

〈論 文〉

불연속 변화단면 아치의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Arches with Thickness varying in a Discontinuous Fashion

이 병 구* · 오 상 진** · 모 정 만*** · 김 현 상***

Lee Byoung Koo, Oh Sang Jin, Mo Jeong Man and Kim Hon Sang

(1993년 9월 2일 접수 ; 1993년 10월 9일 심사완료)

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to present an analytical method for free vibration of arches with thickness varying in a discontinuous fashion. The ordinary differential equations governing the free vibration of these arches are derived as nondimensional forms including the effect of rotatory inertia. The governing equations are solved numerically for the circular and sinusoidal arches with hinged-hinged-hinged end clamped-clamped end constraints. As the numerical results, the effect of rotatory inertia on the natural frequencies is reported. The lowest four natural frequencies are presented as the functions of four nondimensional system parameters: the rise to span length ratio, the slenderness ratio, the section ratio and the ratio of discontinuous section.

1. 서 론

아치는 구조적으로 매우 이상적이어서 토목, 건축, 기계, 선박, 항공 등 구조공학 관련분야에서 기본 단위 구조로 이용되기 때문에 아치의 동적 거동 특히 자유진동에 관한 폭넓은 연구가 이루어져 왔다^(1~9). 참고문헌 (1)~(3)에서는 여러가지 선형을 갖는 등단면 아치에 대한 연구가 이루어졌으며, 참고문헌 (4)~(8)에서는 1차식 혹은 2차식 등으로 단면이 연속적으로 변화하는 아치에 대한 연구가 이루어졌다.

Royster⁽⁴⁾는 단면깊이가 일정하고 단면폭이 변화하는 구형단면을 갖는 양단고정 원호아치의 자유진동을 해석하였으며, Wang⁽⁵⁾은 아치축 접선각의

여할에 비례하는 변화단면을 갖는 양단고정 포물선 아치의 자유진동을 해석하였다. 이 두 문헌에서는 Rayleigh-Ritz방법을 이용하여 자유진동을 해석하였으며 최저차 고유진동수만을 계산하였다. Sakiyama⁽⁶⁾는 참고문헌 (5)에서와 같은 변화단면을 갖는 아치의 자유진동을 해석하였다. 이 논문에서는 대칭진동과 역대칭진동에 대하여 각각 3차모드까지 계산하였다. Maurizi 등⁽⁷⁾은 Rayleigh-Ritz method를 이용하여 두께가 일정하고 폭이 변화하는 양단고정 원호아치의 자유진동을 해석하였다. 이 등⁽⁸⁾은 임의 변화곡물 임의 변화단면 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 양단고정과 양단단순지지의 경계조건을 갖는 1차식 변화단면 포물선아치의 자유진동을 해석하였다.

이상에서와 같이 대부분의 연구들에서는 단면이 연속적으로 변화하는 아치에 대한 연구가 이루어졌다. 그러나 실제 구조물에서 아치부재를 다른 부재에 연결하거나 아치축상 일부분을 보강함으로써 아치단면이 불연속적으로 변화하는 경우가 있다. 이러

*정회원, 원광대학교 토목공학과

**정회원, 원광대학교 대학원

***원광대학교 대학원

한 구조형식에 대한 연구는 Laura 등⁽⁹⁾에 의해서 이루어졌으며, 이 논문에서는 Rayleigh-Ritz method를 이용하여 폭이 일정하고 단면높이가 불연속인 원호 아치에 대한 제 1고유진동수만을 해석하였다.

본 연구에서는 단면이 불연속적으로 변화하는 변화곡률아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 해석함으로써 대상구조의 자유진동 특성을 규명하는데 연구목적이 있다. 유도된 미분방정식에는 회전관성의 영향을 고려하였으며, 실제 수치 해석 예에서는 단순지지-단순지지 및 고정-고정의 경계조건을 갖는 원호아치와 정현아치를 택하여 해석하였다.

2. 수학적 모델

2.1 지배미분방정식

Fig. 1은 불연속 변화단면을 갖는 변화곡률 아치의 기하학적 형상을 나타내고 있다. 이 그림에서 l , h 는 각각 지간길이 및 높이를 나타내고, a 는 단면의 불연속 구간을 정의해 주는 변수이다. 아치의 양쪽 단부로부터 al 구간내의 단면높이, 단면적 및 단면2차모멘트는 각각 d_1, A_1, I_1 , 중앙 부분에서의 단면높이, 단면적 및 단면2차모멘트는 d_2, A_2, I_2 로 나타낸다. 또한 임의 좌표 (x, y) 에서 아치의 곡률반경은 a 로 표시되어 있으며, ϕ 는 곡률중심방향과 수평축이 이루는 각도, θ 는 아치축의 접선각을 나타낸다.

Fig. 1과 같은 제원을 갖는 아치가 자유진동하게 되면 아치 곡률중심방향 변위 w 및 접선방향 변위 v 에 의해 아치미소요소에는 축방향력 N , 전단력 V

및 휨모멘트 M 의 합응력이 발생하며, 질량을 가지고 있는 아치미소요소에는 곡률중심방향의 관성력 P_r , 접선방향의 관성력 P_t 및 회전관성우력 T 가 발생한다. 아치미소요소에 작용하는 이들 합응력 및 관성력에 대한 동적평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$dN/d\phi + V + aP_t = 0 \tag{1}$$

$$dV/d\phi - N + aP_r = 0 \tag{2}$$

$$a^{-1}dM/d\phi - V - T = 0 \tag{3}$$

N, M 및 단면회전각 Ψ 를 변위 w, v 의 항으로 표시하면 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$N = E[Aa^{-1}(v' + w) + Ia^{-3}(w'' + w)] \\ = E[FA_1a^{-1}(v' + w) + GI_1a^{-3}(w'' + w)] \tag{4}$$

$$M = -E Ia^{-2}(w'' + w) \\ = -E GI_1 a^{-2}(w'' + w) \tag{5}$$

$$\Psi = a^{-1}(w' - v) \tag{6}$$

윗 식들에서 $(\cdot) = d/d\phi$ 를 의미하며, 식 (4), (5)에서 E 는 아치재료의 탄성계수이다. 또한 F, G 는 식 (7), (8)에 나타난 바와 같이 아치단면의 변화를 정의해주는 ϕ 의 함수로서 각각 아치축상 임의점과 아치단부의 단면적 및 단면2차모멘트비를 나타낸다.

$$F = A/A_1 \tag{7}$$

$$G = I/I_1 \tag{8}$$

아치가 조화진동을 한다고 가정하면 관성력 및 회전관성우력은 다음 식들과 같이 표시된다.

$$P_r = \gamma A \omega^2 w \\ = \gamma F A_1 \omega^2 w \tag{9}$$

$$P_t = \gamma A \omega^2 v \\ = \gamma F A_1 \omega^2 v \tag{10}$$

$$T = \gamma \omega^2 I a^{-1}(w' - v) \\ = \gamma \omega^2 G I_1 a^{-1}(w' - v) \tag{11}$$

윗 식들에서 γ 는 아치재료의 단위체적당 질량이며, ω 는 고유각진동수 (rad/sec)이다.

식 (4), (5)에서 $dN/d\phi, dM/d\phi$ 를 구하면 각각 식 (12), (13)과 같다. 이때 불연속 변화단면을 갖는 아치는 일정구간내에서 등단면이므로 F, G 는 각 구간내에서 일정한 상수값을 가지며, $dF/d\phi = dG/d\phi = 0$ 이다.

$$dN/d\phi = E[FA_1a^{-1}(v'' + w') - FA_1a^{-2}a'(v' + w) \\ + GI_1a^{-3}(w''' + w') - 3GI_1a^{-4}a'(w'' + w)] \tag{12}$$

$$dM/d\phi = -E[GI_1a^{-2}(w''' + w')]$$

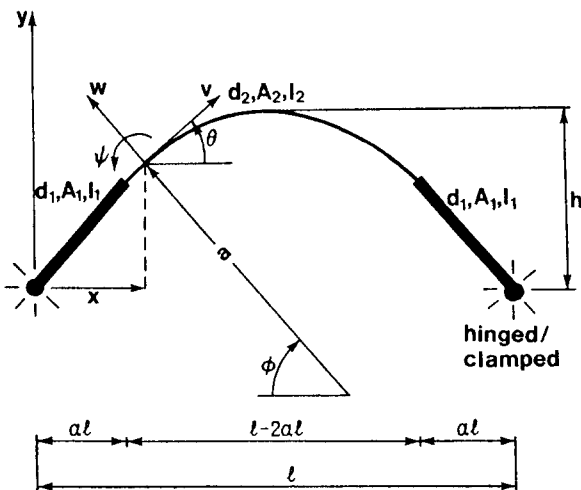


Fig. 1 Arch geometry

$$-2GI_1 a^{-3} a' (w'' + w)] \quad (13)$$

식 (11), (13)을 식 (3)에 대입하고 전단력 V 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= a^{-1} dM/d\phi - R \cdot T \\ &= -E[GI_1 a^{-3} (w''' + w') - 2GI_1 a^{-4} a' (w'' + w)] \\ &\quad - R \cdot \gamma \omega^2 GI_1 a^{-1} (w' - v) \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에서 R 은 회전관성의 고려여부를 나타내는 지표로서 그 내용은 다음과 같다.

$$R=0 : \text{회전관성을 무시하는 경우} \quad (15.1)$$

$$R=1 : \text{회전관성을 고려하는 경우} \quad (15.2)$$

식 (14)에서 $dV/d\phi$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} dV/d\phi &= -E[GI_1 a^{-3} (w'''' + w'') - 5GI_1 a^{-4} a' \\ &\quad \times (w''' + w') - (8GI_1 a^{-5} a'^2 - 2GI_1 a^{-4} a'') \\ &\quad \times (w'' + w)] - R \cdot \gamma \omega^2 [GI_1 a^{-1} (w'' - v) \\ &\quad - GI_1 a^{-2} a' (w' - v)] \end{aligned} \quad (16)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l, \eta = y/l, \delta = w/l, \lambda = v/l \quad (17)$$

$$f = h/l, \rho = a/l, s = l/r \quad (18)$$

식 (18)에서 r 은 식 (19)로 정의되는 단면회전반경이다.

$$r = (I_1/A_1)^{0.5} \quad (19)$$

식 (2)에 식 (16), (4), (9)를 대입하고 식 (17), (18)의 무차원변수들을 이용하여 정리하면 식 (20)을 얻을 수 있고, 식 (1)에 식 (12), (14), (10)을 대입하고 무차원변수들을 이용하여 정리하면 식 (21)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta'''' &= 5\rho^{-1} \rho' \delta''' - (2 + 8\rho^{-2} \rho'^2 - 2\rho^{-1} \rho'' + RC_i^2 s^{-2} \rho^2) \delta'' \\ &\quad + (5\rho^{-1} \rho' + RC_i^2 s^{-2} \rho \rho') \delta' \\ &\quad - (1 + 8\rho^{-2} \rho'^2 - 2\rho^{-1} \rho'' + s^2 FG^{-1} \rho^2 - C_i^2 FG^{-1} \rho^4) \delta \\ &\quad - (s^2 FG^{-1} \rho^2 - RC_i^2 s^{-2} \rho^2) \lambda' - RC_i^2 s^{-2} \rho \rho' \lambda \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \lambda'' &= s^{-2} GF^{-1} \rho^{-3} \rho' \delta'' + (RC_i^2 s^{-4} GF^{-1} - 1) \delta' \\ &\quad + (\rho^{-1} \rho' + s^{-2} GF^{-1} \rho^{-3} \rho') \delta \\ &\quad + \rho^{-1} \rho' \lambda' - C_i^2 s^{-2} (Rs^{-2} GF^{-1} + \rho^2) \lambda \end{aligned} \quad (21)$$

식 (20), (21)의 지배미분방정식에서 C_i 는 식 (22)와 같이 표시되는 무차원 고유진동수이고, i 는 모드번호(mode number)이다.

$$C_i = \omega_i s l (\gamma/E)^{0.5}, \quad i=1,2,3,4,\dots \quad (22)$$

이상에서 식 (20), (21)은 불연속 변화단면을 갖는 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식이며, 식 (20), (21)에서 $F=G=1$ 인 경우 식 (20), (21)은 참고문헌 (3)의 변화곡률 등단면 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식으로 환원됨을 알 수 있다.

식 (20), (21)에서 F, G 를 단면제원에서 관한 식으로 나타내면 다음과 같다. 폭이 b 로 일정하고 높이가 불연속인 경우 $A_1 = bd_1, A_2 = bd_2, I_1 = bd^3/12, I_2 = bd_2^3/12$ 이므로 아치단부의 단면을 기준으로 불연속 구간에서의 F, G 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F &= A_2/A_1 \\ &= d_2/d_1 \\ &= n \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} G &= I_2/I_1 \\ &= (d_2/d_1)^3 \\ &= n^3 \end{aligned} \quad (24)$$

식 (23), (24)는 폭이 일정하고 높이가 불연속인 경우 단면변화비 F, G 를 단면제원비 n 으로 나타낸 것이며, 다른 단면형상에 대해서도 같은 방법으로 표현할 수 있다.

식 (20), (21)에서 변화곡률계수 ρ, ρ', ρ'' 은 아치의 선형식 $y=y(x)$ 가 주어지면 다음과 같이 구할 수 있다. 아치의 선형식을 무차원 변수를 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\eta = \eta(\xi) \quad (25)$$

식 (25)로 표현되는 선형식에 대하여 ϕ 및 ρ 는 다음 식 (26), (27)로 부터 결정한다.

$$\phi = \pi/2 - \tan^{-1}(d\eta/d\xi) \quad (26)$$

$$\rho = \frac{[1 + (d\eta/d\xi)^2]^{3/2}}{d^2 \eta/d\xi^2} \quad (27)$$

또한 ρ', ρ'' 은 식 (26), (27)로 부터 다음 식 (28), (29)를 이용하여 구할 수 있다.

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \quad (28)$$

$$\rho'' = \frac{d\rho'}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \quad (29)$$

이상의 식 (27), (28), (29)를 이용하면 식 (20), (21)의 미분방정식에 포함된 변화곡률계수 ρ, ρ', ρ'' 을 결정할 수 있다. 본 연구에서는 해석 대상구조로

서 원호아치와 정현아치를 택하고자 하며 이들 선형에 대한 변화곡률계수의 결정에 대해서는 2.2절에서 논한다.

아치단부($x=0$ 또는 $x=l$)에서 단순지지단 및 고정단에 대한 경계조건식은 다음과 같다. 먼저 단순지지단에서 $w=v=M=0$ 이므로 식 (5)와 무차원 변수들을 이용하면 다음의 무차원 경계조건식이 유도된다.

$$\delta=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (30.1)$$

$$\delta''=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (30.2)$$

$$\lambda=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (30.3)$$

고정단에서는 $w=v=\psi=0$ 이므로 식 (6)과 무차원 변수들을 이용하면 다음의 경계조건식이 유도된다.

$$\delta=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (31.1)$$

$$\delta'=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (31.2)$$

$$\lambda=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (31.3)$$

본 연구에서 아치의 기하학적 형상은 아치정점을 기준으로 대칭이므로 진동형은 대칭진동형과 역대칭진동형으로 구분된다. 아치정점에서 이들 진동형에 대한 경계조건은 다음과 같다⁽¹¹⁾.

먼저 대칭진동형에 대한 아치정점에서의 무차원 경계조건식은 다음과 같다.

$$\delta'=0, \xi=0.5 \text{ 에서} \quad (32.1)$$

$$\delta'''=0, \xi=0.5 \text{ 에서} \quad (32.2)$$

$$\lambda=0, \xi=0.5 \text{ 에서} \quad (32.3)$$

다음으로 역대칭진동형에 대한 아치정점에서의 무차원 경계조건식은 다음과 같다.

$$\delta=0, \xi=0.5 \text{ 에서} \quad (33.1)$$

$$\delta''=0, \xi=0.5 \text{ 에서} \quad (33.2)$$

$$\lambda'=0, \xi=0.5 \text{ 에서} \quad (33.3)$$

식 (20), (21)의 미분방정식을 수치해석하기 위하여 아치우단($\xi=1$)의 경계조건식 식 (30.1)~(30.3) 및 식 (31.1)~(31.3)을 이용할 수 있으나 이 경우 동일 고유진동수를 가지며 대칭진동형과 역대칭진동형을 나타내는 중근의 값을 찾을 수 없으므로 본 연구에서는 아치정점에서의 경계조건식을 이용한다.

2.2 변화곡률계수 ρ, ρ', ρ'' 의 결정

Fig. 2에 나타낸 지간길이 l , 반경 a 및 높이 h 를 갖는 원호아치의 선형식을 (x, y) 좌표계에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

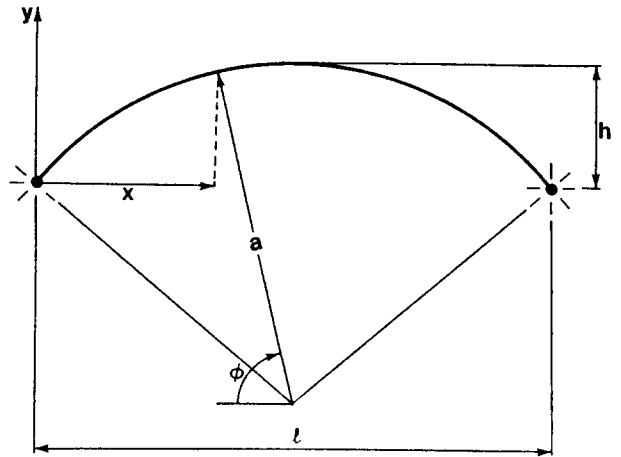


Fig. 2 Circular arch

$$y = a \sin \phi + h - a \quad (34)$$

무차원변수를 이용하여 식 (34)를 무차원 선형식으로 나타내면 다음 식 (36)과 같다.

$$\eta = \rho \sin \phi + f - \rho \quad (35)$$

식 (35)를 이용하면 식 (26)~(29)로부터 원호아치에 대한 $\phi, \rho, \rho', \rho''$ 을 다음 식들과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{0.5 - \xi}{\rho} \right) \quad (36)$$

$$\rho = \frac{4f^2 + 1}{8f} \quad (37)$$

$$\rho' = \rho'' = 0 \quad (38)$$

Fig. 3의 (X, Y) 좌표계 위에 있는 정현아치의 선형식은 다음과 같다.

$$Y = H \sin(\pi X/L) \quad (39)$$

Fig. 3에서 두 좌표계 사이의 $X = \beta l + x, Y = H - h + y$ 의 관계식을 이용하고 무차원 변수를 이용하

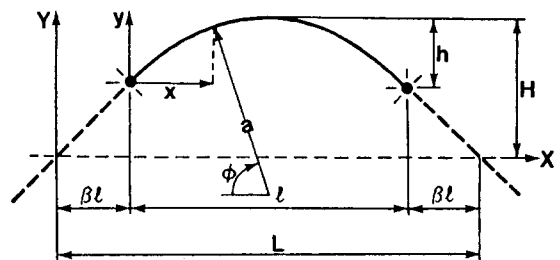


Fig. 3 Sinusoidal arch

여 정현아치의 선형식을 다시쓰면 다음과 같다.

$$\eta = A \sin(b_1\xi + b_2) + f - A \quad (40)$$

식 (40)에서 A, b_1, b_2 의 내용은 다음 식들과 같다.

$$A = \frac{f}{1 - \sin(b_1)} \quad (41)$$

$$b_1 = \frac{\pi}{1 + 2\beta} \quad (42)$$

$$b_2 = \frac{\pi\beta}{1 + 2\beta} \quad (43)$$

식 (40)을 이용하면 식 (26)~(29)로부터 정현아치에 대한 $\phi, \rho, \rho', \rho''$ 을 다음 식들과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \pi/2 - \tan^{-1}[b_1 A \cos(b_1\xi + b_2)] \quad (44)$$

$$\rho = \frac{[1 + b_1^2 A^2 b_4^2]^{3/2}}{b_1^2 A b_3} \quad (45)$$

$$\rho' = -\frac{b_4 [1 + b_1^2 A^2 b_4^2]^{3/2} [1 + b_1^2 A^2 b_4^2 + 3b_1^2 A^2 b_3^2]}{b_1^3 A^2 b_3^3} \quad (46)$$

$$\rho'' = \frac{[1 + b_1^2 A^2 b_4^2]^{3/2}}{b_1^4 A^3 b_3^3} [(1 + b_1^2 A^2 b_4^2)(1 + b_1^2 A^2 b_4^2 + 3b_1^2 A^2 b_3^2) + 3b_1^2 A^2 b_4^2(1 + b_1^2 A^2 b_4^2 + 3b_1^2 A^2 b_3^2) - 4b_1^2 A^2 b_4^2(1 + b_1^2 A^2 b_4^2) + 3b_3^{-2} b_4^2(1 + b_1^2 A^2 b_4^2)]$$

$$\times (1 + b_1^2 A^2 b_4^2 + 3b_1^2 A^2 b_3^2) \quad (47)$$

식 (45)~(47)에서 b_3, b_4 의 내용은 각각 다음 식들과 같다.

$$b_3 = \sin(b_1\xi + b_2) \quad (48)$$

$$b_4 = \cos(b_1\xi + b_2) \quad (49)$$

이상에서 원호 및 정현아치의 변화곡률계수 결정에 대하여 설명하였으며, 다른 선형의 아치에 대해서도 이와 같은 방법으로 변화곡률계수를 구할 수 있다.

3. 수치해석방법 및 검증

미분방정식 식 (20), (21)의 엄밀해는 존재하지 않으므로 수치해석법에 의하여 수치해를 구해야 한다. 식 (20), (21)의 미분방정식에는 불확정량인 무차원 고유진동수 C_i 항이 포함되어 있으므로 이 C_i 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 수치적분을 시행한다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 높아 공학관련문제에 많이 이용되고 있는 Runge-Kutta method⁽¹²⁾를 이용하였다.

식 (20), (21)의 미분방정식을 수치해석하기 위해

Table 1 Comparison of frequency parameter C_i between this study and finite element method(SAP90)

Geometry of arch	i	Frequency parameter, C_i		Deviation* (%)
		SAP90	This study	
Circular Hinged-Hinged $f=0.1, s=100$ $n=2, \alpha=0.2$	1	49.21	50.06	1.73
	2	79.66	80.42	0.95
	3	109.2	108.6	0.55
	4	218.9	217.8	0.50
Circular Clamped-Clamped $f=0.3, s=120$ $n=0.8, \alpha=0.3$	1	32.20	31.90	0.93
	2	62.14	61.77	0.60
	3	113.7	112.9	0.70
	4	162.1	161.6	0.31
Sinusoidal($\beta=0.5$) Hinged-Hinged $f=0.1, s=100$ $n=1.5, \alpha=0.3$	1	40.14	40.63	1.22
	2	72.81	73.49	0.93
	3	95.60	95.21	0.41
	4	177.6	176.9	0.39
Sinusoidal($\beta=0.5$) Clamped-Clamped $f=0.3, s=120$ $n=0.6, \alpha=0.2$	1	23.90	23.71	0.79
	2	56.62	56.00	1.10
	3	102.7	101.9	0.78
	4	150.1	149.2	0.60

* Deviation(%) = |SAP90 - this study| × 100 / SAP90

여 아치좌단($\xi=0$)의 경계조건을 이용하여 수치적분을 시행하고, 앞서 가정한 C_i 값이 자유진동의 고유치인지는 아치정점($\xi=0.5$)에서의 수치적분 결과가 식 (32.1)~(32.3) 및 식 (33.1)~(33.3)의 경계조건을 만족하는지 여부로서 판단하며 이 과정에서 행렬값탐사법을 이용한다⁽¹³⁾.

Table 1은 본 연구결과를 검증하기 위해 구조해석

용 범용프로그램인 SAP90의 결과와 비교한 것이다. 표에서 알 수 있듯이 두 해석결과는 아주 우수하게 접근하고 있어 본 연구결과의 타당성을 입증할 수 있다.

4. 수치해석 예 및 고찰

Table 2는 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향

Table 2 Effect of rotatory inertia on frequency parameter C_i

Geometry of arch	i	$R=0(A)$	$R=1(B)$	Effect(%)*
Circular Hinged-Hinged $f=0.3, s=100$ $n=1.2, \alpha=0.3$	1	20.46	20.44	-0.10
	2	55.17	55.03	-0.25
	3	105.2	104.6	-0.57
	4	149.5	148.9	-0.40
Circular Clamped-Clamped $f=0.3, s=120$ $n=0.8, \alpha=0.3$	1	31.92	31.90	-0.06
	2	61.85	61.77	-0.13
	3	113.2	112.9	-0.27
	4	162.1	161.6	-0.31
Sinusoidal($\beta=0.5$) Hinged-Hinged $f=0.1, s=100$ $n=2, \alpha=0.3$	1	42.07	41.98	-0.21
	2	77.28	77.26	-0.03
	3	106.2	105.3	-0.85
	4	195.5	193.1	-1.23
Sinusoidal($\beta=0.5$) Clamped-Clamped $f=0.4, s=120$ $n=0.8, \alpha=0.3$	1	25.82	25.81	-0.04
	2	60.36	60.28	-0.13
	3	99.86	99.62	-0.24
	4	152.0	151.4	-0.39

* Effect(%) = $(B - A) \times 100 / B$

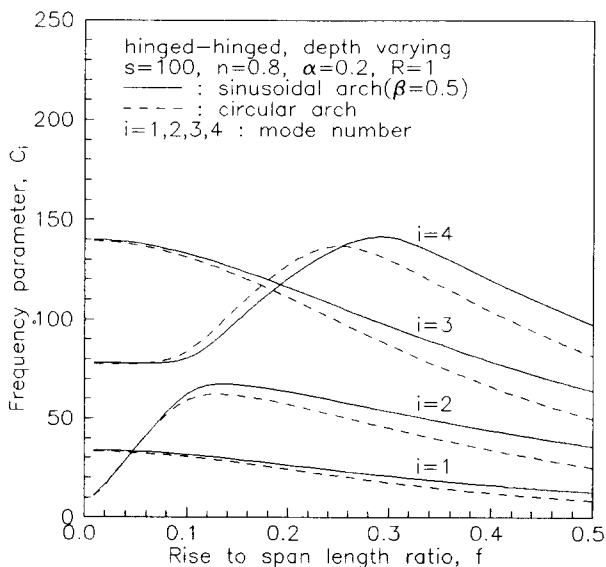


Fig. 4 Variation of frequency parameter C_i with rise to span length ratio f (hinged-hinged)

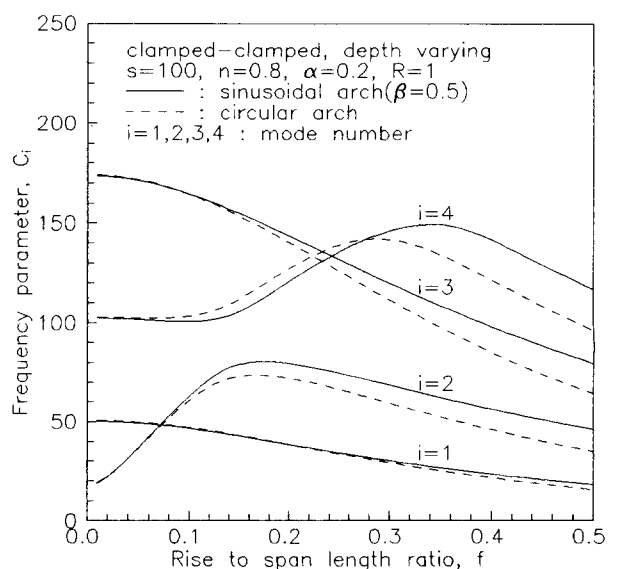


Fig. 5 Variation of frequency parameter C_i with rise to span length ratio f (clamped-clamped)

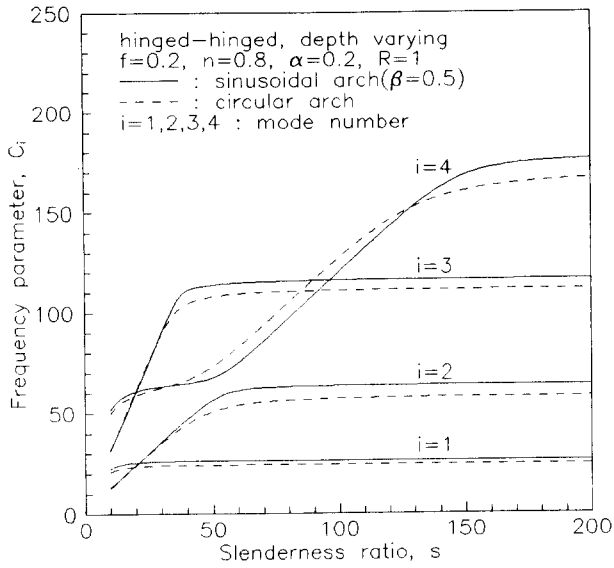


Fig. 6 Variation of frequency parameter C_i with slenderness ratio s (hinged-hinged)

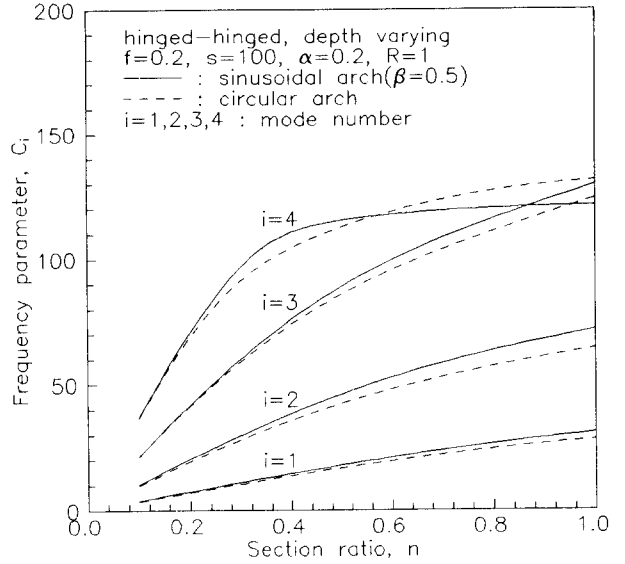


Fig. 8 Variation of frequency parameter C_i with section ratio n (hinged-hinged)

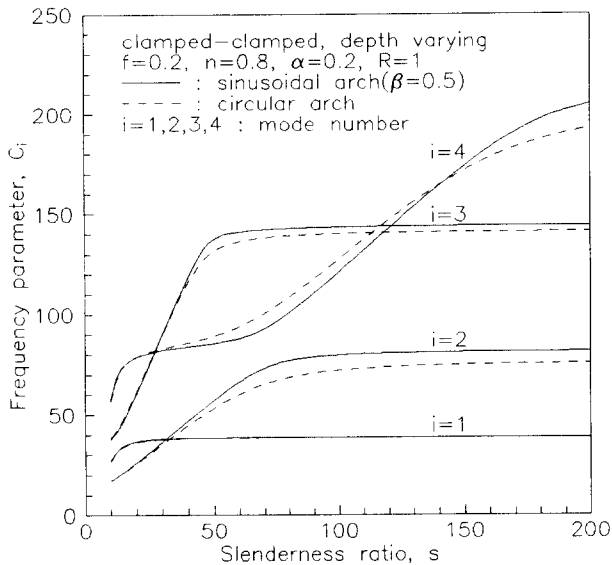


Fig. 7 Variation of frequency parameter C_i with slenderness ratio s (clamped-clamped)

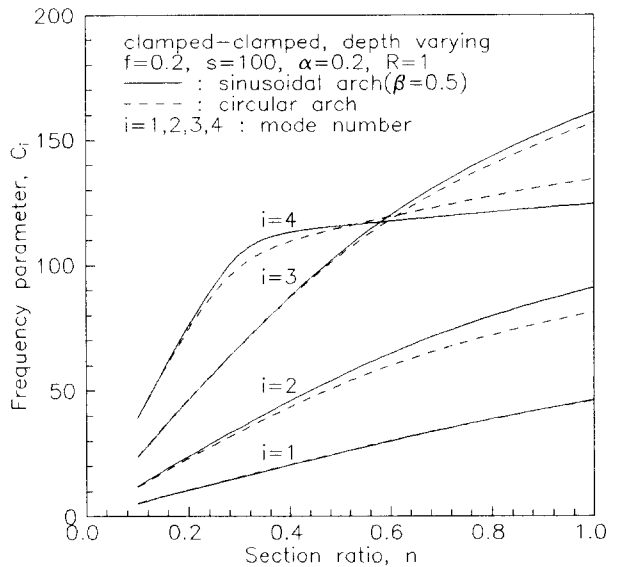


Fig. 9 Variation of frequency parameter C_i with section ratio n (clamped-clamped)

을 분석하기 위하여 회전관성을 고려한 경우($R=1$)와 무시한 경우($R=0$)에 대한 해석결과를 비교한 것이다. 이 표에서 회전관성은 고유진동수를 감소시키는 요인이지만 그 감소율은 약 1% 내외로 매우 미소함을 알 수 있다.

Fig. 4, 5는 $s=100$, $n=0.8$, $\alpha=0.2$ 이고 단순지지-단순지지, 고정-고정의 단부조건을 갖는 원호아치

와 정현아치($\beta=0.5$)의 무차원 고유진동수 C_i 와 아치높이 지간길이비 f 의 관계를 나타낸 것으로 일반적으로 높은 아치는 낮은 아치에 비해 고유진동수가 작음을 알 수 있다. 그러나 일정구간에서는 아치높이가 증가하면 고유진동수가 증가하는 경우가 있는데 이는 아치높이가 어느 정도 증가할 때까지는 진동에 대한 강성이 커져서 고유진동수가 증가하는 것

으로 사료된다. 또한 그림에서 두개의 곡선이 교차하는 지점을 발견할 수 있는데 이는 동일한 고유진동수에 대하여 대칭진동과 역대칭진동을 갖는 2개의 모드가 존재함을 의미한다. Fig. 4, 5에서 동일한 아치높이 지간길이비 f 를 갖는 경우 대체로 정현아치가 원호아치에 비해 고유진동수가 크고, f 가 증가할수록 그 차이는 더 커짐을 알 수 있다.

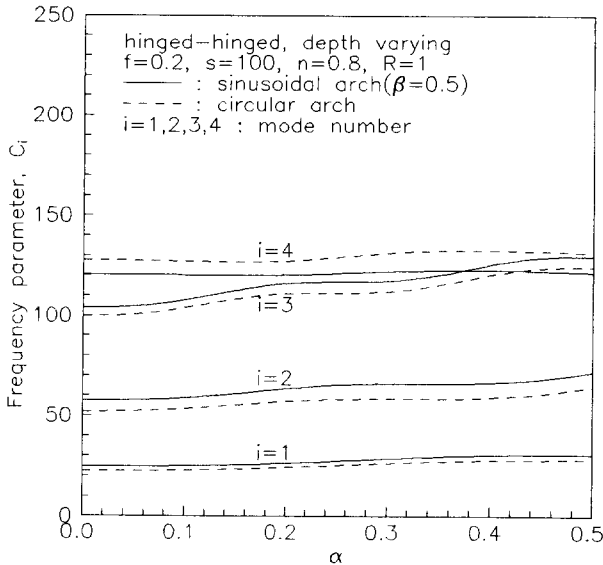


Fig. 10 Variation of frequency parameter C_i with the ratio of discontinuous section α (hinged-hinged)

Fig. 6, 7은 $f=0.2$, $n=0.8$, $\alpha=0.2$ 이고 단순지지-단순지지, 고정-고정의 경계조건을 갖는 원호아치와 정현아치($\beta=0.5$)에 대하여 무차원 고유진동수 C_i 와 세장비 s 의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 세장비가 증가할수록 무차원 고유진동수는 증가하는 것을 알 수 있다. 그러나 각 모드별 고유진동수는 일정한 값으로 수렴해가며 특히 최저차 고유진동수는 그 증가율이 매우 미소함을 알 수 있다. 또한 Fig. 6, 7에서 동일한 세장비를 갖는 경우 일반적으로 정현아치가 원호아치에 비해 고유진동수가 더 크지만 세장비가 증가하여도 그 차이는 거의 일정함을 알 수 있다.

Fig. 8, 9는 $f=0.2$, $s=100$, $\alpha=0.2$ 인 원호아치와 정현아치($\beta=0.5$)에 대한 무차원 고유진동수 C_i 와 단면비 n 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 단면비 n 이 증가할수록 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있으며, 다른 변수의 변화에 따른 고유진동수의 변화에 비해 그 변화율이 상당히 큼을 알 수 있다. Fig. 8, 9에서 대체로 정현아치가 원호아치에 비해 고유진동수가 더 큼을 알 수 있으며, 특히 제1, 2모드는 전구간에 걸쳐 정현아치의 고유

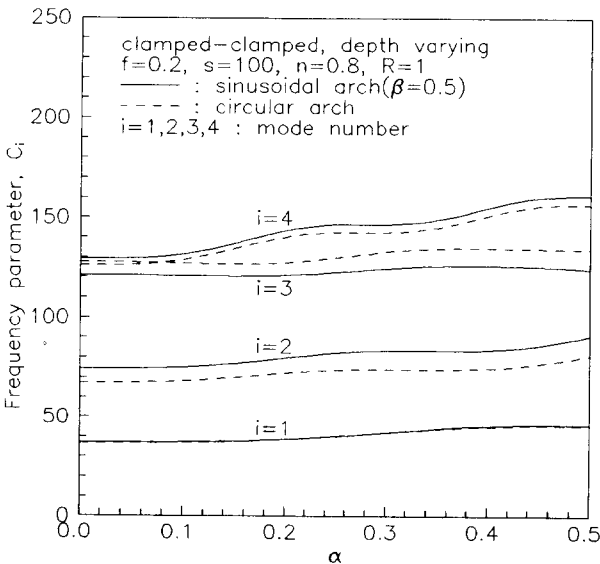


Fig. 11 Variation of frequency parameter C_i with the ratio of discontinuous section α (clamped-clamped)

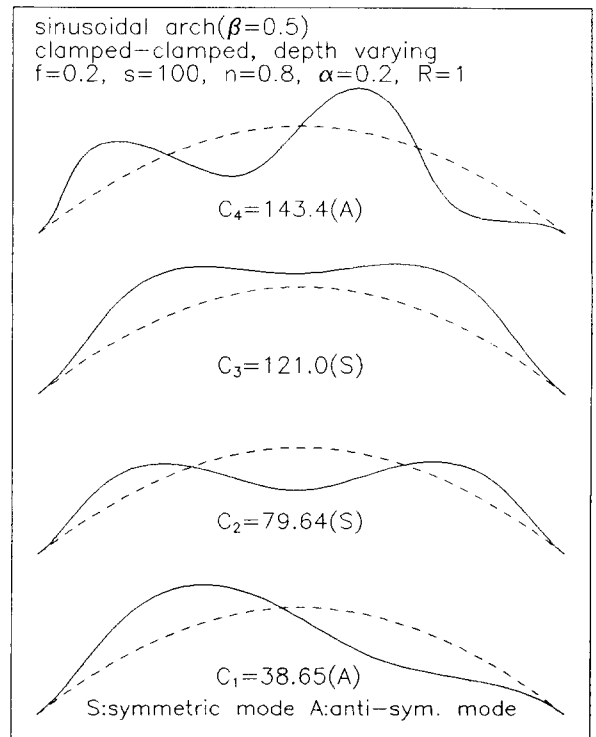


Fig. 12 Example of mode shapes

진동수가 더 크고 단면비 n 이 1에 접근할수록 두 아치간의 고유진동수 차이는 더 커짐을 알 수 있다.

Fig. 10, 11은 $f=0.2$, $s=100$, $n=0.8$ 인 경우에 대한 무차원 고유진동수 C_i 와 불연속 구간비 α 의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 불연속 구간비 α 가 증가할수록 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있다.

참고로 $f=0.2$, $s=100$, $n=0.8$, $\alpha=0.2$ 인 양단 고정 정현아치($\beta=0.5$)의 진동형을 Fig. 12에 나타내었다.

5. 결 론

본 연구에서는 불연속 변화단면을 갖는 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 해석대상 아치구조로서 단순지지-단순지지 및 고정-고정의 경계조건을 갖는 원호아치와 정현아치를 택하여 수치해석함으로써 불연속 변화단면 아치의 자유진동 특성을 규명하기 위한 연구를 수행하였다.

수치해석 결과로 회전관성이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였으며, 원호아치 및 정현아치에 대한 무차원 고유진동수와 아치높이 지간길이비, 세장비, 단면비, 및 불연속 구간비 사이의 관계를 고찰하였다.

본 연구결과는 토목, 건축, 기계, 선박, 항공 등 각종 구조공학분야에서 불연속 변화단면을 갖는 아치구조의 동적해석시에 필요한 고유진동수와 진동형을 산출하는 데 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

(1) E. Volterra and J. D. Morell, 1961, "Lowest Natural Frequencies of Elastic Hinged Arcs", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 33, No. 12, pp. 1787~1790.
 (2) J. A. Wolf, Jr., 1971, "Natural Frequencies of Circular Arches", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST9, pp. 2337~2350.

(3) B. K. Lee and J. F. Wilson, 1990, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature", Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp. 75~89.
 (4) L. H. Royster, 1966, "Effect of Linear Taper on the Lowest Natural Extensional Frequency of Elastic Arcs", Journal of the Applied Mechanics, ASME, Vol. 33, pp. 2111~2112.
 (5) T. M. Wang, 1972, "Lowest Natural Frequency of Clamped Parabolic Arcs", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, No. ST1, pp. 407~411.
 (6) T. Sakiyama, 1985, "Free Vibrations of Arches with Variable Cross Section and Non-Symmetrical Axis", Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, pp. 448~452.
 (7) M. J. Maurizi, R. E. Rossi and P. M. Belles, 1991, "Lowest Natural Frequency of Clamped Circular Arcs of Linearly Tapered Width", Journal of Sound and Vibration, Vol. 144, No. 2, pp. 357~361.
 (8) 이병구, 오상진, 모정만, 김현상, 1992, "변화곡률 변화단면 아치의 자유진동 해석", 한국강구조학회논문집, 제4권 제4호, pp. 107~117.
 (9) P. A. A. Laura and P. L. Verniere de Irassar, 1988, "A Note on Vibrations of a Circumferential Arch with Thickness Varying in a Discontinuous Fashion", Journal of Sound and Vibration, Vol. 120, No. 1, pp. 95~105.
 (10) S. F. Borg and J. J. Gennaro, 1965, Advanced Structural Analysis, Van Nostrand Company, pp. 21~33.
 (11) S. P. Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver, Jr., 1974, Vibration Problems in Engineering, John Wiley & Sons, p. 254.
 (12) A. W. Al-Khafaji and J. R. Tooley, 1986, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc., pp. 419~424.
 (13) J. W. Leonard, 1988, Tension Structures, McGraw-Hill, pp. 300~304.