

## 1.48 $\mu\text{m}$ 레이저 다이오드로 여기된 $\text{Er}^{3+}$ 첨가 광섬유 광증폭기에 대한 이론적 분석

김희종 · 이상배 · 조재철 · 최상삼  
한국과학기술연구원 응용물리연구실

김 영 덕  
서강대학교 물리학과

(1992년 8월 3일 받음)

3준위 레이저 rate equation 및 overlap integral로부터 파장  $1.48 \mu\text{m}$ 에서 여기된  $\text{Er}^{3+}$  첨가 광섬유 광증폭기를 위한 광섬유 매개 변수의 최적 조건을 계산하였다. 이 계산으로부터  $\text{Er}^{3+}$  첨가 광섬유 광증폭기의 소신호 이득(small signal gain) 특성을 개구수 (N.A.), V값, 광섬유 길이, 차단 파장(cutoff wavelength) 등의 함수로 알아 보았으며 또한, 최대 소신호 이득을 갖기 위한 광섬유 매개 변수를 결정하였다.

### I. 서 론

### II. 이 론

EDFA( $\text{Er}^{3+}$  Doped Fiber Amplifier;  $\text{Er}^{3+}$  첨가 광섬유 광증폭기)는 차세대 광통신용 광증폭기로써 각광을 받고 있다. 그 이유로, 반도체 광증폭기는 광섬유와 연결시 많은 접속 손실을 갖는 반면, EDFA는 동일한 광섬유로 연결되므로 접속 손실이 적고 또한, 적은 잡음, 높은 이득 특성, 넓은 대역폭(bandwidth), 빛살의 편극에 무관한 이득등의 여러가지 장점이 있기 때문이다. 이러한 EDFA를 광통신 시스템에 응용하면, 증폭된 신호파사이의 상호 변조의 방지, 통신 거리의 증가, 그리고 통신 시스템의 가격을 떨어뜨릴 수 있으며, 또한 통신 라인의 신뢰도를 높일 수 있고, 초고속 통신(10 Gb/s)을 가능하게 할 수 있다.<sup>[1]</sup>

EDFA의 이론적 모델은 1985년 M. J. F. Digonnet와 C. J. Gaeta<sup>[2]</sup>가 최초로 제시한 이후, 많은 사람들이 이 이론의 연구에 참여하고 있으며, 본 논문에서는 1987년 E. Desurvire 등<sup>[3]</sup>이 제시한 이론적 모델을 바탕으로  $1.48 \mu\text{m}$ 에서 여기된 EDFA를 구성하는  $\text{Er}^{3+}$  첨가 광섬유 규격의 최적화 및 이에 따른 EDFA의 소신호 이득과 출력 Power의 특성을 이론적으로 계산하였다.

$\text{Er}^{3+}$  첨가 실리카 광섬유는 여기 광원의 파장에 따라 2준위, 3준위 레이저 매질로 고려될 수 있다. 본 이론에서는 일반적인 3준위 rate equation으로부터 출발하여 전개하였고, 여기광원이  $1.48 \mu\text{m}$ 와 같은 2준위 시스템의 경우 근사를 통해 그 해를 구하였다.<sup>[6]</sup> 입사 빛살을 단색광이라 가정하고, 여기 빛살의 주파수가  $\nu_p$ 인 정상상태(steady-state) 빛살 세기를  $I_p$ , 신호 빛살의 주파수가  $\nu_s$ 인 정상상태 빛살 세기를  $I_s$ 라 하고, 빛살의 진행 방향을 광섬유 좌표  $z$  방향으로 정의하여, 준 고전(semiclassic) 레이저 이론<sup>[4,5]</sup>에 적용하면, 3준위 rate equation으로부터  $z$  방향으로 진행되는  $I_p$ 와  $I_s$ 의 관계식 (1)식과 (2)식을 구할 수 있다.<sup>[3]</sup>

$$\frac{dI_p}{dz} = -\frac{W+A_{21}}{R\varepsilon+2W+A_{21}} \rho \sigma_p I_p \quad (1)$$

$$\frac{dI_s}{dz} = \frac{R\varepsilon-A_{21}}{R\varepsilon+2W+A_{21}} \rho \sigma_s I_s \quad (2)$$

(1)식과 (2)식은 여기 빛살의 파장이  $1.48 \mu\text{m}$ 일 때 여기 빛살 방출 단면적(pump emission cross section)은 여기 빛살 흡수 단면적(pump absorption cross section) 보다

매우 작으므로 무시하고,  $W_{12}=W_{21}=W$ 라 가정하여 구해진 식이다.<sup>[1,5]</sup>

윗 식에서  $R (= \frac{I_p \sigma_p}{h \nu_p})$ 은 여기율(pumping rate),  $W (= \frac{I_s \sigma_s}{h \nu_s})$ 은 유도 방출률(stimulated emission rate),  $A_{ij} (= 1/\tau_{ij})$ 은 자연방출률(spontaneous-emission rates),  $\tau_j$ 는 life times,  $\epsilon (= \frac{\tau_{31}}{\tau_{32} + \tau_{31}})$ 는 branching ratio,  $\rho$ 는  $Er^{3+}$  이온 밀도,  $\sigma_p$ 는 여기 빛살 흡수 단면적(pump absorption cross section),  $\sigma_s$ 는 신호 빛살 방출 단면적(signal emission cross section),  $h$ 는 Planck 상수이다.

(1)식과 (2)식에서 여기 문턱 빛살 세기(pump intensity threshold)를  $I_{th} (= \frac{h \nu_p}{\epsilon \sigma_p \tau_{21}})$ 로 도입하고,  $\gamma (= \frac{\sigma_s \nu_p}{\sigma_p \nu_s})$ 를 여기 빛살과 신호 빛살 사이의 주파수 비율이라 정의하면,  $\frac{W}{A_{21}} = \frac{\gamma I_s}{\epsilon I_{th}}$  가 되고,  $\frac{R\epsilon}{A_{21}} = \frac{I_p}{I_{th}}$  가 된다. (1)식의 양변을  $I_{th}$ 로 나누고, (2)식의 양변에  $\frac{\gamma}{\epsilon I_{th}}$  을 곱하고,  $P_{th} = A I_{th}$ ,  $\bar{P}_p = \frac{A I_p}{P_{th}}$ ,  $\bar{P}_s = \frac{\gamma A I_s}{\epsilon P_{th}}$ ,  $A = \frac{\pi a^2}{\Gamma_p}$  라 하면, (1)식과 (2)식은 아래와 같이 쓸 수 있다.<sup>[1,6,7]</sup>

$$\frac{d\bar{P}_p}{dz} = -\frac{\bar{P}_s + 1}{\bar{P}_p + 2\bar{P}_s + 1} \alpha_p \bar{P}_p \quad (3)$$

$$\frac{d\bar{P}_s}{dz} = \frac{\bar{P}_p - 1}{\bar{P}_p + 2\bar{P}_s + 1} \alpha_s \bar{P}_s \quad (4)$$

여기서,  $a$ 는 광섬유 코어 반지름,  $\alpha_p (= \rho \sigma_p)$ 는 여기 빛살 흡수 계수 (pump absorption coefficient),  $\alpha_s (= \rho \sigma_s)$ 는 신호 빛살 흡수 계수 (signal absorption coefficient),  $P_{th}$ 는 여기 빛살 문턱 출력(pump power threshold),  $\bar{P}_p$ 은 규격화된 여기 빛살 출력(normalized pump power),  $\bar{P}_s$ 는 규격화된 신호 빛살 출력(normalized signal power),  $A$ 는 광학적 모드와 광섬유사이의 유효 상호 작용 면적(effective interaction area)이며, 따라서  $\Gamma_p$ 는 광섬유에서  $Er^{3+}$  첨가 부분과 광학적 모드(mode) 사이의 overlap integral  $\Gamma_p = \int_0^{2\pi} \int_0^b i_p(r, \phi) r dr d\phi$ 가 된다.  $b$ 는  $Er^{3+}$  이온이 고르게 분포된 광섬유 단면의 반지름,  $i_p$ 는 계단식 코어굴절율 형태 근사(step core-index approximation)와 광학적 모드 분포의 weakly guided approximation하의 기본 모드 LP<sub>01</sub> 모드의 규격화된 빛살 세기 분포(normalized intensity distribution)이다.<sup>[6,8]</sup>

$$i_p = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{V J_0(ur/a)}{a V J_1(u)} \right]^2, & r < a \\ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{u K_0(vr/a)}{a V K_1(v)} \right]^2, & r \geq a \end{cases} \quad (5)$$

(5)식에서  $J_1$ 는 1st kind Bessel 함수,  $K_1$ 은 modified Bessel 함수,  $V = \frac{2\pi a}{\lambda_p} (n_{core}^2 - n_{clad}^2)^{1/2}$ ,  $\lambda_p$ 는 여기 파장,  $\nu$ 와  $u$ 는  $r=a$ 에서  $1 \leq V \leq 3$ 일 때  $\nu = 1.1428 V - 0.9960$ ,  $u = (V^2 - \nu^2)^{1/2}$ 로 표시되는 근사치이다.<sup>[9]</sup> 주어진 입사 여기 빛살 출력에서 유한한 길이내에서만 신호 빛살의 증폭이 일어나고, 이 길이를 광섬유 최적 길이  $L_0$ 라 한다. 최적 길이 조건은  $P_p^{out}(z=L_0) = P_{th}$ 가 된다.<sup>[3]</sup> (3)식을 (4)식으로 나누어 얻은 식의 양변을 각각  $\bar{P}_p$ 와  $\bar{P}_s$ 에 대해 적분하고 소신호 (small signal) 근사를 적용하여 얻은 식과 (3)식에 소신호 근사를 적용하고  $\bar{P}_p$ 에 대해 적분하여 얻은 식에 광섬유 입사단과 출사단의 경계 조건을 대입하면, 아래와 같은 두 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{P_p^{out}}{P_{th}} - \frac{P_p^{in}}{P_{th}} - \ln \frac{P_p^{out}}{P_{th}} + \ln \frac{P_p^{in}}{P_{th}} = -\frac{\alpha_p}{\alpha_s} \ln \frac{P_s^{out}}{P_s^{in}} \quad (6)$$

$$\ln \frac{P_p^{out}}{P_{th}} - \ln \frac{P_p^{in}}{P_{th}} + \frac{P_p^{out}}{P_{th}} - \frac{P_p^{in}}{P_{th}} = -\alpha_p L \quad (7)$$

여기서,  $P_p^{in}$ 은  $z=0$ 에서의 입사 여기 빛살 출력,  $P_s^{out}$ 은  $z=L$ 에서의 출사 신호 빛살 출력,  $P_s^{in}$ 은  $z=0$ 에서의 입사 신호 빛살 출력,  $L$ 은  $Er^{3+}$  이온이 첨가된 광섬유 길이이다.

(6)식과 (7)식을 서로 더하여 얻은 식을 (7)식에서 (6)식을 감하여 얻은 식으로 나누면, 광섬유 매개 변수를 포함하는 초월 방정식(transcendental equation)을 얻을 수 있다.<sup>[1]</sup>

$$\ln \left( \frac{P_p^{in}}{P_{th}} - \frac{1}{2} \alpha_p L - \frac{1}{2} \frac{\alpha_p}{\alpha_s} \frac{\ln 10}{10} G \right) + \frac{1}{2} \alpha_p L - \frac{1}{2} \frac{\alpha_p}{\alpha_s} \frac{\ln 10}{10} G = \ln \frac{P_p^{in}}{P_{th}} \quad (8)$$

여기서,  $G$ 는 dB 단위의 이득으로써  $10 \times \log \frac{P_s^{out}}{P_s^{in}}$  으 로 산출되며, 신호 빛살의 순이득(net gain)을 나타낸다.  $G=0$ 일 때 입사 여기 빛살 출력을  $P_0$ 라 하면,  $P_p^{in}$ 을  $P_0$ 로 놓을 수 있고, (8)식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

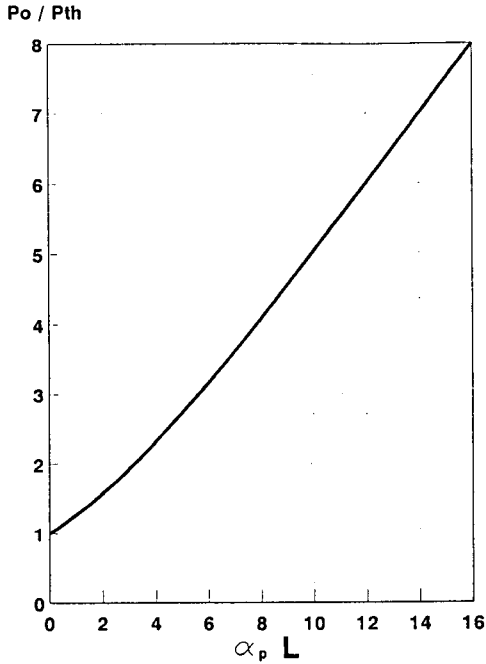


그림 1.  $P_0$ ,  $\alpha_p$ ,  $L$ 에 의해 계산된  $P_{th}$  값.

$$\ln\left(\frac{P_0}{P_{th}} - \frac{1}{2}\alpha_p L\right) + \frac{1}{2}\alpha_p L = \ln\frac{P_0}{P_{th}} \quad (9)$$

실험에 의해서  $P_0$ 와  $\alpha_p$ 를 측정함으로써 (9)식으로부터  $P_{th}$ 를 구할 수 있다. 그림 1에  $\frac{P_0}{P_{th}}$ 와  $\alpha_p L$ 의 관계를 (9)식으로부터 나타내었다. 또한, 실험에 의해  $\alpha_s$ 를 측정함으로써 (8)식으로부터 신호 빛살의 이득 특성도 얻을 수 있다.

그림 2는 규격화된 입사 여기 빛살 출력(normalized pump input power)  $\frac{P_p^{in}}{P_{th}}$ 과 규격화된 신호 빛살 이득(normalized signal gain)  $\frac{\alpha_p}{\alpha_s} G$ 와의 관계를 포화되지 않은 영역(unsaturated region) 내에서  $\alpha_p L$ 에 따라 (8)식으로부터 나타낸 것이다.

그림 3은 Er<sup>3+</sup> 이온이 첨가된 광섬유의 규격화된 길이(normalized Er-fiber length)  $\alpha_p L$ 와  $\frac{\alpha_p}{\alpha_s} G$ 의 관계를  $\frac{P_p^{in}}{P_{th}}$ 에 따라 (8)식으로부터 나타낸 것이다.

그림 2와 그림 3으로부터 실험에 의해 측정된  $P_0$ ,  $\alpha_p$ ,  $\alpha_s$ 를 도입하면 EDFA의 증폭률을 정량적으로 이해할 수

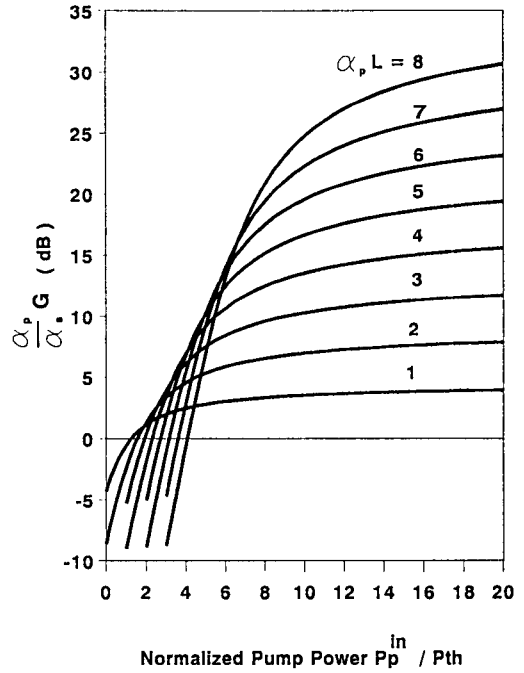


그림 2. 규격화된 입사 여기 빛살 출력에 따른 규격화된 신호 빛살 이득.

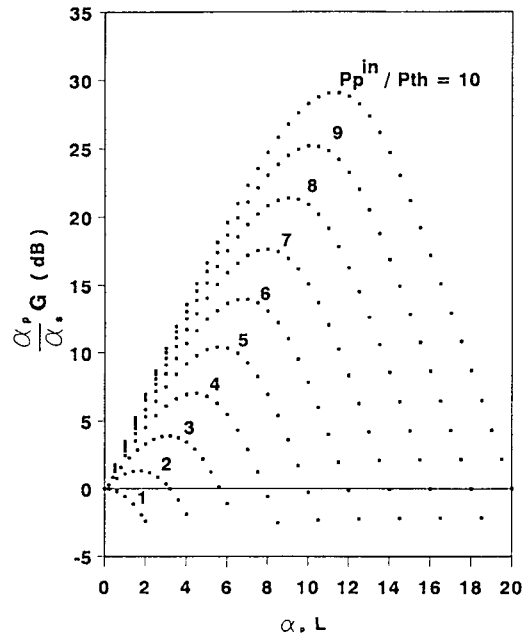


그림 3. Er<sup>3+</sup> 이온이 첨가된 광섬유의 규격화된 길이에 따른 규격화된 신호 빛살 이득.

있음을 알 수 있다. 또한, 소신호가 아닐 경우 (3)식을 (4)식으로 나누어 얻은 식의 양변을 각각  $\bar{P}_p$ 와  $\bar{P}_s$ 의 함수로 적분하여 얻은 식에 최적 길이 조건을 적용하고,  $\frac{\alpha_s}{\alpha_p}$ 를 곱하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\ln\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{P_s^{out}}{P_{th}}\right) - \ln\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{P_p^{in}}{P_{th}}\right) + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{P_s^{out}}{P_{th}} - \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{P_p^{in}}{P_{th}}\right) = \frac{\alpha_s}{\alpha_p} \left[ \frac{P_p^{in}}{P_{th}} - 1 - \ln\left(\frac{P_p^{in}}{P_{th}}\right) \right] \quad (10)$$

(10)식으로부터 증폭된 출사 신호 빛살 출력은 여기 빛살 출력과 입사 신호 빛살출력과의 관계로부터 얻을 수 있음을 알 수 있다.

그림 4는 규격화된 출사 신호 빛살 출력(normalized signal output power)  $\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{P_s^{out}}{P_{th}}$ 와  $\frac{P_p^{in}}{P_{th}}$ 와의 관계를 규격화된 입사 신호 빛살 출력(normalized signal input power)  $\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{P_p^{in}}{P_{th}}$ 에 따라 (10)식으로부터 나타낸 것이다.

그림 5에  $\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{P_s^{out}}{P_{th}}$ 와  $\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{P_p^{in}}{P_{th}}$ 와의 관계를  $\frac{P_p^{in}}{P_{th}}$ 에 따라 (10)식으로부터 나타내었다. 그림 4와 그림 5로부터 높은

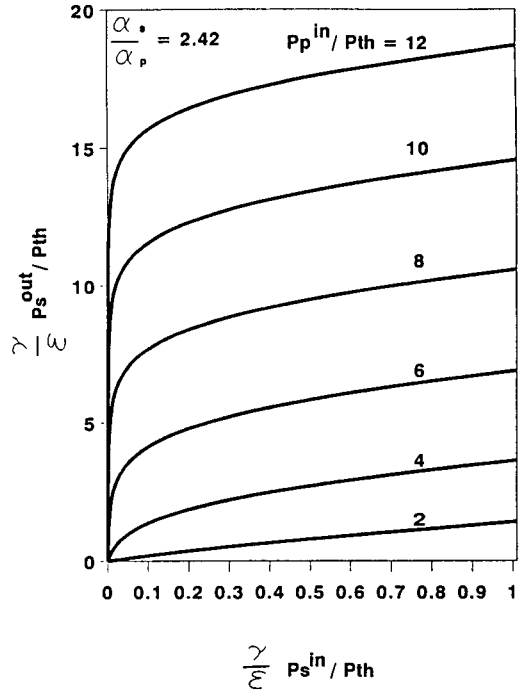


그림 5. 규격화된 입사 신호 빛살 출력에 따른 규격화된 출사 신호 빛살 출력.

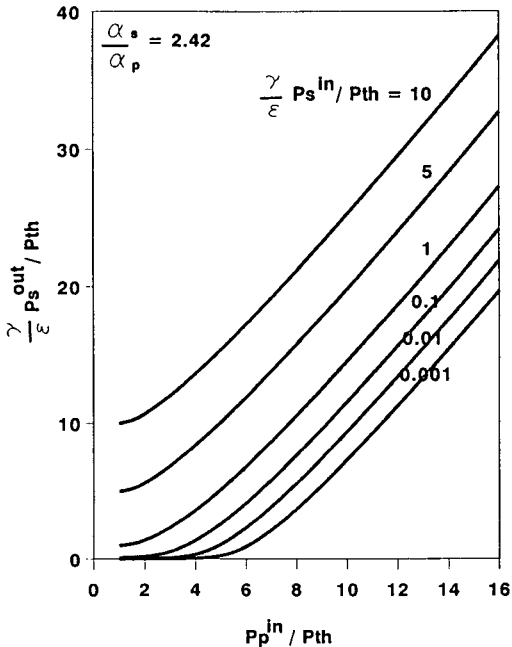


그림 4. 규격화된 입사 여기 빛살 출력에 따른 규격화된 출사 신호 빛살 출력.

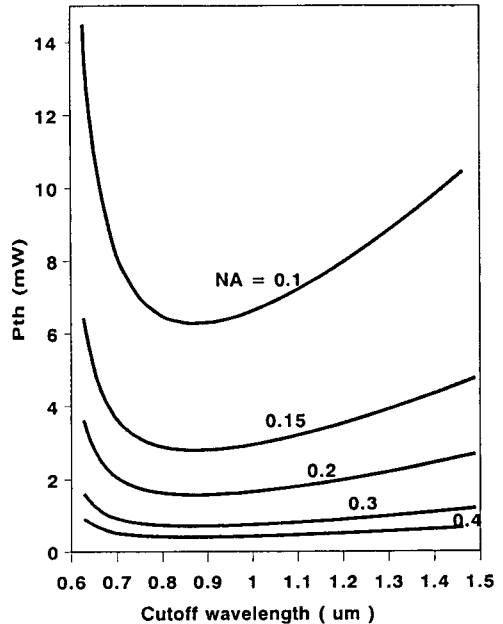


그림 6. NA 값이 주어질 때 광섬유 차단 파장에 따른  $P_{th}$  값.

출사 신호 빛살 출력을 얻기 위해서는 입사 신호 빛살 출력과 입사 여기 빛살 출력이 커야 됨을 알 수 있다.

지금까지는, 실험적으로 측정된  $P_0$ ,  $\alpha_p$ ,  $\alpha_s$ 로부터  $P_{th}$ 와 이득을 산출하는 과정에 대해 설명하였으나, 이제는 광섬유 매개 변수에 따른 EDFA의 최적 조건에 대하여 알아본다. 입사 여기 빛살의 파장이 1.48  $\mu\text{m}$ 이고,  $\tau_{21}=10$  ms,  $\epsilon \approx 1$  ( $\tau_{32} \ll \tau_{31}$ )일 때  $P_{th} (=A I_{th})$ 와 광섬유 차단 파장(cutoff wavelength)과의 관계를 개구수 NA에 따라 그림 6에 나타내었다. 여기서,  $NA = (n_{core}^2 - n_{clad}^2)^{1/2}$ 이다.

그림 6으로부터 NA가 커질수록  $P_{th}$ 는 감소하고, 각각의 NA에서는 차단 파장이 0.86  $\mu\text{m}$ 일 때  $P_{th}$ 가 최소가 됨을 알 수 있다.

그림 7은 입사 여기 빛살의 파장인 1.48  $\mu\text{m}$ 에서  $\sigma_p = 1.54 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ , 입사 신호 빛살의 파장인 1.535  $\mu\text{m}$ 에서  $\sigma_s = 5.57 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ ,  $\text{Er}^{3+}$  이온 밀도  $\rho = 23 \text{ ppm}$ 일 때,<sup>[10]</sup>  $P_p^{in} = 10 \text{ mW}$ ,  $\text{Er}^{3+}$  이온이 첨가된 광섬유 길이  $L = 30 \text{ m}$ 에 대하여 (8)식으로부터 포화되지 않은 영역내에서의 이득(Gain)과 차단 파장과의 관계를 NA에 따라 나타낸 것이다. 그림 7로부터 NA가 커질수록 이득은 증가하는 것을 알 수 있고, 각각의 NA에 더해서 차단 파장이 0.86  $\mu\text{m}$ 일 때 이득이 최대가 됨을 알 수 있다. 또한, 일정한 이득에 대해서 NA가 작을수록  $P_p^{in}$ 가 커야 한다는 것을 알 수 있다.

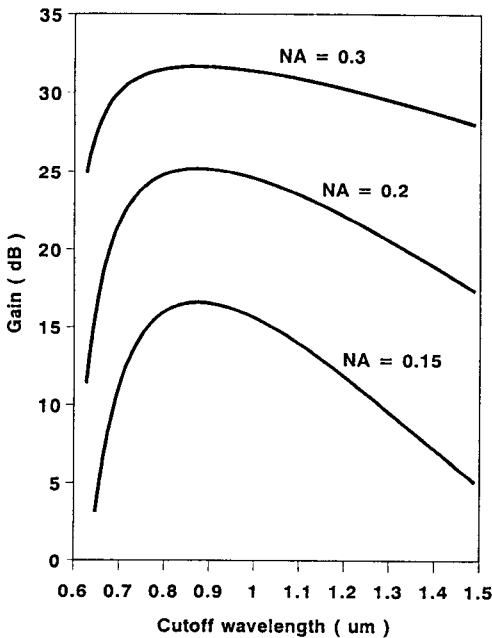


그림 7. NA 값이 주어질 때 광섬유 차단 파장에 따른 신호 빛살 이득.

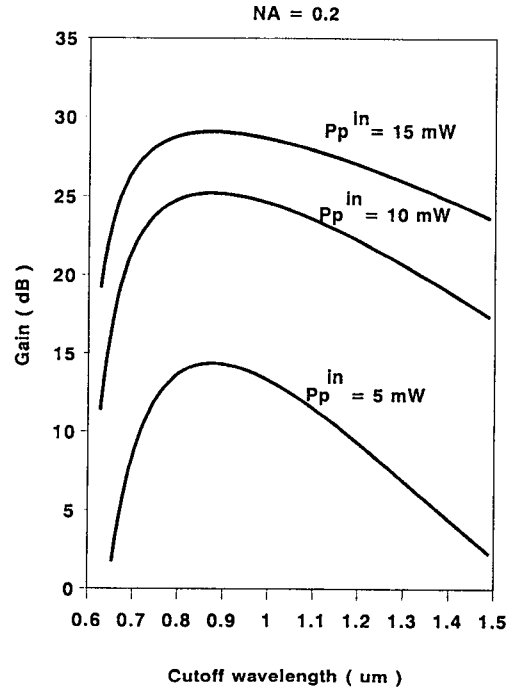


그림 8. NA=0.2이고 입사 여기 빛살 출력값이 주어질 때 광섬유 차단 파장에 따른 신호 빛살 이득.

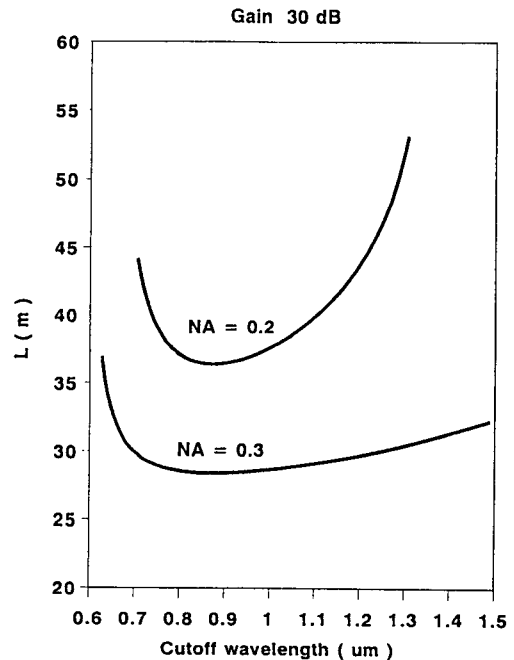


그림 9. 이득이 30 dB일 때 광섬유 차단 파장에 따른  $\text{Er}^{3+}$  이온이 첨가된 광섬유 길이 L.

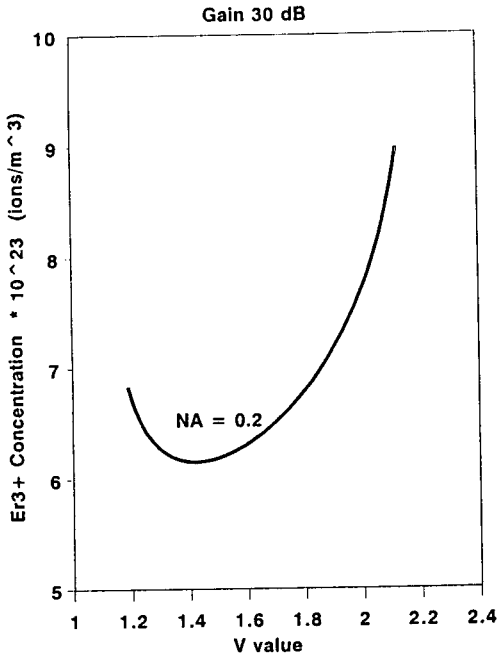


그림 10. NA=0.2이고 이득이 30 dB일 때 V 값에 따른 Er<sup>3+</sup> 이온 밀도 ρ.

그림 8은 그림 7의 광섬유 매개 변수에서 NA를 0.2로 고정시키고  $P_b^m$ 를 변화시킬 때의 차단 파장에 따른 이득 변화이다. 그림 8로부터 NA가 일정한 경우에 이득을 크게하기 위해서는  $P_b^m$ 를 증가시켜야 함을 알 수 있다.

그림 7의 변수에서 이득을 30 dB로 고정시켰을 때, 그림 9는 Er<sup>3+</sup> 이온이 첨가된 광섬유 길이 L과 차단 파장과와의 관계를 NA에 따라 나타낸 것이며, 그림 10은 NA가 0.2 일 때 Er<sup>3+</sup> 이온 밀도 ρ와 V값과의 관계를 나타낸 것이다.

그림 9로부터 NA가 클수록 이득 30 dB을 얻는 데 필요로 하는 Er<sup>3+</sup> 이온이 첨가된 광섬유의 길이가 짧아도 됨을 알 수 있고, 차단 파장이 0.86 μm일 때 Er<sup>3+</sup> 이온이 첨가된 광섬유 길이 L이 최소가 됨을 알 수 있다. 또한, 그림 10으로부터 NA가 0.2일 때 이득 30 dB을 얻는 데 필요한 Er<sup>3+</sup> 이온 밀도 ρ를 알아낼 수 있다.

이상의 이론적 결과를 볼 때, 본 논문에서 적용한 간단한 이론적 모델로부터 입사 여기 빛살의 파장이 1.48 μm일 때 EDFA의 최적 설계에 필요한 Er<sup>3+</sup> 첨가 광섬유 관련 매개 변수들을 쉽게 결정할 수 있음을 알 수 있다.

### III. 결 론

그동안 EDFA의 이론적 모델이 많이 제시되어 EDFA에 대해서 많이 알게 되었으나, EDFA의 해석에는 고려해야 할 복잡한 변수들이 많기 때문에 더욱 정확한 이론적 모델 연구가 현재도 진행되고 있다. 본 논문에서는 K. Nakagawa 등<sup>[1]</sup>과 E. Desurvire 등<sup>[3]</sup>이 제시한 이론적 모델을 기초로하여 Er<sup>3+</sup> 첨가 부분과 광학적 모드 사이의 overlap integral  $I_b$ 을 여기 문턱 빛살 출력에 적용하여, EDFA의 성능 분석 및 제작시 고려해야 할 광섬유 매개 변수의 최적 조건을 조사할 수 있었다.

즉, 1.48 μm에서 여기된 EDFA을 위한 간단한 이론적 모델을 제시 하였으며, 이 모델로부터 적절한 광섬유 매개 변수를 고려하여, EDFA의 성능을 정량적으로 평가하는 방법을 알아보았고, EDFA의 최적화에 대하여 기술하였다.

본 논문의 이론적 결과를 토대로 향후 EDFA용 Er<sup>3+</sup> 첨가 광섬유의 설계 및 제조에 대한 연구가 계속 진행될 예정이다.

### 참 고 문 헌

- [1] K. Nakagawa, S. Nishi, K. Aida, and E. Yoneda, *J. Lightwave Tech.*, **9**, 198 (1991).
- [2] M. J. F. Digonnet and C. J. Gaeta, *Appl. Opt.*, **24**, 333 (1985).
- [3] E. Desurvire, J. R. Simpson, and P. C. Becker, *Opt. Lett.*, **12**, 888 (1987).
- [4] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light, 2nd ed.*, (Oxford Science Publications, New York, 1985), ch. 7.
- [5] E. Desurvire, J. R. Simpson, *J. Lightwave Tech.*, **7**, 835 (1989).
- [6] C. R. Giles, E. Desurvire, *J. Lightwave Tech.*, **9**, 271 (1991).
- [7] C. R. Giles, E. Desurvire, *J. Lightwave Tech.*, **9**, 147 (1991).
- [8] D. Gloge, *Appl. Opt.*, **10**, 2252 (1971).
- [9] L. B. Jeunhomme, *Single-mode fiber optics — principles and applications.* (Marcel Dekker, Inc., 1983).
- [10] M. Ohashi, *J. Lightwave Tech.*, **9**, 1099 (1991).

**Theoretical Analysis of a 1.48  $\mu\text{m}$  Diode Laser Pumped  
 $\text{Er}^{3+}$  Doped Fiber Amplifier**

Hwe Jong Kim, Sang Bae Lee, Jae Cheol Jo, and Sang Sam Choi  
*Applied Physics Lab., Korea Institute of Science and Technology, Seoul 136-791, Korea*

Yong Duk Kim  
*Department of Physics, Sogang University, Seoul 121-742, Korea*

(Received: August 3, 1992)

We carried out the useful theoretical calculation for the optimum design of a 1.48  $\mu\text{m}$  diode laser pumped  $\text{Er}^{3+}$  doped fiber amplifier. The model we established is based on the rate equations of three level laser system and the overlap integral between fundamental mode  $\text{LP}_{01}$  and  $\text{Er}^{3+}$  doped area.

We determined several fiber parameters (N.A., V value, fiber length,  $\text{Er}^{3+}$  concentration, cutoff wavelength etc.) for the optimum design of a high optical gain. We found that our theoretical results are very useful to the design of  $\text{Er}^{3+}$  doped fiber used in EDFA.