 앞으로, 본 모형은 더욱 다양한 상황에서의 하천지형자료와 실측자료를 기초로 하여, 본 모형의 檢定 및 適用을 통하여 하천에서의 각종 유동해석을 실시할 수 있도록 계속 발전시켜 나아가야 할 것이다.

5. 결 론

본 연구는 하천에서의 2차원 동수역학적 유동해석을 위한 유한요소모형 RIV-FEM2를 개발하고 가상하도 및 실제하천에서 그 적용성을 검토한 것으로서 그 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 2次元 淺水方程式을 기본 방정식으로 하고 이를 不連續 補間函數와 upwinding weighting을 도입한 減衰型 Galerkin법에 의하여 해석하는 유한요소모형을 개발하였다.

2. RIV-FEM2 모형은 전처리, 주처리 및 후처리 과정으로 구성되어 있으며, 전처리와 주처리 과정은 Fortran-77로, 후처리 과정은 turbo-Pascal에 의하여 효율적으로 처리할 수 있도록 사용자 편의성을 증대한 수치해석 모형으로 개발하였다.

3. 後處理과정에서는 Newton-Raphson 과정에 의하여 sparse한 비대칭 메트릭스를 풀기 위하여 Gauss 소거법을 적용하였으며, 해석기법으로는 non-pivoting과 all-core routine 방법을 적용함으로써 컴퓨터의 貯藏容量을 80-90%까지 줄이며 계산속도도 크게 단축하는 효율적인 알고리즘을 제시하였다.

4. 後處理과정에서는 계산결과를 그래픽으로 처리하기 위하여 개발되었는데 PC상에서 최대 1000개의 유한요소망에 대하여 격점의 형상, 속도 벡터 및 등수심선을 도시할 수 있으며 'zoom' 기능도 갖고 있어 세부적인 도시도 가능하도록 하였다.

5. 2차원 灣曲部, 橋梁部, 對稱水路部 등에 대한 수치실험 결과 본 모형은 각 경우에 대하여 유속분포, 수면형 등에서 收斂性과 安定性을 확인 할 수 있었다. 해석영역내에서 계산된 질량 유출입량의 보존오차도 2% 이내로 나타났다.

6. 불규칙한 자연지형에서의 경계조건과 다양한 상하류단 경계조건을 가진 실제하천에 대하여 본 모형을 적용한 결과 일정시간 도달이후에 정상 상태의 흐름을 얻을 수 있었으며, 본 모형이 다양한 流動條件에 대하여 안정된 계산을 수행할 수 있음을 알 수 있었다.

7. 본 RIV-FEM2 모형은 댐 破壞등의 急變不定流 解析, 橋梁, 水門 등의 수공구조물 주위에서의 流動解析, 堤內地에서의 氾濫 및 浸水解析 뿐만 아니라 汚染物의 擴散 문제와 연관된 수질 오염도 해석 등의 실제분야에 응용될 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 논문은 1991년도 한국과학재단에서 지원한 일반기초 연구사업 (과제번호: KOSEF 911-1302-010-1)으로 수행되었으며, 지원당국에 깊이 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. 서승원, 박정웅, 윤태훈 (1983), "흐름단면의 급변화에 의한 순환의 수치모형", 대한토목학회 논문집, Vol.3, No.4, pp.21-31.
2. 윤태훈 (1982), "유한요소법에 의한 항만에서의 토사이동추정모형", 대한토목학회 논문집, Vol.2, No.2, pp.19-28.
3. 이길성, 강주환 (1989), "천수방정식의 유한차분 특성", 대한토목학회논문집, Vol.9, Vol.1, pp.41-52.
4. 이종태, 이원환 (1983), "항내의 장주기과 해석을

- 위한 2차원 부정류의 수학적 모형”, 대한토목학회논문집, Vol.3, No.1, pp.13-24.
5. 최병호 (1981), “A Tide and Surge Computation for Kyonggi Bay”, Bulletin of KORDI, Vol.3, No.1.
 6. 한건연, 김정욱 (1982), “수치모델에 의한 만내의 2차원 동수역학 해석”, 한국수문학회논문집, Vol. 15, No.4, pp.45-53.
 7. Akanbi, A.A and Katopodes, N.D.(1988), “Model for Propagation on Initially Dry Bed,” J. of Hyd. Eng., ASCE, Vol.114,NO.7., pp.689-706.
 8. Baker, A.J. and Soliman,M.O. (1981), “On the Accuracy and Efficiency of a Finite Element Tensor Product Algorithm for Fluid Dynamics Application”, Comp. Meth. App. Mech. and Eng., Vol.27, pp.215-237.
 9. Cooley, R.L., and Moin, S.A. (1976), “Finite Element Solution of Saint-Venant Equation”, J. of Hyd. Div., ASCE, Vol.102, No.6, pp 759-775.
 10. Dendy, J.E. (1974)“ Two Methods of Galerkin-type Achieving Optimum L2 rates of Convergence for First-Order Hyperbolics”, SIAM J. of Numerical Analysis. Vol.11, pp.637-653.
 11. Garcia, R.and Kahawita, R.A.(1986) “Numerical Solution of the St. Venant Equations with the MacCormack Finite Difference Scheme,” Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol.6. pp.259-274
 12. Gee, D.M., and MacArthur,R.C. (1981), “Evaluation and Application of the Generalized Finite Element Hydrodynamics Model, RMA-2”, Two-Dimensional Modeling, Hydrologic Engineering Center, pp.97-113.
 13. Gray, W.G. (1980), “Do Finite Element Models Simulate Surface Flow?”, Finite Elements in Water Resources III, Univ. of Mississippi Press, pp.1.122-1.136.
 14. Gray, W.G., and Lynch, D.R. (1979), “On the Control of Noise in Finite Element Tidal Computations : A Semi-Implicit Approach”, Computers and Fluids Vol.7, No.1, pp.47-67.
 15. Gray, W.G., Kinnmark, I.(1982), “QUIET : A Quadratic Isoparametric Explicit in Time Finite Element Model for Tidal Circulation, Princeton University, pp.1-106.
 16. Hood, P. (1976), “Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices”, Int. J. for Num. Meth. Eng., Vol.10, pp.379-399.
 17. Hood, P. (1977), “Note on Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices”, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.11, p.1055.
 18. Katopodes, N.D.(1984),“A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow”, J. of Hyd. Eng., ASCE, Vol.110, No.4, pp.450-466.
 19. Katopodes, N.D. (1984), “Two-Dimensional Surge and Shocks in Open Channels”, J. of Hyd. Eng., ASCE, Vol.110, No.6, pp.794-812.
 20. Kawahara, M.,and Umetsu, T. (1986), “Finite Element Method for Moving Boundary Problems in River Flow”, Int.J. for Numerical Methods in Fluids, Vol.6, pp.365-386
 21. Keuning, D.H. (1976), “Application of Finite Element Method to Open Channel flow”, J. of Hydraulics Division, ASCE, Vol.102, No.4 pp.459-468.
 22. King, I.P.(1976), “Finite Element Methods for Unsteady Flow Routing through Irregular Channels”, Finite Element in Water Resources, Pentech Press, pp.4.165-4.184.
 23. King, I.P., and Norton, W.R. (1976), “Recent Application of RMA’s Finite Element Models for Two-Dimensional Hydrodynamics and Water Quality”, Finite Element in Water Resources, Pentech Press pp. 2.81-2.99.
 24. Lee, J.K., and Froehlich, D.C. (1986), Review of Literature on the Finite Element Solution of the Equations of Two-Dimensional Flow in the Horizontal Plane, U.S. Geological Survey Circular 1009, pp.1-65.
 25. Norton, W.R. (1980), EBMUD Hydrodynamic and Water Quality Models for San Francisco Bay, Resources Management Associates, pp.1-260.
 26. Raymond, W.H., and Garder, A. (1976), “Selective Damping in Galerkin Method for Solving Wave Problems with Variable Grids”, Monthly

- Weather Review, Vol.104, pp.1583-1590.
27. Walters, R.A.(1980), "The Frontal Method in Hydrodynamics Simulation", Computers and Fluids, Vol.8, pp.265-272.
28. Walters, R.A., and Cheng, R.T. (1978), "A Two-Dimensional Hydrodynamic Model of a Tidal Estuary", Finite Elements in Water Resources, Pentech, pp.2.3-2.21.
29. Walters R.A. and Cheng, R.T. (1978), "Accuracy of an Estuarine Hydrodynamic Model Using Smooth Element", Water Resources Research, Vol.16, No.1, pp.187-195.