韓國經營科學會誌
第18卷 第2號
1993年 8月

불완전 정보하의 의사결정에서의 다중요인 추계적-통계적 우세법칙[†]

이대주*

Multiattribute Stochastic-Statistical Dominance in Decision Making with Incomplete Information

Dae Joo Lee*

Abstract

In multiattribute decision making a decision maker(DM) can choose the best alternative if his/her multiattribute utility function and the joint probability distribution of outcomes are exactly known. This paper develops multiattribute stochastic-statistical dominance rules which can be applied to the situation when neither of them is known exactly, that is, when the DM cannot calculate the expected utility for each alternative. First, the notion of relative risk aversion is used to describe DM's attitude toward risk. Second, 1 iattribute and multiattribute stochastic-statistical dominance rules are developed to screen out dominated alternatives so that he/she can choose the best one among the remaining nondominated alternatives.

1. 서 론

1.1 연구의 배경 및 목적

국가적인 정책의 결정이나 기업의 프로젝트 선정, 투자전략 또는 자원배분 등의 현실적인 의사결정문제에서 의사결정자가 합리적으로 가장 바람직한 대안을 선택하고, 그에 따른 결과로서 얻어지는 성과를 예측할 수 있는 방법론은 매우 중요하다. 이와 같은 문제들을 해결하기 위한 기존의 방법론들은 크게 두 가지로 대

† 이 연구는 1989년도 한국과학재단의 연구비지원에 의한 결과임(과제번호 : 893-0915-002-2).
* 계명대학교 산업공학과

별된다. 첫째는 확정적인 상황에서 최적의 대안을 선택하기 위한 부류로서 이에 속하는 것으로는 주로 경영과학(management science) 또는 운용과학(operations research) 분야에서 볼 수 있으며 기존의 모형에 주어진 상황을 끼워 맞추어서 최적해를 구한다. 둘째는 임의의 대안을 선택한 결과가 확정적이 아니고 확률적으로 나타나는 상황에서 최적의 (또는 가장 좋은) 대안을 선택하기 위한 부류이며 대부분의 확률적인 모형들이 이에 속한다.

의사결정분석에서 대안선택의 결과가 확률적으로 나타나는 경우에 의사결정에 필요한 정보가 불완전한 상황은 의사결정자의 위험에 대한 태도에 따른 효용함수에 대한 정보가 불완전한 상황과 [2,7,8,15,21] 의사결정에 필요한 대안선택의 결과를 나타내는 확률분포에 대한 정보가 불완전한 상황으로 나누어지며 [5,11,12] 이에 대한 연구들이 여러 학문분야에서 수행되어 왔다.

대부분의 현실적인 의사결정문제의 특징은 주어진 여러 대안들 가운데 임의의 대안을 선택하더라도 그 결과가 확정적으로 나타나는 경우는 별로 없을 뿐만 아니라 확률적인 상황에서도 위에서 언급된 어느 한 가지 정보가 불완전한 것보다는 두 가지 불완전성이 공존하는 경우가 대부분이다[14]. 또한 특정한 대안선택의 결과를 의사결정자가 어떻게 받아들이는가 하는 것은 의사결정자의 주관적인 선호도와 판단에 따라 다르다는 점이다. 따라서 주어진 복잡다기한 상황에서 비교적 짧은 시간 내에 상대적으로 적은 비용을 들여서 의사결정자의 주관적인 가치판단을 고려하여 그가 일관성 있는 결정을 내리도록 하는 것은 매우 중요한 일이다. 이를 위하여 의사결정자의 주관적인 판단을 계량화하기 위한 여러 가지 방법들이 제시되었으며[1,3,4,6], 의사결정자의 위험에 대한 태도에 따른 의사결정의 일관성에 관하여도 많은 연구가 이루어졌다[13,16,17].

그러나 확률적인 상황에서의 의사결정에 관한 기존의 연구들은 대부분 어느 한 가지 정보가 불완전한 상황에서 최적의 대안을 선택하기 위한 방법론에 국한되어 왔다. 특히 당면한 의사결정문제가 다중요인(multiple attributes)으로 모형화되는 경우 이에 관한 연구가 매우 미흡하다. 최근 Takeguchi and Akashi[20]는 의사결정자의 효용함수를 다변수 가치함수와의 연계 없이 다중요인들이 확률적으로 독립이라는 가정하에 불완전 정보하의 의사결정문제를 다루었고 Lee[14]는 의사결정자의 선호도를 나타내기 위한 상대적 위험의 척도를 이용하여 단일요인인 경우에 두 가지 불완전성이 공존하는 상황에서의 의사결정을 위한 추계적-통계적 우세법칙(stochastic-statistical dominance)을 개발하였다.

따라서 본 논문에서는 대안선택의 결과가 다중요인으로 모형화되는 경우에 의사결정자의 효용함수 및 결과를 나타내는 확률변수의 분포에 관한 정보가 불완전한 상황에서 Lee, Fraser, and Miller[16]가 개발한 다중요인 상대적 위험의 척도(measure of multiattribute relative risk aversion)를 이용하여 최적의 (또는 가장 좋은) 대안을 선택하기 위한 추계적-통계적 우세법칙을 개발하고자 한다.

1.2 연구의 내용 및 방법

본 논문에서는 의사결정자가 유한개의 대안으로부터 임의의 대안을 선택하였을 때 그 결과가 확률적으로 나타나는 의사결정의 문제를 대상으로 한다. 이때 유한개의 대안들이 이미

의사결정자에게 제시되었다고 가정한다. 또한 결과를 나타내는 결정변수(decision variable)가 다수의 요인(multiple attributes)으로 묘사되며 이를 기초로 하여 의사결정자의 가치함수, 효용함수 및 다변량 확률분포함수를 유도한다.

또한 의사결정자가 확정적인 결과에 대한 가치평가의 척도를 가지고 있으며 이를 계량화한 다변수 기수가치함수(multivariate cardinal value function)는 각 변수에 대하여 단조증가함수라고 가정한다. 의사결정자의 선호도(preference)는 가치함수를 근거로 한 효용함수의 형태로 표현되며 의사결정자의 효용함수(utility function)는 von Neuman－Morgenstern 효용함수로 가정한다. 의사결정자의 선호도는 시간에 따라 변화하지 않는다고 가정한다. 다시 말하면 주어진 상황을 동적시스템(dynamic system)의 관점에서 보는 것이 아니라 정직시스템(static system)의 관점에서 고찰하고자 한다.

앞에서 언급한 두 가지의 불완전한 정보는 효용함수의 완전한 형태(함수의 모든 매개변수의 값을 알고 있음.)은 모르나 개략적인 함수의 성질만을 알고 있다고 가정한다. 다변량 확률분포함수를 정확히는 파악할 수 없으나 각 대안의 분포함수간의 개략적인 관계를 알고 있다고 가정한다. 최적의 대안을 선택하는 기준으로는 기대효용의 원칙(expected utility principle)을 사용한다.

이상의 가정하에 본 논문에서는 다중요인 의사결정문제에서 의사결정자의 위험에 대한 태도를 Lee, Fraser, & Miller[16]가 개발한 다중요인 상대적 위험의 척도를 이용하여 계량화하고 의사결정자의 선호도를 나타내는 효용함수에 대한 불완전한 정보를 가지고 있으며 동시에 실현가능한 상태(states of nature)의 확률에 관한 불완전한 정보를 가지고 있는 상황에서 최적의 대안을 선정하기 위한 다중요인 추계적－통계적 우세법칙(multiattribute stochastic － statistical dominance)을 개발한다.

2. 추계적 우세법칙

의사결정자가 여러 개의 대안 가운데 가장 좋은 대안을 선택하고자 할 때 각 대안의 기대효용을 계산하고 그 가운데 기대효용을 최대로 하는 대안을 선택하게 된다[10,18,19]. 이렇게 하기 위해서는 의사결정자의 효용함수에 대한 완전한 정보가 있어야 하며 동시에 결과의 확률분포에 대한 정확한 정보를 알고 있어야 한다.

의사결정자의 효용함수에 대한 정확한 정보가 없다면 각 대안의 기대효용을 계산할 수 없으며 따라서 각 대안의 기대효용을 비교할 수 없게 된다. 그러나 효용함수에 관한 정확한 정보는 없다 할지라도 개략적인 함수의 특성에 관한 정보가 있으며 결과에 대한 확률분포함수를 알고 있는 경우에는 이를 이용하여 비우세한(dominated) 대안들을 제거하고 우세한(nondominated) 대안들의 숫자를 줄여 나갈 수 있다. 의사결정자는 효용함수에 대한 불완전한 정보가 주어진 상황에서 우세대안들 가운데 가장 바람직한 대안을 선택하게 된다.

구체적으로, 두개의 대안 X와 Y의 누적분포함수가 각각 F, G이고 의사결정자의 효용함수가 $u(x)$라고 하자. 대안 X와 Y의 기대효용 $E[u, X]$, $E[u, Y]$는

$$E[u, X] = \int u(x)dF(x),$$
$$E[u, Y] = \int u(x)dG(x) \tag{1}$$

이다. 만약 X의 기대효용이 Y의 기대효용보다 크거나 같다면 즉, E[u, X] ≥ E[u, Y], X는 Y에 선호된다. 통상적으로는 E[u, X], E[u, Y]를 각각 계산하여 이를 비교하나 경우에 따라서는 $u(x)$를 정확히 모르는 경우에도 이들을 비교할 수 있다. 이제 단일요인 추계적 우세법칙(stochastic dominance)을 정의하면 다음과 같다.

[정의 1] 두 개의 대안 X와 Y의 누적분포함수를 F, G라 하자. 모든 $u_v \in U_1$, $v \in V_1$에 대하여 E[u, X] ≥ E[u, Y]이 성립하면 단일요인 제1차 추계적 우세법칙, $X \geq_1 Y$, 에 의하여 대안 X는 Y에 비하여 선호된다.

$$U_1 = \{u_v \mid \frac{du_v(v)}{dv} = u_v' \geq 0,\ x \in X\} \tag{2}$$

$$V_1 = \{v \mid \frac{dv(x)}{dx} = v'(x) \geq 0,\ x \in X,$$

$$u(x) = u_v(v(x))\}$$

[정의 2] 두 개의 대안 X와 Y의 누적분포함수를 F, G라 하자. 모든 $u_v \in U_2$, $v \in V_{12}$에 대하여 E[u, X] ≥ E[u, Y]이 성립하면 단일요인 제2차 추계적 우세법칙, $X \geq_2 Y$, 에 의하여 대안 X는 Y에 비하여 선호된다.

$$U_2 = \{u_v \mid u_v \in U_1,\ \frac{du_v^2(v)}{dv^2} = u_v'' \leq 0,\ x \in X\} \tag{3}$$

$$V_{12} = \{v \mid v \in V_1,\ \frac{d^2v(x)}{dx^2} = v''(x) \leq 0,\ x \in X\}$$

이상의 정의들로부터 다음의 정리들을 얻는다.

[정리 1] 의사결정자의 효용함수가 $u(v(\cdot))$이고 $u_v \in U_1$, $v \in V_1$일 때 모든 x에 대하여

$G(x) \geq F(x)$ 가 성립하면 $X \geq_1 Y$ 이다.

[정리 2] 의사결정자의 효용함수가 $u(v(\cdot))$이고 $u_v \in U_2$, $v \in V_{12}$ 일 때 모든 x에 대하여 $G^1 \geq F^1$ 가 성립하면 $X \geq_2 Y$ 이다. 단, 여기서 $G^1 = \int_{-\infty}^{x} G(t)dt$.

따라서 만약 $u'(x) \geq 0$ 이고 $G(\cdot) \geq F(\cdot)$ 이면 E[u, X] ≥ E[u, Y]가 성립한다. 다시 말하면 효용함수가 비감소함수(nondecreasing function)이고 Y의 누적분포함수 G 가 X의 누적분포함수 F 보다 항상 크거나 같다면 X는 Y에 선호된다. 이것을 제1차 추계적 우세법칙(1st-degree stochastic dominance)이라 한다[2,7,8,9]. 또한 $u''(x) \leq 0$ 이고 모든 x에 대하여 $G^1 \geq F^1$ 이면 E[u, X] ≥ E[u, Y] 이 성립한다. 즉, 효용함수가 위로 볼록이고 Y의 누적분포함수의 적분치가 X의 누적분포함수의 적분치보다 항상 크거나 같다면 대안 X는 Y에 선호되며 이를 제2차 추계적 우세법칙이라 한다[7,8].

의사결정문제를 다중요인으로 모형화한 경우에는 의사결정자의 다중요인 효용함수는 $u(x) = u_v(v(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 이 되며 대안 X의 기대효용은

$$E[u, X] = \int \cdots \int u_v(v(x_1, x_2, \cdots, x_n))dF(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \tag{4}$$

이다. 이로부터 다중요인 추계적 우세법칙은 다음과 같이 요약된다[15].

[정의 3] 두 개의 대안 X와 Y의 누적분포함수를 F, G라 하자. 모든 $u_v \in U_2$, $u \in V_2$에 대하여 E[u, X] ≥ E[u, Y] 이 성립하면 다중요인 추계적 우세법칙, $X \geq_2 Y$, 에 의하여 대안 X는 Y에 비하여 선호된다.

$$V_2 = \{v \mid \frac{\partial v}{\partial x_j} \geq 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x_h \partial x_j} = v_{hj} \leq 0, \ \underline{x} \in X^n\} \quad (5)$$

[정리 3] 의사결정자의 효용함수가 $u_v(v(\underline{x}))$이고 $u_v \in U_2$, $v \in V_2$ 일 때 모든 $\underline{x}$에 대하여 $G_1 \geq F_1$, $G_{j|.} \geq F_{j|.}$, $\frac{\partial F_{h|.}}{\partial x_j} \leq 0$ $(h > j$, $j, h = 1, 2, \cdots, n)$ 가 성립하면 $X \geq_2 Y$ 이다. 여기서 F_1 및 G_1은 대안 X와 Y의 주변누적분포함수이며 $G_{j|.}$ 및 $F_{j|.}$는 대안 X와 Y의 조건부누적분포함수이다.

3. 통계적 우세법칙

통계적 우세법칙(statistical dominance)은 유한개의 선택가능한 대안들의 집합이 주어졌을 때 주어진 정보를 이용하여 이들을 선호도에 따라 우선순위를 결정하여 비우세한 대안들을 제거하고 가장 좋은 대안을 선택하는 것이다. 여기서는 상호배반적인(mutually exclusive and exhaustive) 유한개 (K)의 실현가능한 상태(states of nature)가 존재한다고 가정하고, 대안 (i)과 상태(k)가 주어졌을 때 의사결정자의 효용함수의 정확한 값 u_{ik}는 알고 있으나 각 상태의 실현확률 자체는 정확히 알 수 없다고 가정한다. 의사결정자는 다만 각 상태에 대하여 확률값의 상대적인 대소관계에 대한 정보만을 가지고 있으며 이를 기호로 나타내면 다음과 같다.

$$P_k - P_{k+1} \geq 0, \ \forall k = 1, 2, \cdots, K-1 \quad (6)$$

여기서 P_k는 상태 k가 실제 상태로서 실현될 확률을 나타내며 K는 모든 실현가능한 상태의 수이다.

이제 대안 i가 주어지고 실제상태가 k일 때 의사결정자의 효용함수 u_{ik} 를 이용하면 두 개의 대안 X와 Y의 기대효용은

$$E[u, X] = \sum_{k=1}^{K} P_k \cdot u_{Xk}, \quad E[u, Y] = \sum_{k=1}^{K} P_k \cdot u_{Yk} \quad (7)$$

이 된다. 만약 $E[u, X] \geq E[u, Y]$ 이면 대안 X가 대안 Y에 비하여 선호된다. 이제 단일요인 통계적 우세법칙(statistical dominance)을 정의하면 다음과 같다[5].

[정의 4] 실제상태가 k일 때 두 개의 대안 X와 Y의 효용함수를 u_{Xk}, u_{Yk}라 하자. 모든 P_k $(k = 1, 2, \cdots, K)$에 대하여 $E[u, X] \geq E[u, Y]$이 성립하면 단일요인 통계적 우세법칙, $X \ {}^{H}_{L}\!\geq Y$, 에 의하여 대안 X는 Y에 비하여 선호된다.

[정리 4] 실제상태 k에서 의사결정자의 효용함수가 u_{Xk}, u_{Yk} 일 때 $k = 1, 2, \cdots, K$ 에 대하여 $P_k - P_{k+1} \geq 0$ $(P_{K+1}=0)$, $\sum_{s=1}^{k}(u_{Xs} - u_{Ys}) \geq 0$ 이 성립하면 $X \ {}^{H}_{L}\!\geq Y$ 이다.

증명 : 식(7)로부터 Abel의 합의 법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} E[u, X] - E[u, Y] &= \sum_{k=1}^{K} P_k \cdot u_{Xk} - \sum_{k=1}^{K} P_k \cdot u_{Yk} \\ &= \sum_{k=1}^{K} P_k \cdot (u_{Xk} - u_{Yk}) \quad (8) \\ &= \sum_{k=1}^{K} [\sum_{s=1}^{k}(u_{Xs} - u_{Ys})] \cdot (P_k - P_{k+1}), \ (P_{K+1}=0) \end{aligned}$$

과 같은 결과를 얻고 식(6)으로부터 각각의 $(P_k - P_{k+1})$이 모두 음이 아니므로 만약

$$\sum_{s=1}^{k}(u_{X_s} - u_{Y_s}) \geq 0, \ \forall k = 1, 2, \cdots, K \qquad (9)$$

이 만족되면 $E[u, X] \geq E[u, Y]$ 이 성립한다. 즉, 식(6), (9)가 성립하면 대안 X가 Y에 비하여 선호된다. ■

만약 의사결정자가 각 상태의 실현확률의 대소관계 뿐만 아니라 그들의 비율에 관한 정보를 가지고 있다면 상태확률의 순서를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_k \geq \frac{P_k}{P_{k+1}} \geq L_k, \ \forall k = 1, 2, \cdots, K-1 \quad (10)$$

여기서 H_k와 L_k는 각각 음이 아닌 상수이며 P_k와 P_{k+1}의 비율의 최대치 및 최소치이다. 이와 같은 전제하에 통계적 우세법칙은 다음과 같다[5, 20].

[정리 5] 실제상태 k에서 의사결정자의 효용함수가 u_{Xk}, u_{Yk} 이고 비율의 최대치 및 최소치 H_k, L_k, $k = 1, 2, \cdots, K-1$, 가 주어졌을 때 만약 $C_{H,L=1}[f(u : H, L, K) \geq 0]$ 이 성립하면 $X \overset{H}{\underset{L}{\geq}} Y$ 이다. 여기서

$$f(u : H, L, K) = \sum_{k=1}^{K}[\{\prod_{m=k}^{K-1}L_m / \prod_{m=1}^{k-1}H_m\}\{u_{Xk} - u_{Yk}\}],$$

$$\prod_{m=1}^{0}H_m = \prod_{m=K}^{K-1}L_m = 1. \qquad (11)$$

여기서 $f(u : H, L, K)$ 는 실제로는 K개의 변수 $(u_1, u_2, \cdots, u_K)$ 의 함수이며 $2(K-1)$개의 매개변수를 포함하고 있다. $C_{H,L=1}[f(u : H, L, K) \geq 0]$ 은 2^{K-1} 의 부등식을 나타내고 있다.

4. 다중요인 추계적-통계적 우세법칙

추계적 우세법칙이나 통계적 우세법칙은 의사결정자의 효용함수 또는 결과의 확률분포에 관한 불완전한 정보가 주어진 상황에서 가장 바람직한 대안을 선택하기 위한 방법들이다. 그러나 앞에서 언급한 바와 같이 실제로 대부분의 상황에서는 두 가지 모두 불완전한 정보를 가지게 되며 이와 같은 경우에는 추계적 우세법칙이나 통계적 우세법칙 만으로는 최적의 대안을 선택하기 어렵다. 따라서 불완전 정보하의 다중요인 의사결정문제에서 최적의 대안을 선택하기 위하여는 두 가지 불완전한 정보에 근거한 새로운 방법을 모색하여야 한다.

Lee[15]는 의사결정자가 확정적인 결과에 대하여 "보수적(conservative)"이고 상대적으로 위험을 기피하는 사람이라면 다중요인 추계적 우세법칙에 의하여 비우세인 대안들을 제거할 수 있음을 보였다. 또한 Lee[14]는 단일요인 상대적 위험의 척도를 이용하여 단일요인 추계적 - 통계적 우세법칙을 개발하였다. 본 논문에서는 이를 다중요인의 경우로 확대하여 그 적용가능한 분야를 확대하고자 한다.

추계적 - 통계적 우세법칙에서의 기본적인 가정은 다음과 같다. 의사결정자의 효용함수의 정확한 형태는 모르나 개략적인 함수의 특성에 관한 정보를 알고 있으며 각 상태의 실현확률에 관한 완전한 정보는 없으나 그들의 상대적인 대소관계나 실현확률비의 최대치 및 최소치에 관한 정보를 알고 있다고 가정한다. 또한 의사결정을 위하여 실제의 상태에 관한 정보가 주어지면 이로부터 결과에 대한 조건부확률분포를 결정할 수 있다고 가정한다.

이제 유한개(K)의 상호배반적인 실현가능한

상태가 존재하며 각 결과를 나타내는 변수를 단일요인(single attribute)으로 표현가능하다고 하자. 상태 k의 실현확률이 p_k이고 실제상태가 k일 때 임의의 두 개의 대안 X와 Y의 조건부 누적분포함수가 각각 F^k, G^k (k=1, 2, …, K) 이며 의사결정자의 효용함수가 $u_r(v(x))$라고 하자. 이 때 대안 X의 기대효용은

$$E[u, X] = \sum_{k=1}^{K} p_k \int u_r(v(x)) \cdot f^k(x)dx \qquad (12)$$

이다. 이로부터 단일요인 제1차 추계적-통계적 우세법칙은 다음과 같다[14].

[정의 5] 상태 k에서 두 개의 대안 X와 Y의 조건부 누적분포함수를 F^k, G^k라 하자. 모든 $u_r \in U_1$, $v \in V_1$에 대하여 $E[u, X] \geq E[u, Y]$이 성립하면 단일요인 제1차 추계적-통계적 우세법칙, $X \overset{H}{_L}\geq_1 Y$, 에 의하여 대안 X는 대안 Y에 비하여 선호된다.

[정리 6] 의사결정자의 효용함수가 $u_r(v(\cdot))$이고 식(10)을 만족하는 실현확률비의 최대치 및 최소치가 (H_1, H_2, …, H_{K-1}), (L_1, L_2, …, L_{K-1})로 주어졌을 때 만약 $u_r' \geq 0$, $v'(x) \geq 0$ 이고 모든 x에 대하여

$$C_{H,L=1}[f(D_1(x) : H, L, K) \geq 0] \qquad (13)$$

이 성립하면 $X \overset{H}{_L}\geq_1 Y$ 이다. 여기서

$$f(D_1(x) : H, L, K) = \sum_{k=1}^{K}[\{\prod_{h=k}^{K-1} L_h / \prod_{h=1}^{k-1} H_h\}\{D_1^k(x)\}],$$

$$\prod_{h=1}^{0} H_h = \prod_{h=K}^{K-1} L_h = 1,\ D_1^k(x) = G^k(x) - F^k(x).$$

다음으로 단일요인 제2차 추계적-통계적 우세법칙은 다음과 같다[14].

[정의 6] 상태 k에서 두 개의 대안 X와 Y의 조건부누적분포함수를 F^k, G^k 라 하자. 모든 $u_r \in U_2$, $v \in V_2$, 에 대하여 $E[u, X] \geq E[u, Y]$ 이 성립하면 단일요인 제2차 추계적-통계적 우세법칙, $X \overset{H}{_L}\geq_2 Y$, 에 의하여 대안 X는 대안 Y에 비하여 선호된다.

[정리 7] 의사결정자의 효용함수가 $u_r(v(\cdot))$이고 식(10)을 만족하는 실현확률비의 최대치 및 최소치가 (H_1, H_2, …, H_{K-1}), (L_1, L_2, …, L_{K-1})로 주어졌을 때 만약 $u_r'' \leq 0$, $v''(x) \leq 0$ 이고 모든 x에 대하여

$$C_{H,L=1}[f(D_2(x) : H, L, K) \geq 0] \qquad (14)$$

이 성립하면 $X \overset{H}{_L}\geq_2 Y$ 이다. 여기서

$$f(D_2(x) : H,L,K) = \sum_{k=1}^{K}[\{\sum_{h=k}^{K-1} L_h / \sum_{h=1}^{k-1} H_h\}\{D_2^k(x)\}],$$

$$\prod_{h=1}^{0} H_h = \prod_{h=K}^{K-1} L_h = 1,$$

$$D_2^k(x) = \int_{-\infty}^{x} [G^k(t) - F^k(t)]dt = \int_{-\infty}^{x} D_1^k(t)dt.$$

이제 다중요인 추계적 - 통계적 우세법칙을 개발하기 위하여 먼저 이중요인인 경우부터 살펴보기로 한다. 의사결정자의 효용함수는 $u(x_1, x_2) = u_r(v(x_1, x_2))$의 형태로 표현되며 대안 X와 Y의 기대효용은 각각

$$E[u, X] = \sum_{k=1}^{K} p_k \iint u(x_1, x_2) f^k(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \qquad (15)$$

$$E[u, Y] = \sum_{k=1}^{K} p_k \iint u(x_1, x_2) g^k(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

이 된다. 여기서 $f^k(x_1, x_2)$와 $g^k(x_1, x_2)$는 상태가 k로 주어졌을 때의 조건부확률밀도함수(p. d. f.)이며 $F^k(x_1, x_2)$와 $G^k(x_1, x_2)$는 조건부누적분포함수(c. d. f.)이고 다음과 같이 정의된다.

$$f^k(x_1, x_2) = f^k_{2|1}(x_2|x_1) \cdot f^k_1(x_1),$$
$$g^k(x_1, x_2) = g^k_{2|1}(x_2|x_1) \cdot g^k_1(x_1) \qquad (16)$$

또한 f^k_1, g^k_1 [F^k_1, G^k_1]는 주변확률밀도함수(marginal pdf)[주변누적분포함수(marginal cdf)]이며 $f^k_{2|1}$, $g^k_{2|1}$ [$F^k_{2|1}$, $G^k_{2|1}$]은 조건부확률밀도함수(conditional pdf) [조건부누적분포함수(conditional cdf)]이다. 이중요인 추계적-통계적 우세법칙은 다음과 같이 정의된다.

[정의 7] 실제상태가 k일 때 두 개의 대안 X와 Y의 조건부누적분포함수를 F^k, G^k 라 하자. 모든 $u_v \in U_2$, $v \in V_2$에 대하여 $E[u, X] \geq E[u, Y]$이 성립하면 이중요인 추계적-통계적 우세법칙, $X \overset{H}{_L}\geq_1 Y$, 에 의하여 대안 X는 대안 Y에 비하여 선호된다.

[정리 8] 의사결정자의 효용함수가 $u(x_1, x_2) = u_v(v(x_1, x_2))$이고 식(10)을 만족하는 실현확률비의 최대치 및 최소치가 $(H_1, H_2, \cdots, H_{K-1})$, $(L_1, L_2, \cdots, L_{K-1})$로 주어졌을 때 만약 $v(x) \in V_2$, $u_v(v) \in U_2$ 이고 모든 (x_1, x_2)에 대하여

$$C_{H,L-1}\ [f(D_{21}(x) : H, L, K) \geq 0] \qquad (17)$$
$$D^k_{2|1}(x_2|x_1) = G^k_{2|1}(x_2|x_1) - F^k_{2|1}(x_2|x_1) \geq 0$$
$$(k=1, 2, \cdots, K)$$

이 성립하면 $X \overset{H}{_L}\geq_1 Y$ 이다. 여기서

$$f(D_{21}(x) : H,L,K) = \sum_{k=1}^{K}[\{\sum_{h=k}^{K-1} L_h / \sum_{h=1}^{k-1} H_h\}\{D^k_{21}(x)\}],$$
$$D^k_1(x_1) = G^k_1(x_1) - F^k_1(x_1).$$

증명 :

$$E[u, X] = \sum_{k=1}^{K} p_k \cdot \iint u(x_1, x_2) f^k(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$
$$= \sum_{k=1}^{K} p_k \cdot \iint u_v(v(x_1, x_2)) f^k_{2|1}(x_2|x_1) f^k_1(x_1)\, dx_1 dx_2.$$
$$= \sum_{k=1}^{K} p_k \int \{[u_v \cdot F^k_{2|1}]^{+\infty}_{-\infty} - \int u'_v \cdot v_2 \cdot F^k_{2|1}(x_2|x_1) dx_2\} f^k_1 dx_1$$
$$= \sum_{k=1}^{K} p_k \int u_v(v(x_1, \infty)) \cdot f^k_1 dx_1 - \sum_{k=1}^{K} p_k \iint u'_v \cdot v_2 \cdot F^k_{2|1} \cdot f^k_1 dx_1 dx_2.$$

$$Df_2 = E[u, X] - E[u, Y]$$
$$= \sum_{k=1}^{K} p_k \int u_v(v(x_1, \infty)) \cdot (f^k_1 - g^k_1) dx_1$$
$$- \sum_{k=1}^{K} p_k \iint u'_v \cdot v_2 \cdot \{F^k_{2|1} \cdot f^k_1 - G^k_{2|1} \cdot g^k_1\} dx_1 dx_2$$
$$= \sum_{k=1}^{K} p_k \int u'_v \cdot v_1 \cdot (G^k_1 - F^k_1) dx_1$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} p_k \iint u'_v \cdot v_2 \cdot \{G^k_{2|1} \cdot g^k_1 - F^k_{2|1} \cdot f^k_1\} dx_1 dx_2$$
$$= \sum_{k=1}^{K} p_k \int u'_v \cdot v_1 \cdot D^k_{21} dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} p_k \iint u'_v \cdot v_2 \cdot \{G^k_{2|1} \cdot g^k_1 - F^k_{2|1} \cdot f^k_1\} dx_1 dx_2,$$

$Df_2 = A_2 + B_2$ 여기서

$$A_2 = \sum_{k=1}^{K} p_k \int u'_v \cdot v_1 \cdot D^k_{21} dx_1 = \int u'_v \cdot v_1 \cdot \sum_{k=1}^{K} p_k D^k_{21} dx_1,$$
$$B_2 = \sum_{k=1}^{K} p_k \iint u'_v \cdot v_2 \cdot \{G^k_{2|1} \cdot g^k_1 - F^k_{2|1} \cdot f^k_1\} dx_1 dx_2$$

이제 식(17)로부터

$D^k_{2|1}(x_2|x_1) = G^k_{2|1}(x_2|x_1) - F^k_{2|1}(x_2|x_1) \geq C$ 이고 $C \geq 0$ 이면

$$B_2 = \sum_{k=1}^{K} p_k \iint u'_v \cdot v_2 \cdot \{G^k_{2|1} \cdot g^k_1 - F^k_{2|1} \cdot f^k_1\} dx_1 dx_2$$

$$\geq C\sum_{k=1}^{K} p_k \iint u_r' \cdot v_2 \cdot (g_1^k - f_1^k)\,dx_1 dx_2 = B_2'.$$

$$B_2' = -C\sum_{k=1}^{K} p_k \iint \frac{\partial}{\partial x_1}(u_r' \cdot v_2)\cdot(G_1^k - F_1^k)\,dx_1 dx_2$$

$$= -C\sum_{k=1}^{K} p_k \iint \{u_r'' v_1 v_2 + u_r' v_{12}\} \cdot D_{21}^k\,dx_1 dx_2$$

$$= C\iint u_r' \{r_r(v) v_1 v_2 + (-v_{12})\} \cdot \sum_{k=1}^{K} p_k D_{21}^k\,dx_1 dx_2.$$

가정에 의하여 $v(\underline{x}) \in V_2$, $u_r(v) \in U_2$ 이고 식(17)로부터 $\sum_{k=1}^{K} p_k D_{21}^k \geq 0$ 이다. 또한 의사결정자가 상대적으로 위험을 기피하는 사람이라면 $r_r(v) \geq 0$ 이므로 A_2, B_2 는 모두 비음수이다. 따라서 $E[u, X] - E[u, Y] \geq 0$ 이 성립한다. ■

다음으로 의사결정문제가 다중요인으로 모형화되는 경우를 살펴보기로 하자. 의사결정자의 다중요인 효용함수는

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = u_r(v(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

으로 표현되며 대안 X의 기대효용은 식(4)와 같다. 또한 $f^k(x)$, $g^k(x)$[$F^k(x)$, $G^k(x)$]는 상태가 k로 주어졌을 때의 확률밀도함수[누적분포함수]이고 f_i^k, g_i^k[F_i^k, G_i^k]는 주변확률밀도함수[주변누적분포함수]이며 $f_{i\cdot}^k$, $g_{i\cdot}^k$[$F_{i\cdot}^k$, $G_{i\cdot}^k$]는 조건부확률밀도함수[조건부누적분포함수]이다. 이로부터 다중요인 추계적-통계적 우세법칙은 다음과 같다.

[정리 9] 효용함수가 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = u_r(v(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 이고 식(10)을 만족하는 실현확률비의 최대치 및 최소치가 H_k, L_k, $(k = 1, 2, \cdots, K-1)$ 로 주어졌을 때 만약 $u_r \in U_2$, $v \in V_2$ 이고 모든 x에 대하여

$$C_{H,L=1}[f(D_{n1}(x) : H,L,K) \geq 0] \quad (17)$$

$D_{n\cdot}^k(x_n | x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = G_{n\cdot}^k(x_n | \cdot) - F_{n\cdot}^k(x_n | \cdot) \geq 0$ $(k = 1, 2, \cdots, K)$이 성립하면 $X \geq_{L}^{H} Y$ 이다. 여기서

$$f(D_{n1}(x) : H,L,K) = \sum_{k=1}^{K} [\{\prod_{h=k}^{K-1} L_h / \prod_{h=1}^{k-1} H_h\}\{D_{n1}^k(x)\}],$$

$$D_{n1}^k(x_1) = G_{n-1}^k(\cdot) - F_{n-1}^k(\cdot).$$

증명 : 다중요인의 경우에 대한 증명은 단일요인 및 이중요인에 대한 [정리 6]과 [정리 8]로부터 수학적 귀납법을 이용하면 간단히 증명할 수 있으므로 생략한다. ■

5. 결 론

본 논문에서는 대안선택의 결과를 나타내는 변수가 다중요인으로 모형화되는 의사결정문제에서 의사결정자의 효용함수에 대한 정보가 불완전하고 다변량확률분포함수에 대한 정보가 불완전할 때 의사결정자가 가장 바람직한 대안을 선택하기 위한 다중요인 추계적 - 통계적 우세법칙을 개발하였다. 의사결정기준으로는 기대효용의 원칙을 사용하였으며 의사결정자의 효용함수는 가치함수에 근거한 효용함수로 정의하여 상대적 위험의 척도의 개념을 도입하였다.

의사결정자의 효용함수에 대한 정보가 불완전하고 다변량확률분포함수에 대한 정보가 불완전하나 효용함수 및 가치함수에 대한 개략적인 함수의 특성에 관한 정보를 알고 있으며 유한개의 상호배반적이고 실현가능한 상태들이 존재하고 이들의 실현확률의 상대적인 대소관계 또는 실현확률비의 최대치 및 최소치에 관

한 정보를 알고 있다고 가정하였다. 이러한 가정하에 의사결정자가 확정적인 결과에 대하여 보수적이고 상대적으로 위험을 기피하는 사람이라면 다중요인 상대적 위험의 척도를 이용하여 주어진 유한개의 대안들 가운데 비우세인 대안들을 제거하여 실행가능한 대안들의 숫자를 축소함으로써 궁극적으로는 의사결정자가 최적의 대안을 선택할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] Arrow, K. J., "The theory of risk aversion," in Arrow, K. J. (ed.), *Essays in the Theory of Risk-Bearing*. Markham, Chicago, pp. 90-120, 1971.

[2] Borch, K., "Utility and stochastic dominance," in Allais, M. and O. Hagen(eds.), *Expected Utility and the Allais Paradox*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, pp. 193-201, 1979.

[3] Duncan, G. T., "A matrix measure of multivariate local risk aversion," *Econometrica*. Vol. 45(1977), pp. 895-903.

[4] Dyer, J. S. and R. K. Sarin, "Relative risk aversion," *Management Science*. Vol. 28, No. 8(1982), pp. 875-886.

[5] Fishburn, P. C., "Analysis of decisions with incomplete knowledge of probabilities," *Management Science*. Vol. 13(1965), pp. 217-237.

[6] Fishburn, P. C., *Decision and Value Theory*. Wiley, New York, 1964.

[7] Fishburn, P. C. and R. G. Vickson, "Theoretical foundations of stochastic dominance," in Whitmore, G. A. and M. C. Findlay(eds.), *Stochastic Dominance: An Approach to Decision Making under Risk*. Heath, Lexington, 1978.

[8] Hadar, J. and W. R. Russell, "Rules for ordering uncertain prospects," *American Economic Review*. Vol. 49(1969), pp. 25-34.

[9] Huang, C. C., D. Kira, and I. Vertinsky, "Stochastic dominance rules for multi-attribute utility functions," *Review of Economic Studies*. Vol. 45 (1978), pp. 611-615.

[10] Keeney, R. L. and H. Raiffa, *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley, New York, 1976.

[11] Kmietowicz, Z. W. and A. D. Pearman, "Decision theory and weak statistical dominance," *Journal of Operational Research Society*. Vol. 30, No. 11(1979), pp. 1019-1022.

[12] Kmietowicz, Z. W. and A. D. Pearman, "Decision theory, linear partial information and statistical dominance," *Omega*. Vol. 12(1984), pp. 391-399.

[13] Krzysztofowicz, R., "Strength of preference and risk attitude in utility measurement," *Organizational Behavior and Human Performance*. Vol. 31 (1983), pp. 88-113.

[14] Lee, D. J., "Relative risk aversion and stochastic-statistical dominance," *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, Vol. 15, No. 2 (1989), pp. 33-44.

[15] Lee, D. J., "Stochastic dominance rules in multiattribute decision making under uncertainty," in Ahn, B. H. (ed.), *Proceedings of the 1st Conference of the APORS*, Elsevier, Amsterdam, Nethelands, pp. 171-184, 1990.

[16] Lee, D. J., J. M. Fraser, and R. A. Miller, "Multivariate cardinal value function and multiattribute relative risk aversion in human decision making," *Proceedimgs of the 1988 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics : Vol. I*, Pergamon Press, New York, pp. 465-468, 1988.

[17] Pratt, J. W., "Risk aversion in the small and in the large," *Econometrica*, Vol. 32, No. 1-2(1964), pp. 122-136.

[18] Pratt, J. W., H. Raiffa, and R. Schlaifer, "The foundations of decision under uncertainty : An elementary exposition," *Journal of American Statistical Association*, Vol(1964), pp. 35-37.

[19] Schoemaker, P. J. H., "The expected utility model : Its variants, purposes, evidence, and limitations," *Journal of Economic Literature*, Vol. 20(1982), pp. 529-563.

[20] Takeguchi, T. and H. Akashi, "Analysis of decisions under risk with incomplete information," *IEEE Transactions of Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-14, No. 4 (1984), pp. 618-625.

[21] Whitmore, G. A., "Third-degree stochastic dominance," *American Economic Review*, Vol. 60(1970), pp. 457-459.