

## 횡적등방성 지층의 시추공 간 탄성파 주시 자료의 토모그래피 역산 연구

### A Study on Tomographic Inversion of Crosshole Seismic Traveltimes in Transversely Isotropic Layers

장성형 (Jang, Seong Hyung)  
양승진 (Yang, Seung Jin)  
황세호 (Hwang, Se Ho)  
김중열 (Kim, Jung Yul)

한양대학교 자원공학과  
한양대학교 자원공학과  
한양대학교 자원공학과  
한국자원연구소 자원탐사부

#### 요약/Abstract

본 연구에서는 지층속도가 이방성의 일종인 횡적등방성을 갖는 지역에서의 시추공 간 탄성파 주시자료를 역산하여 속도 이상대를 규명하는 연구를 시행하였다. 등방성 및 횡적등방성의 모형지층에 대해 파선추적법으로 합성 탄성파 주시를 구한 후, 이 주시자료에 대해 이방성을 고려한 ART 역산법과 이방성을 고려하지 않은 일반적인 ART 역산법에 의해 속도 분포를 구해 본 결과, 이방성을 고려한 ART법에 의하면 이방성 및 등방성 지층의 속도분포가 잘 결정되었으며 일반적 ART법에 의하면 등방성 지층의 속도는 잘 결정되나 이방성 지층의 속도에는 오차가 많이 발생하였다. 따라서 지층의 이방성 또는 횡적등방성에 대한 사전 정보가 없을 때에는 이방성을 고려한 ART법을 적용하는 것이 좋을 것이다.

This paper presents a result on the determination of velocity distribution by a tomographic inversion of crosshole seismic traveltimes in transversely isotropic(anisotropic) media. The cross-hole traveltimes used in this study are synthetic ones computed by ray tracing for some models having isotropic and transversely isotropic velocity distributions. The traveltimes are inverted by a general ART and anisotropic ART which considers the transversely isotropic effect during inver-

sion. The anisotropic ART gives accurate velocity distributions of transversely isotropic and isotropic models, while the isotropic ART determines accurate velocities only for the isotropic model but inaccurate for the transversely isotropic one. Therefore, the anisotropic ART may be used in case where no information is known on the isotropy or transverse isotropy of a survey area.

## 서 론

암석의 탄성파 속도는 방향에 따라 그 속도가 다른 경우가 많다(Thomsen, 1986). 이러한 이방성 매질에서 측정한 탄성파 주시자료 해석에 있어서 이방성을 고려하지 않으면 지질구조 및 지층속도에 오차를 초래할 수 있다. 따라서 탐사자료를 정확하게 해석하기 위해서는 매질의 이방성을 고려해야 할 필요가 있다.

본 연구에서는 지층속도가 이방성의 한 형태인 횡적 등방성(transversely isotropy)을 갖는 경우 시추공 간 탄성파 주시자료로 부터 토모그래피 역산법에 의해 속도 분포를 규명하는 연구를 수행한다. 본 연구의 역산에 사용된 주시자료는 횡적등방성을 갖는 가정된 모형 지층에 대하여 이방성을 고려한 파선 추적에 의해 얻은 합성주시자료와 위 모형 지층이 등방성인 경우의 주시자료이다. 위 주시자료에 대해 이방성 지층에서의 주시자료 역산에 관한 이론(Stewart, 1988)을 활용하여 모형의 지층속도 분포가 규명되는가를 고찰해 본다. 모형이 등방성인 경우와 횡적 등방성인 경우에 대한 주시를 이방성을 고려한 ART (Stewart, 1988)와 이방성을 고려하지 않은 일반적 ART(Gordon, 1974)로 역산해 봄으로서 조사지역 암석의 이방성 또는 가로 등방성에 관한 사전 정보가 없을 때의 속도 역산

방안에 대해 검토해 본다.

## 이론적 고찰

1) 이방성 매질에서의 탄성계수와 탄성파 속도와의 관계  
이방성 매질에서의 탄성계수  $C$ 는 응력( $\sigma$ )과 변형율( $\varepsilon$ ) 사이의 관계는

$$C_{km} = C_{km} \varepsilon_m \quad (k, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (1)$$

로 정의 되며, 여기서  $\sigma_1 = \sigma_{11}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{22}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{33}$ ,  $\sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32}$ ,  $\sigma_5 = \sigma_{13} = \sigma_{31}$ ,  $\sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ ,  $\varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}$ 이고  $C_{km}$ 은  $\sigma$ 와  $\varepsilon$ 의 비례상수 즉, 탄성계수이다. 이방성 매질은  $6 \times 6 = 36$ 개의 탄성계수를 갖는다(Mase, 1970).

횡적등방성 매질에 대한 탄성계수 행렬은 5개의 독립적인 요소로 된 다음과 같은 대칭행렬이다(Thomsen, 1986).

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{66} & C_{33} \\ C_{11} & C_{11} & C_{13} \\ C_{33} & C_{13} & C_{33} \\ C_{44} & C_{44} & C_{44} \\ C_{66} & C_{66} & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2)$$

이들 행렬의 요소는 Lame 상수  $\lambda$  및  $\mu$

(Shear modulus)와 체적 탄성계수  $k$ 와 아래와 같은 관계식이 있다.

$$C_{33} = \lambda + 2\mu = k + \frac{4}{3}\mu \quad (3a)$$

$$C_{44} = \mu \quad (3b)$$

동방성 매질의 경우에는 (2)식에서  $C_{11} = C_{33}$ ,  $C_{66} = C_{44}$ ,  $C_{13} = C_{33} - 2C_{44}$ 이며 수평속도와 수직 속도가 같다.

횡적동방성 매질에서 P파의 탄성파 위상 속도는

$$\rho v_p^2(\theta) = \frac{1}{2} [C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33})\sin^2\theta + D(\theta)] \quad (4)$$

이며(Daley and Hron, 1977), 여기서  $\rho$ 는 밀도,  $\theta$ 는 과면의 법선과 대칭축과의 사잇각이며  $D(\theta)$ 는

$$D(\theta) = \{(C_{33} - C_{44})^2 + [2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})] \sin^2\theta + [C_{11} + C_{33} - 2C_{44}]^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2 \sin^4\theta\}^{1/2} \quad (5)$$

이다. Thomsen(1986)은 식(4)를 다음과 같은 이방성 지수( $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\delta^*$ )와 탄성계수 사이의 관계식을 도입하여 위상 속도를 재 정리하였다. 즉,

$$\epsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \quad (6a)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}} \quad (6b)$$

$$\delta^* = \frac{1}{2C_{33}^2} [2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})] \quad (6c)$$

이라 할 때

$$v_p^2(\theta) = a_0^2 [1 + \epsilon \sin^2\theta + D^*(\theta)] \quad (7)$$

이 되며 여기서

$$a_0 = \sqrt{C_{33}/\rho} \quad (8a)$$

$$\beta_0 = \sqrt{C_{44}/\rho} \quad (8b)$$

$$D^*(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{a_0^2}\right) \left\{ \left[ 1 + \frac{4\delta^*}{(1 - \beta_0^2/a_0^2)^2} \right. \right. \quad (8c)$$

$$\left. \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{4(1 - \beta_0^2/a_0^2 + \epsilon)\epsilon}{(1 - \beta_0^2/a_0^2)^2} \sin^4\theta \right]^{1/2} - 1 \quad (8c)$$

이다. 위식의  $a_0$  및  $\beta_0$ 는 수직( $\theta=0$ ) 방향의 P파 및 S파의 속도이다. 식(6)에서  $\epsilon$ ,  $\gamma$  및  $\delta^*$ 는 무차원이고 이방성의 정도가 작을 때 매우 작은 값을 갖는다.

Thomsen(1986)은 많은 암석에 대한  $\epsilon$ ,  $\gamma$  및  $\delta^*$ 의 값을 조사하여 본 결과 대부분의 암석에서 매우 작은 값(<<1)을 갖는 점을 이용하여 식(7)을 다음과 같이 단순화 하였다. 즉, 식(8c)을  $\theta$  값에 대하여 Taylor급수 전개하여  $\epsilon$ ,  $\gamma$  및  $\delta^*$ 에 관한 일차식 값만 취하면

$$D^*(\theta) \approx \frac{\delta^*}{1 - \beta_0^2/a_0^2} \sin^2\theta \cos^2\theta + \epsilon \sin^4\theta \quad (9)$$

이 되며 이 식을 다시 식(7)에 대입하여 선형화 시키면 이방성이 약한 매질에 대한 위상 속도를 간단하게 나타낼 수 있다. 즉,

$$v_p(\theta) = a_0 (1 + \delta \sin^2\theta \cos^2\theta + \epsilon \sin^4\theta) \quad (10)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left[ \epsilon + \frac{\delta^*}{1 - \beta_0^2/a_0^2} \right]$$

$$= \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})} \quad (11)$$

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \quad (12)$$

## 2) 이방성 지층의 시추공 간 주시자료의 토모그래피 역산

지층 내부 상태를 규명하는 방법으로 사용하는 지오토모그래피역산 방법 중 ART방법은 많은 미지수를 갖는 선형방정식의 해를 구하는데 주로 이용 된다(Herman, 1980; Cartion, 1987; Nolet, 1987). 본 연구에서는 토모그래피 역산법 중 Lagrange multiplier를 이용한 Al-yahya(1985)의 방법을 일반적 ART 방법에 확장한 Stewart(1988) 방법을 이용하여 이방성 매질에 대한 토모그래피 역산을 실시 하기로 한다. 이 이방성을 고려한 ART 방법은 다음과 같다.

이방성 매질에서 방향  $\theta$ 에 따른 P파 속도의 역수  $P(\theta)$ 는 식(10)을 속도의 역수로 하여 재정리하면

$$p(\theta) = p_0(1 - \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \varepsilon \sin^4 \theta) \quad (13)$$

이며(Stewartm 1988),  $\theta$ 는 수직선과 파선 경로 사이의 각도,  $P_0$ 는 수직방향 속도의 역수(Vertical slowness)이며,  $\varepsilon$  및  $\delta$ 는 식(11) 및 (12)로 정의되는 이방성 지수들이다.  $\theta$ 가 작을 경우 위식은

$$p(\theta) = p_0 + ag(\theta) \quad (14)$$

이며  $a$ 는  $p_0\delta$ ,  $g(\theta) = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ 이다.

파가 격자를 통과 하는데 걸린 시간  $t$ 는

$$t = \sum_{j=1}^N p_j(\theta) d_j \quad (15)$$

이며, 여기서  $N$ 은 각각의 파가 통과한 격자의

수,  $d_j$ 는  $j$ 번째 격자내에서 파가 진행한 거리이고,  $p_j(\theta)$ 는  $\theta$ 방향에 대한  $j$ 번째 격자 속도의 역수이다. 일반적인 ART 알고리즘은 식(15)에서 속도의 역수를 가정하여 계산한 주시와 측정된 주시를 비교하여 그 차이 만큼 각각의 파선 경로에 따른 속도의 역수를 보정한다.

속도의 역수와 이방성 지수의 미소 변화에 의한 주시의 변화량은

$$\Delta t = \sum_{j=1}^N d_j [\Delta p_{0j} + g(\theta) \Delta a_j] \quad (16)$$

이며, 여기서  $\Delta p_{0j}$ 는  $j$ 번째 격자에서 수직속도 역수의 변화량이고,  $\Delta a_j$ 는 이방성 지수(Anisotropy factor) $\delta$ 의 변화량이다. 측정주시와 계산주시와의 차( $\Delta t$ )로 표현되는 식(16)에 대한 해는 무한개가 존재한다. 따라서 식(16)에서 이방성 지수와 속도를 보정하기 위해  $p_0$ 와  $\delta$ 사이에 가변 가중치와 임의의 Even-norm을 적용한다. 차수(order)가  $2\ell$  일때의 가중 norm  $L$ 은

$$L_\ell = \sum_{j=1}^N \Delta p_{0j}^{2\ell} + k^2 \Delta a_j^{2\ell} \quad (17)$$

이며, 여기서  $k$ 는 상수의 가중치이고 1은 0보다 큰 정수이다. (17)식의 해에 제약(constRAINTS)을 주기 위해 Lagrange multiplier  $\lambda$ 를 이용하여 위 식(16)과 (17)을 정리하면

$$M = \sum_{j=1}^N [\Delta p_{0j}^{2\ell} + k^2 \Delta a_j^{2\ell} - \lambda d_j \Delta p_{0j} - \lambda g(\theta) d_j \Delta a_j] + \lambda \Delta t \quad (18)$$

(18)에서  $M$ 의 최소값을 구하기 위해  $\Delta p_{0j}$ 와  $\Delta a_j$ 에 대해 미분하면

$$\frac{\partial M}{\partial \Delta p_{0j}} = 2\ell \Delta p_{0j}^{2\ell-1} - \lambda d_j = 0 \quad (19a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \Delta a_j} = 2\ell k^2 \Delta a_j^{2\ell-1} - \lambda g(\theta) d_j = 0 \quad (19b)$$

이다. 따라서 식(16)과 (19)에서

$$\Delta p_0 = \frac{\Delta t \cdot d_j^{1/(2l-1)}}{\gamma \sum d_j^{2/(2l-1)}} \quad (20)$$

$$\Delta a_i = \frac{\Delta t [d g(\theta)]^{1/(2l-1)}}{k^{2/(2l-1)} \gamma \sum_j d_j^{2/(2l-1)}} \quad (21)$$

여기서  $\gamma = 1 + \frac{g(\theta)^{2/(2l-1)}}{k^{2/(2l-1)}}$ 이며, 위 두식이 이방성을 고려한 일반적인 ART 보정식이다. 만약  $k=1$ (동일한 가중치를 가함)이고  $l=L_{\text{norm}}$ 이면 식(20), (21)은

$$\Delta p_0 = \frac{\Delta t \cdot d_j}{[1+g^2(\theta)] \sum_j d_j^2} \quad (22a)$$

$$\Delta a_i = \frac{\Delta t g(\theta)}{[1+g^2(\theta)] \sum_j d_j^2} \quad (22b)$$

이 된다. 이방성 지수  $\delta$ 는  $\Delta a_i/p_0$ 를 전단계에서 계산된  $\delta$ 에 더해서 보정하고, 수직속도 역수는 전단계에서 계산된  $p_0$ 에  $\Delta p_0$ 를 더하여 보정한다.  $g(\theta)$ 가 0인 경우는 등방성일 때의 일반적인 ART가 된다. 즉,

$$\Delta p_i = \frac{\Delta t \cdot d_j}{\sum_j d_j^2} \quad (23)$$

이상의 보정을 각 파선 경로에 대하여 시행한다. 즉, i번째 파선에 대한 j번째 격자의 보정은

$$\Delta p_0 = \frac{\Delta t \cdot d_j}{[1+g^2(\theta)] \sum_j (d_j^2)^2} \quad (24a)$$

$$\Delta a_i = \frac{\Delta t \cdot d_j \cdot g(\theta)}{[1+g^2(\theta)] \sum_j (d_j^2)^2} \quad (24b)$$

이며,  $\Delta t$ 는 i번째 파에 대한 측정주시와 계산주시의 차이,  $d_j$ 는 i번째 파가 j번째 격자를 지날 때의 파선의 길이이며,  $\theta$ 는 i번째 파선이 수직과 이루는 각도이다. 이상의 보정을  $\Delta t$ 가 허용 오차 범위내에 수렴할 때까지 반복적으로 실행한다.

### 전산모형실험

횡적동방성 매질로 된 시추공 간 주시자료의 토모그래피 역산을 실험하기 위해 Fig. 1과 같은  $70 \times 70$ m 크기의 모형을 설정하였다. 본도의 (a)는 이방성의 석회암질 세일 내에 속도 이상대인 이방성 사암질 세일이 존재하는 모형이고, (b)는 두 이방성 세일 사이에 이방성 사암질 세일 층이 존재하는 모형이다. 이들 모형에 대한 각 암석의 탄성계수는 Table 1과 같이 부여하였다.

Table 1 Elastic constants of rocks in models in Fig. 1.

Material	Elastic constants(m/sec)				
	$\sqrt{C_{11p}}$	$\sqrt{C_{33p}}$	$\sqrt{C_{13p}}$	$\sqrt{C_{44p}}$	$\sqrt{C_{66p}}$
Limestone-shale	3826	3308	2076	1820	2260
Anisotropic shale	3018	2474	1725	1509	1963
Sand-shale	2547	2409	1513	1324	1525

이 모형의 양 측면에 지표 하부 5m 지점에서부터 매 10m 간격으로 음원과 수진점을 설정하였다. 모형을 가로 및 세로가 각각 10m인  $7 \times 7$ 개의 격자로 나눈 후 식(13)과 암석 경계면에서 Snell의 법칙을 적용한 파선추적

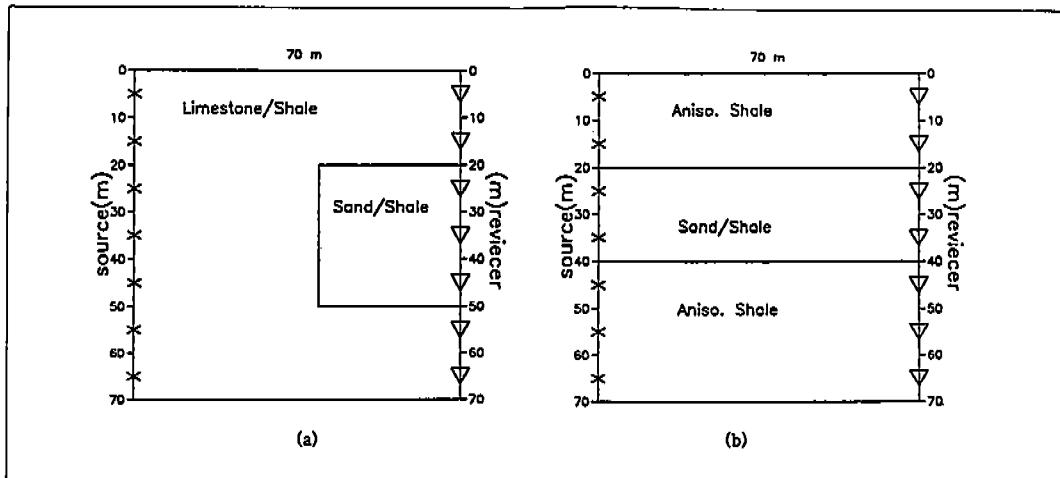


Fig. 1 Transversely isotropic models. a) Shady shale block surrounded by limy shale. b) Sandy shale layer interbedded between strongly anisotropic shale layers.

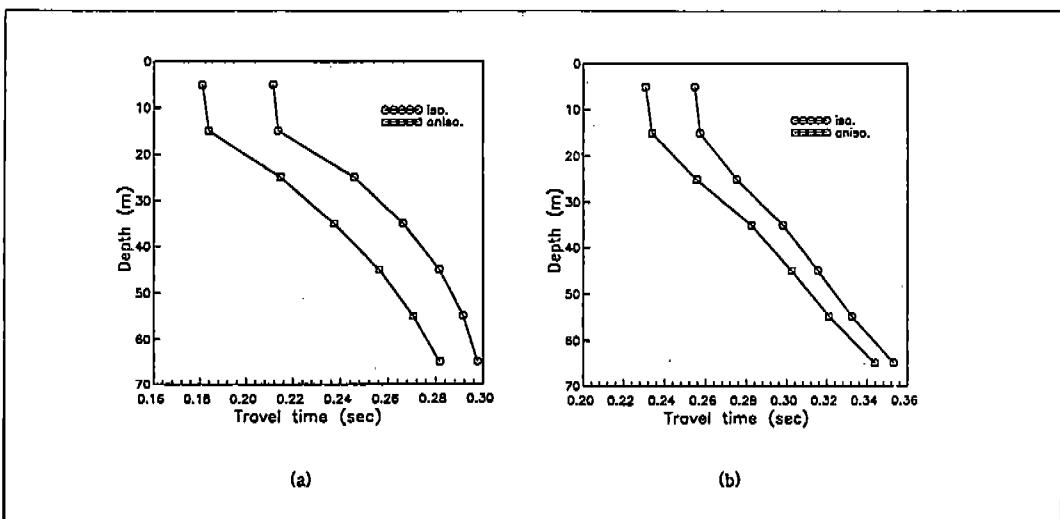


Fig. 2 a) and b) are crosshole seismic traveltimes for model (a) and (b), respectively, in Fig. 1. Squared(□) curves are traveltimes for the actual transversely isotropic models and circled(○) curves are those for the isotropic models in which the horizontal velocity of each of the rocks in Fig. 1 is made equal to the vertical velocity.

법을 이용하여 위에서 첫번째 음원과 각 수진기간의 주시를 계산한 결과는 Fig. 2와 같다. 또한 본도에는 매질의 이방성을 제거한(즉,

수평속도를 수직속도와 같게한) 동방성인 경우의 주시도 표시하였다. 본도에서 보듯이 횡적동방성 지층에서는 수평 속도가 수직

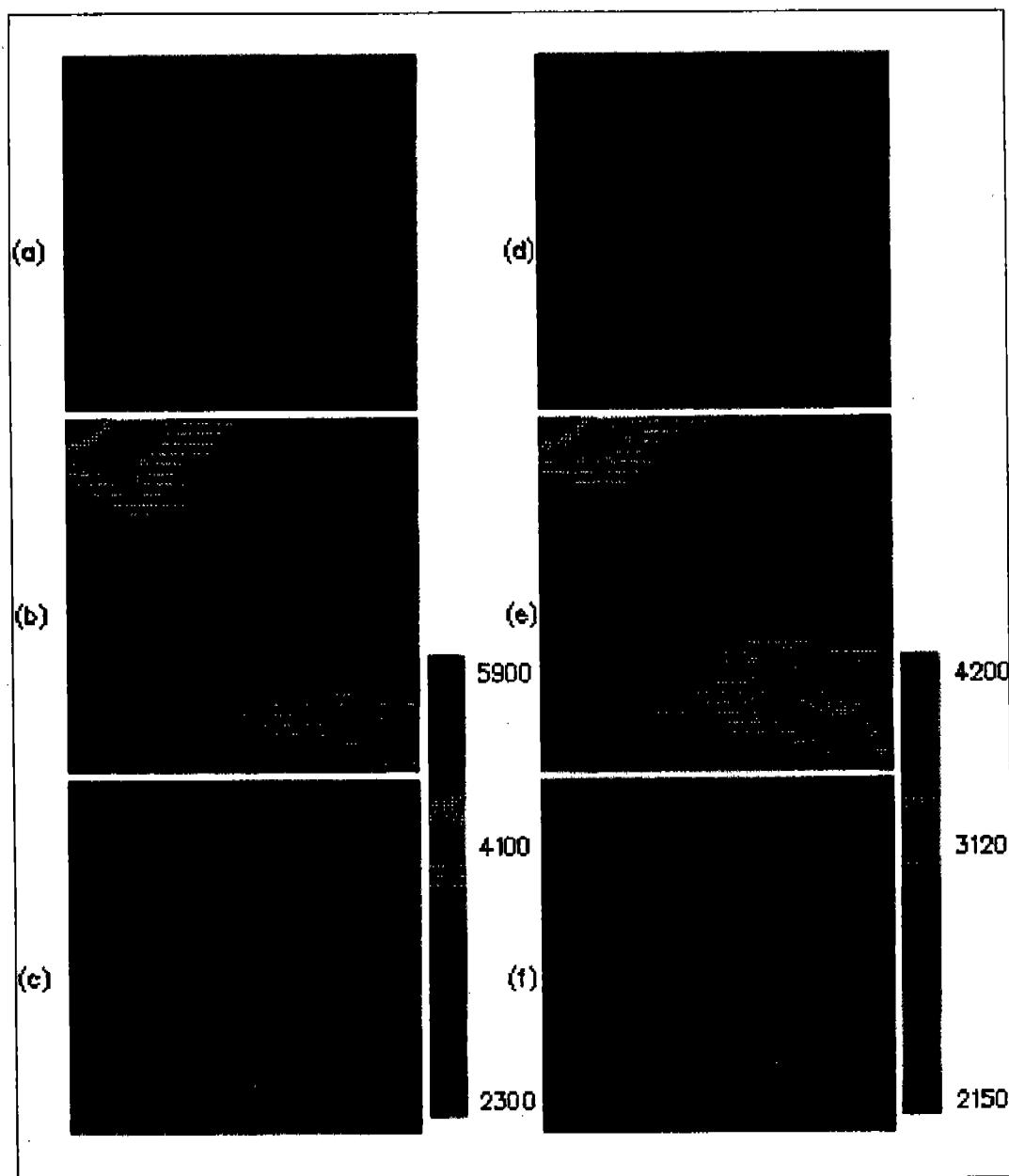


Fig. 3 The left(a, b, c) and right(d, e, f) are velocity distributions determined from traveltimes (a) and (b) in Fig. 2, respectively. The top(a and d) is determined from traveltimes in isotropic models by the anisotropic ART. The middle(b and e) and bottom(c and f) are determined from traveltimes in anisotropic models by general and anisotropic ART, respectively.

속도보다 크므로 전파 시간이 등방성인 경우의 전파시간보다 작으며, 모형의 각 암석이 횡적등방성 일때와 등방성일때의 첫번째 음원과 첫번째 수진기 간의 전파 시간 차이와 첫번째 음원과 마지막 수진기 간의 전파 시간 차이가 다른 이유는 전자의 경우  $\theta$ 는  $\pi/2$ 가 되어 수평 속도의 영향이 크며, 후자의 경우  $\theta$ 가 작아지므로 수평 속도의 영향이 작아지기 때문이다.

위 주시에 대한 토모그래피 역산에서 측정 주시자료가 이방성을 내포하고 있는지 사전에 알 수 없기 때문에 등방성 및 이방성 매질의 주시자료에 이방성을 고려하지 않은 (23)식에 의한 일반적 ART와 이방성을 고려한 (24)식을 이용한 ART를 적용한 결과를 비교하여 보았다.

Fig. 3의 왼쪽 그림(a, b, c)는 Fig. 1의 모형 (a)에 대한 주시곡선(Fig. 2-a)의 토모그래피 역산 결과이며 이중 (a)는 등방성 매질의 주시자료에 이방성을 고려한 ART 역산 결과로서 속도 이상대의 규명이 잘 됨을 알 수 있으며, (b)는 이방성 매질에 대한 주시 자료를 이방성을 고려하지 않은 ART에 의한 결과로서 매질의 불균질과 이방성에 기인한 주시의 변화량을 오직 불균질에 의한 주시의 변화만으로 간주하기 때문에 속도 이상대의 규명이 부정확하게 됨을 나타낸다. (c)는 이방성이 매질에 대한 주시자료를 이방성을 고려한 ART의 결과로서 이방성을 고려한 ART가 모형(Fig. 1-a)의 속도분포를 잘 나타내 줌을 보여 준다.

Fig. 3의 오른쪽 그림(d, e, f)은 Fig. 1의 모형 (b)에 대한 주시곡선(Fig. 2-b)의 토모그래피 역산 결과이며 (d)는 등방성 매질의 주시자료에 이방성을 고려한 ART의 결과, (e)와 (f)

는 각각 이방성 매질의 주시 자료에 일반적인 ART와 이방성을 고려한 ART를 적용한 결과로서 이방성을 고려한 ART가 모형(Fig. 1-b)의 속도 분포를 더 정확히 나타냄을 알 수 있다. 위 예에서 보듯이 이방성을 고려한 ART에 의하면 등방성 및 이방성 지층이 모두 잘 해석될 수 있기 때문에 지층의 이방성 내포 여부를 알 수 없는 경우에 이방성을 고려한 ART를 적용하면 속도 분포가 잘 규명될 수 있다.

## 결 론

본 연구에서는 횡적등방성 및 등방성 모형지층에 대해 파선추적에 의해 구한 합성 탄성파 주시자료를 일반적 ART방법과 이방성을 고려한 ART방법으로 역산을 실시한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 이방성 매질에서의 시추공 간 탄성파 자료는 이방성을 고려하여 역산해야 속도 이상대를 정확히 규명할 수 있다.
2. 이방성을 고려한 역산에 의해 등방성 매질의 속도 분포도 규명됨으로 매질의 이방성 내포 여부를 모를 경우에는 이방성을 고려한 역산을 적용하는 것이 좋을 것이다.

## 감 사

본 연구는 KOSEF 89-0610-02 및 한국 자원연구소의 Geotomography 연구 결과의 일부이며 위 기관의 연구지원에 감사한다.

## 참고문헌

Al-Yahya, K., 1985, An iterative solution to seis-

- mic tomography, Stanford Exploration Project, 42.
- Carrion, P., 1987, Inverse problems and tomography in acoustic and seismoligy, Penn. Publ. Co.
- Daley, P. F., Hron, E., 1977, Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media, Bull. Seis. Soc. Am., 67,661—675.
- Gordon, R., 1974, A tutorial on ART(Alegebraic Reconstruction Techniques), IEEE Nucl. Sci., v. NS-21, 78—93.
- Herman, G. T., 1980, Image reconstruction from projections : The fundamentals of computerized tomography, Academic press.
- Mase, G. E., 1970, Theory and problems of continuum mechanics, McGraw Hill.
- Nolet, G., 1987, Seismic wave propagation and seismic tomography in Nolet, G., Ed., Seismic tomography with applications in global seismology and exploration geophysics, D. Reidel Publ. Co., 1—23.
- Stewart, R. R., 1988, An algebraic reconstruction technique for weakly anisotropic velocity, Geophysics, 53, 1613—1615.
- Thomsen, L., 1986, Weak elastic anisotropy, Geophysics, 51, 1954—1966.
- 
- 장성형, 양승진, 황세호 :  
한양대학교 자원공학과  
서울시 성동구 행당동 17  
133-070  
TEL : (02) 290-0114
- 김중열 :  
한국자원연구소 자원탐사부  
대전시 유성구 가정동 30번지  
305-350  
TEL : (042) 868-3178  
FAX : (042) 868-9720