

# 의공학분야에서의 혼돈과학

## Chaos in Biomedical Engineering

박 광 석

(서울대학교 의과대학 의공학교실 조교수)

### 1. 서 론: 혼돈(Chaos, 混沌)

최근들어서의 비선형적 동역학의 발전은 과학의 여러분야에 걸쳐 “혼돈과학”이라고 불리어지는 새로운 과학의 영역을 만들어 나가고 있으며[4], 의학분야및 의공학분야에도 점차 응용되는 범위가 넓어지고 있다. 여기에서는 혼돈 과학 또는 비선형 동역학의 기본적 특성에 대하여 소개하고, 의공학분야에의 응용에대하여 그동안의 연구예를 들어서 설명하고자한다.

### 2. “혼돈”이란 무엇인가?

혼돈을 가장 쉽게 이해하는 방법은 아마도 이것을 이미 우리가 잘알고 있는 규칙신호 및 불규칙신호와 비교하여 보는 것일것이다.

불규칙특성을 나타내는것은 그 상태가 결코 반복하지 않으면, 다음상태를 예측할 수 없고, 일련의 신호들이 내부의 유기적인 발생기전에 의한것이라고 볼수없는 경우이다. 예를 들어 개스 분자운동의 경우 대표적인 불규칙동태를 나타낸다고 할수 있는데, 우리는 이경우에 분자들의 평균적 동태에 대하여서는 상당한 정밀도를 가지고 예측해낼수 있으나, 분자 한 개씩의 개별적인 동태에 대하여서는 정확하게 예측할 수 없다. 우리 주위에서 이와같은 불규칙한 동태(dynamics)를 나타내는 경우는 쉽게 접할 수 있다. 예를 들어, 이 글의 처음 부터의 단

어당의 글자수를 세어보면, 6,4,4,3,3,5,...의 순서로 나갈것이다. 이와같은 숫자의 배열에서, 다음의 단어를 보기전에 그 글자수를 예측할 수 있는 규칙은 없다고 할수있다. 만약 그와같은 규칙이 있다면, 이 배열은 불규칙동태라고 볼수 없을것이다. 생체내에서는 우리가 생각하는 것과는 달리 불규칙한동태를 보이는 경우가 그다지 많지 않다.(유전자의 전위(轉位), 배란(排卵), 수정(受精) 등)

반면에 규칙적 동태를 나타내는 경우에는 일정한 시간간격을 갖고 항상반복되기 때문에 현재의 상태에서 다음의 상태를 정확하게 예측할 수 있게된다. 삼각함수파형이나, 심장의 동방결절(洞房結節)에서 발생하는 주기적인 전기심전도 리듬등이 전형적인 규칙적인동태를 갖는 예라고 할수있다. 규칙적이고, 주기적인 특성을 나타내 보이는 경우에는 그와같은 동태를 나타내는 시스템이 근본적으로 결정론적인 과정(deterministic process)에 근거하고 있다고할 수 있다. 우리가 삼각함수파형중의 하나인 싸인함수의 어느 한순간에서의 진폭과 주파수와 위상을 알고 있다면, 차후 어느순간에서도 싸인 함수의 진폭을 정확하게 예측할 수 있는 것이다. 신호의 다음값을 예측하는 규칙을 정확하게 알고 있기 때문에 앞으로 발생할 수 있는 값의 예측이 가능하게 되는 것이다. 생체및 인체시스템에서는 많은 경우에 이와같은 규칙적이고 주기적인 동태를 나타내는 것이 정상으로 간주되어 왔으나, 오히려 규칙적인 신호가 비정상을 나타내는 경우도 볼수있게 된다.

(심실빈맥인 경우의 심전도 신호, 소발작 간질인 경우의 뇌파 신호등)

혼돈의 경우는 이와 같은 불규칙 동태를 나타내는 경우 및 주기적인 동태를 나타내는 경우와는 또 다른 동태를 나타내고 있다. 혼돈의 경우에는 불규칙 동태의 특성과 주기적인 신호의 특성을 동시에 나타내고 있다. 혼돈의 경우에는 비록 그것이 외형적으로는 불규칙적인 동태처럼 비구조적인 원인에 의해서 발생 되는 것으로 보이지만, 실제적으로는 주기적인 동태를 나타내는 경우와 마찬가지로 결정론적인 내부 기전에 의하여 발생하는 것이라고 말할 수 있다. 예를 들어 가장 간단한 혼돈시스템인 베르놀리 map에 대하여 살펴보자.  $X_{n+1} = 2 * X_n \pmod{1}$ . 여기서 mod 1은 계산된 값  $X_{n+1}$ 에서 정수 부분은 뺀다는 것과 같다. 여기에  $X_0 = ((2)^{**}(1/2)) / 2 = 0.7071067...$ 의 값을 대입하여 순차적으로 계산하여보면, 0.7071067..., 0.4142134..., 0.8284268..., 0.6568536..., 0.3137072..., 0.6274144..., 0.2548288..., 0.5096576..., 0.0193152... 와 같은 수의 배열을 얻게된다. 우리가 이 계산된 수의 배열만 관찰하여서는 이것이 내부의 규칙적인 기전에 의해서 발생된 것이라고 쉽게 인정하기 어렵고, 일견 불규칙적인 동태라고 간주하기 쉬울 것이다. 그러나 그 밑에는 아주 간단한 규칙이 숨어 있는 것을 알 수 있다. 혼돈의 경우에는 이와같은 그 외부적인 동태가 불규칙하게 관찰되나 그것이 불규칙 동태를 나타내는 경우와는 달리 내부적으로는 결정적인 기전에 의해서 발생하는 것이다. 그리고, 우리는 실제로 혼돈계를 불규칙계와 구별할 수 있는 여러가지 방법을 이용하여 이들을 구별해낼 수 있다. 몇몇 화학반응, 유체에서 발생하는 난류, 명왕성의 궤도, 태양계의 전파복사, 원자운동, 기상, 북극의 빙하 등 많은 물리적인 시스템이 혼돈적 특성을 나타내고 있다고 보고 되었다. 생체에 관련된 경우에도, 홍역 전염병의 발생 동태, 생체군락 모델, 진화 모델, 신경세포의 활동전위, 신전반사, 심장의 동특성 모델, 심호흡계 상호작용, 태생학, 혈액생성, 일부생화학적 반응 그리고 뇌파 등에서 예를 들 수 있다.[3, 7, 11]

### 3. 무엇이 혼돈을 발생시키는가?

대부분의 많은 생체 시스템은 여러가지 이유에 의해서 선형적(linear)시스템으로 간주 되어 왔다. 선형 시스템의 가장 간단한 예는 독립 변수 x와 종속변수 y사이의 관계가 그래프상에서 직선의 형태로 나타나는 경우일 것이다. 이른바 “많으면 많을 수록 좋다”라고 표현할 수 있는 경우이다. 이 선형적 시스템은 비교적 다루기 용이하기 때문에 많은 경우에 관찰하고자하는 복잡한 데이터 또는 시스템을 여러가지 방법등을 통하여서 선형화 시킨다. 역수를 취하거나, 대수함수를 적용하여 선형화하는 것등을 예로 들 수 있다. 이와같은 경우에 데이터를 변환 시키는데 설정된 가정이 완벽하기 어렵고, 근사식을 이용하기 때문에 시스템의 고유상태를 정확하게 나타내주지 못하고, 결과적으로 내재하는 병적인 과정 또는 기전등을 간과하게 될 수가 있다. 더우기 시스템이 고유적으로 비선형적 특성이 불가피한 경우에는 이와같은 선형적 변환 또는 근사의 방법은 전혀 효과를 보기 어렵다.

선형방정식에서는 x축과 y축에서의 값은 각각 1대 1로 대응하고 있다. 그러나 비선형 방정식에서는 이와같지 않은 경우가 발생할 수 있다. 비선형적 방정식은 두가지 경우로 구분할 수 있다. 단조적인 증감을 보이는 경우와 접혀져 있는 경우로 나눌 수 있다. 단조적 함수인 경우에는 항상 증가하거나 감소하기 때문에 선형적 방정식과 마찬가지로 x축의 값과 y축의 값 사이에서는 1대 1의 대응 관계가 존재하게 된다. 그러나 접혀진(folded)비선형적 방정식의 경우에는 극대값 또는 극소값을 갖게된다. 즉 1개의 y의 값에 대하여 두개 또는 그이상의 대응되는 x값을 갖을 수 있게 된다.

많은 비선형적 시스템이 간단한 방정식으로 나타낼어질 수 있다. 가장 대표적인 예인 소위 logistic map에 관하여 살펴보자. 이 방정식은  $y = k * x * (1 - x)$  형태의 포물선으로 주어지게된다. 변수 x의 값은  $0 < x < 1$ 의 범위를 갖으며, 매개변수 k는  $0 < k < 4$ 의 범위를 갖게된다. 이 방정식은  $y = k * x - k * x * x$ 의 형태로 다시 써볼때 선형적인 부분과 비선형적인 부분으로 이루어진 것을 볼 수 있다.  $k * x$ 항은 선형적 부분을 나타내고,  $k * x * x$ 항은 비선형적 부분을 나타낸다. 선택된 k값과 x값을 식에 대입하면 y의

값을 얻을 수 있다. 이 값을 다시  $x$ 의 값으로 하여 식에 대입하면 다시 새로운  $y$ 의 값을 얻을 수 있다.(이때  $k$ 의 값은 변화시키지 않는다.) 이와같이 계산된 값을 다시 입력 값으로 식에 대입하여 다음의 값을 얻는 과정을 반복(iteration)이라고 한다. 이와같은 반복을 계속하여,  $y$ 의 값들을 구하고 이 값을  $x$ 축을 반복횟수로 하여 그래프를 그려보면, 시스템의 동적상태를 나타낼 수 있게 된다. 그리고  $k$ 의 값에 종속되어 그 동태가 극적으로 변화하는 것을 관찰할 수 있다.

한예로 초기조건이  $k=2.5$ 이고,  $x=0.05$ 인 경우에 대하여 방정식을 50번 반복시켜보자, 몇번의 진동과정을 거친후에 시스템은 바로 예측가능한 안정상태로 들어가게되고, 일정한 값에 수렴하게 된다(그림 1.a) 이 경우에는 선형특성이 지배적이기 때문에 시스템은 안정적 상태에 도달하게 된다. 초기값  $x$ 는 그대로 둔채  $k$ 의 값을 3.2로 증가 시킨 경우에는 시스템의 동태의 갑작스런 변화가 발생한다. 시스템의 비선형적 부분의 영향이 증가함에 따라서 이 방정식은 두개의 상태사이에서 진동하게 된다.(그림 1.b) 이와같은 시스템 파라미터의 미세한 변동에 따른 시스템 동태의 갑작스런 변화를 “분기(bifurcation, 分岐)”라고 한다.  $k$ 의 값을 더 증가 시켜서 3.5로 하면 또한번의 분기가 발생하여 시스템의 동태는 4개의 값사이를 규칙적으로 진동하게 된다.(그림 1. c) 이와같은 분기는  $k$ 값의 증가에 따라 더욱 가속적으로 나타나게되어  $k$ 의 값이 일정한 경계값이 도달하면 주기적인 특성은 사라지게되고 마침내 불규칙한 신호처럼 보이는 동태를 나타내게된다. 이와같은 분명한 규칙적인 방정식에 의한 결과임에도 불구하고 불규칙적인 동태를 나타내는 상태를 “혼돈”이라고 하며, 이것은 시스템의 비선형적 특성이 지배적으로 나타났기 때문이다.  $k=3.8$ 인 경우 혼돈의 특성을 나타내는 시스템의 동태를 그림 1.d에 나타냈었다. 이 파라미터의 변화에 따른 시스템의 동태의 변화를 분기도(bifurcation diagram)로 요약하여 나타내면 그림 2와 같다.

위의 logistic map에서도 볼수 있듯이 혼돈의 상태에 도달하기 까지는 여러 종류의 확인가능한 상태를 거치게 된다. 이와같은 확인 가능한 상태는 임상적으로 중요한 의미를 갖을 수 있다. 다음과 같

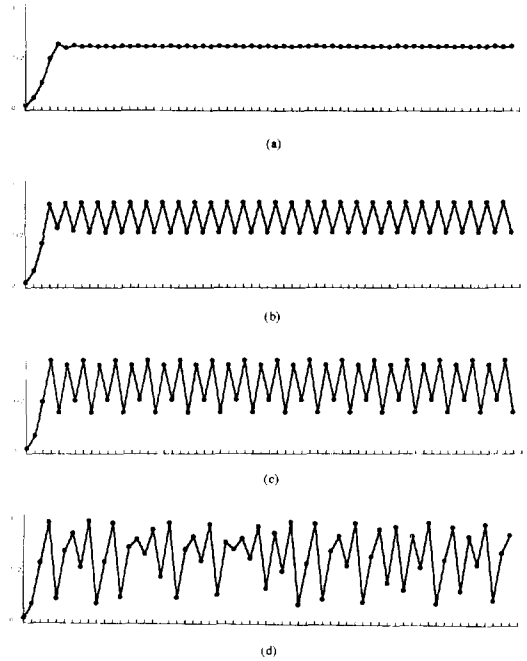


그림 1. 파라미터 “k”의 변화에 따른 logistic map의 동태변화(본문 설명참조)  
(a)  $k=2.5$ , (b)  $k=3.2$ ,  
(c)  $k=3.5$ , (d)  $k=3.8$

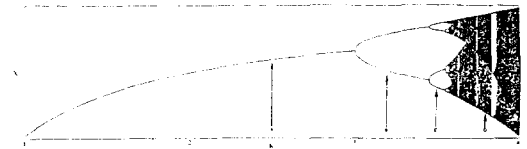


그림 2. Logistic map의 분기도(X축:파라미터 “k”의 값, Y축:100번 반복수행후의 방정식의 값)

은 관상동맥 바이패스 수술을 시행한 환자에 대하여 가상적인 경우를 생각하여 보자. 저온상태의 심장이 멈추어진 상태에서 수술이 시행된 후, (logistic map에서  $k=0$ 인 경우에 해당), 수술후 온도가 정상적으로 회복됨에 따라서 정상적인 주기적 리듬을 회복하게 된다. ( $k=2.5$ ) 그러나 수술후 이튿날 심장의 맥박이 2박동을 주기로 일어나는 심방 이단맥(atrial bigeminy) 상태가 관찰되고 ( $k=3.2$ ), 그다음날 다시 4가지 박동상태를 주기적으로 반복

하는 상태를 나타내다가( $k=3.5$ ) 그 다음날 심방 세동( $k=3.8$ )이 발생하여 죽게 되었다고 하자. 이와같은 과정을 거친다면, 심방 이단맥이 나타나는 경우를 혼돈상태인 심방세동이 나타나기전의 선행 지표로 판단하여 적당한 약물투여 등으로  $k$ 의 값을 줄일 수 있는 조치를 취하여 심방세동의 발생을 방지 할 수 있을 것이다.

#### 4. 혼돈의 특성은 무엇인가.

혼돈적 특성을 보이는 시스템은 주기적특성 또는 불규칙성 특성을 보이는 시스템과 다른 여러가지의 특성을 나타내고 있다. 그중 중요한 특성은 다음과 같다[12].

1) 혼돈은 결정론적(deterministic)이면서 비주기적(aperiodic)이다.

기존의 Newton역학으로 나타내어지는 다른 시스템과 마찬가지로, 시스템의 동태를 제어하고, 나타내는 수학적 방정식들이 존재한다. 즉, 이들 방정식들과 초기 조건만 안다면, 그 이후의 시스템의 정확한 동태를 예측할 수 있다. 그러나, Newton역학적 시스템과는 달리 이것은 그 자신을 반복하는 형태로 나타나지는 않는다. 시스템이 일정한 주기를 갖고 반복하는 경우를 관찰할 수 없다.

2) 혼돈 시스템은 초기 조건(initial condition)에 민감하게 종속(sensitive dependent)된다.

이것은 초기조건의 미세한 차이가 상당한 시간후에 매우 커다란 차이를 발생한다는 것을 의미한다. 예를 들어 그림 3의 경우에 초기값이 0.5인 경우와 0.500001인 두가지 경우의 시스템의 동태를 나타낸 것이다. 두 경우의 동태를 보면 처음은 거의 비슷하게 나가다가, 일정시간이 지나면 달라지기 시작하여 초기조건의 차이가 백만분의 일 정도 밖에 되지 않았음에도 불구하고 서로 발산하게된다. 만약 그 차이가 조금이라도 크면 발산속도는 더욱 빠르게 된다.

소위 주장장의 변환(Baker's transformation)은 초기조건의 민감한 종속을 비유적으로 잘 나타내고 있다. 건포도 빵을 만들기 위해서 밀가루 만족을 하는 경우를 생각해보자. 적당히 반죽된 밀가루에 건포도를 섞을 것이다. 그리고 이 건포도들이 잘 섞이도록 반죽을 계속할 것이다. 반죽과정은 늘렸다 접

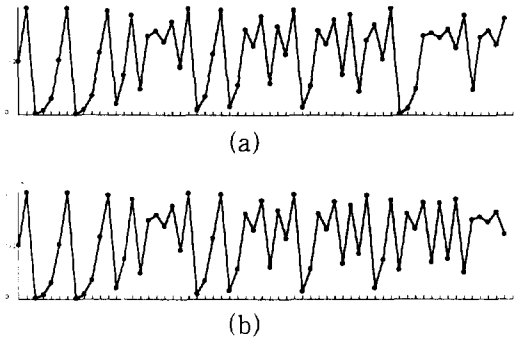


그림 3. 초기값의 차이에 따른 logistic map의 시간에 따른 동태변화 ( $k=3.99$ )  
(a)  $X_0=0.5$ , (b)  $X_0=0.500001$

는 과정을 반복하는 것이다. 이 때, 적당한 반죽후의 건포도들의 위치를 각각의 초기조건에 대하여 비교하여 보면, 처음에는 인접하여 있던 두개의 건포도도 반복된 늘림과 접힘의 과정을 통하여서 매우 다른 위치에 떨어져 있음을 알 수 있다. 실제로 두개의 건포도는 늘림과 접힘의 과정을 통하여서 일반적 시스템에서 발생하는 선형적 발산과는 달리 지수함수적으로 거리가 벌어지게되는 것이다.

비록 이러한 이론이 이미 90여년전에 Poincare에 의하여 기술되었으나, 현대에서의 혼돈 시스템의 초기조건에 대한 민감한 종속성은 1960년대초에 Lorenz에 의하여 재발견되었다고 할 수 있다[5]. 그는 시간에 따른 기후의 변화를 예측하기 위하여 3개 방정식(현재 Lorenz방정식이라고 불려지고 있음)으로 시스템을 모델링 하였다. 초기조건을 컴퓨터에 입력하면, 그이후의 시간의 변화에 따른 상태를 컴퓨터가 계산하여주도록 하였다. 그러던중, 몇 달간의 기상변화를 관측하기 위하여 이미 프린트된 중간 결과를 초기 조건으로 대신 입력하였다. 이것은 그때까지 계산되는 시간을 절약하기 위함이었다. 프로그램을 수행 시킨후의 결과를 전의 것과 비교하여보니 매우 큰차이가 나타남을 관찰하였다. 즉 데이터가 처음에는 잘 맞아 들어가다가 나중에는 각각 다른값을 가지며 서로 발산하는 것을 관찰하였다. 나중에 그는 컴퓨터는 내부적으로 6자리수로 계산하고, 자신이 입력 시켰던것은 3자리숫자였던것을 발견하고, 그것이 커다란 차이의 원인임을 확인 하였다. 이와같은 경험을 토대로 그는 현재의

상태를 정확하게 측정하는데에 한계가 있는 이상, 장기간의 기상 예측은 불가능하다는 결론에 도달하였고, 시스템의 한순간에서의 미세한 변화가 (홍콩에 있는 나비의 날개짓이) 차후에 커다란 시스템 동태의 변화를 (뉴욕에서의 폭풍을) 야기할 수 있다는 나비효과(butterfly effect)를 확인하였다.

3) 혼돈 시스템의 동태는 상대적으로 좁은 영역으로 제한되어 있다.

비록 혼돈시스템의 외형적 동태가 불규칙적인 것처럼 관찰 된다고 하더라도, 이것은 무한대까지 퍼져 있지 않고, 상대적으로 좁은 영역에 제한되어 있다. 예를 들어 주방장의 변환의 경우 아무리 오래동안 반죽을 하더라도 건포도는 밀가루 반죽안에 남아 있을 것이다. 늘림의 과정에의하여서 퍼지겠지만 접힘의 과정을 통하여서 다시 좁은 영역으로 돌아오게 된다. 즉 비선형적 시스템중 혼돈의 특성을 나타내는 경우는 이와같은 늘림과 접힘의 특성을 갖게되고 그로 인하여, 그 동작영역은 제한되어 있게된다.

4) 혼돈시스템의 동태는 독특한 형태를 지니고 있다.

혼돈시스템의 동태는 영역적으로 제한되어 있음과 동시에 독특한 패턴을 갖고 있다. 쉬운 예는 커피속에 섞이는 크림의 맴돌이, 방안에서 올라가는 담배연기의 패턴, 흐르는 물이 급류로 바뀔때의 패턴 같은 것들이다. 이들 패턴은 종종 동태가 발생하는 영역인 “밴드”와 동태가 전혀 발생하지 않는 영역인 “금지구역(forbidden zone)”으로 형태로 나누어져 구성된다. 건포도빵의 경우 건포도가 골고루 퍼지지 않고 층을 이루어 나타나는것은 이경우에 해당하며, logistic map에서는 그 패턴이 포물선 형태로 나타나게 되는 것이다. 즉 이와 같은 독특한 패턴을 갖는 경우에는 이것만으로 결정적으로 그 시스템이 혼돈계라고는 할수는 없어도, 그 시스템이 불규칙 시스템이 아니라 혼돈적 시스템일것이라는 가정을 할수 있게 된다.

## 5. 혼돈적 특성을 확인하는 분석적 방법들

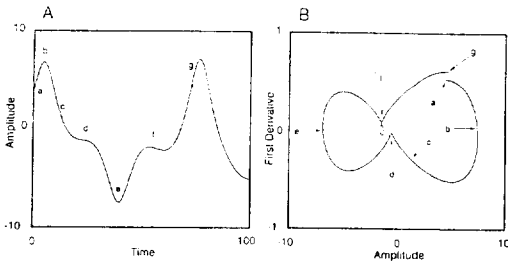
혼돈적 특성을 나타내는 시스템에 관한 연구는 다음의 세가지 단계로 나누어 볼수 있다. 첫번째의 단계는 시스템이 혼돈계인지를 확인하는 단계이다.

이 과정에는 여기에서 소개하는 방법들을 이용하여 가능하다. 두번째의 혼돈적 특성이 있음이 확인 되면, 그것을 수학적으로 모델링하는 것이다. 첫번째의 과정에서는 단지 혼돈계인것을 확인 한것일뿐이므로 그 이전에 관한 적합한 수학적 모델이 필요하게 된다. 그러나, 이 모델을 도출하는데에는 일정한 방법이 있지 않고, 경우에 따른 변화가 다양하기 때문에 경험적 특성을 지니고 있어 기술이라기보다는 예술에 가깝게 느껴지기도한다. 세번째의 과정은 이 모델을 실제의 데이터를 이용하여서 확인하는 과정이다. 이러한 과정을 통하여서, 도출된 모델들은 여러가지 환경에 대한 생체 시스템의 동태를 분석하는 등의 목적으로 다양하게 활용될 수 있다. 여기에서는 이러한 단계적 과정중에서 분석하고자 하는 생체시스템이 혼돈계인지를 확인하는 방법들에 대하여서 살펴보겠다.

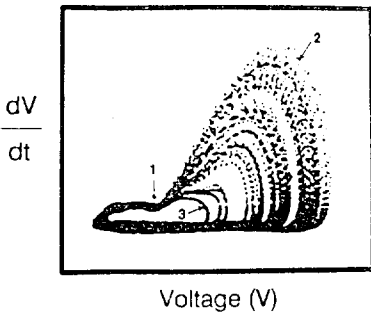
대부분의 경우 우리는 불행히도 분석하고자하는 생체 또는 인체 시스템의 내부적 기전을 수학적으로 정확하게 표현할 수 있을 정도로 알고 있지 못하다. 우리가 얻을 수 있는 것을 심전도, 혈압, 뇌전도와 같은 단지 현상적인 측정데이터이다. 이 측정된 데이터를 통하여서 분석하고자하는 시스템 내부의 기전을 추론하여야한다. 시스템의 비선형적 특성 또는 혼돈적 특성을 분석하는 가장 보편적인 방법은 이산적 데이터(discrete data)인 경우에는 앞절의 설명과정에서 보여주었던것과 같은 분기(bifurcation) 특성을 분석하는 것이다. 그러나 실제의 경우 측정되는 데이터들이 일견 불규칙 신호처럼 보이기 때문에, 이와 구별하기 위하여서는 특별한 방법들이 필요하다. 여기에서는 혼돈적 특성을 분석하는데 유용하게 사용되고 있는 방법들에 대하여 소개한다.

### 1) 위상평면도(Phase Pland Plot)

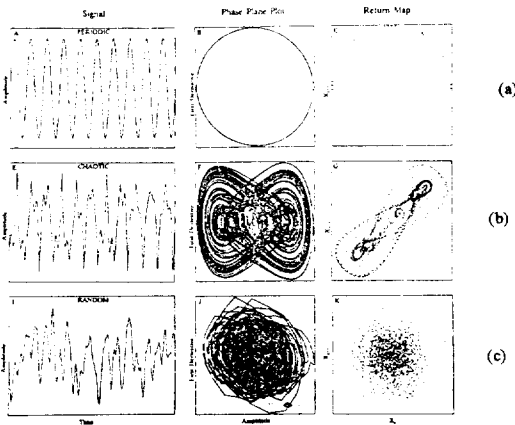
위상 평면도는 상태공간상에서 동력학적 시스템의 표현이다. 이것의 전형적인 예는 가로축으로는 위치 또는 신호의 값을 표시하고 세로축으로는 속도 또는 그 신호의 일차미분값을 표시한 그래프의 형태를 갖는것이다. 그림4에 전형적인 혼돈계의 위상평면도를 보여주고 있다. 그림 5는 실제의 심장의 퍼킨지 섬유에서 측정된 활동전위의 도달을 위상평면도에 나타낸 것이다. 이와같은 형태의 그래프는 좌심실의 기능을 평가하기 위하여서도 많이



**그림 4.** (a) 혼돈신호의 시간축에 대한 표현(X-축: 시간 Y-축:진폭) (b)같은 신호의 위상 평면도 표현. (X-축:진폭, Y-축:진폭의 1차미분값). (a)(b)그래프상의 점(a-g)들은 두 그래프간의 같은 순간의 데이터를 나타낸다.



**그림 5.** 심장의 퍼킨지 섬유에서 나타나는 활동전위 도달시간의 위상평면도상의 표현

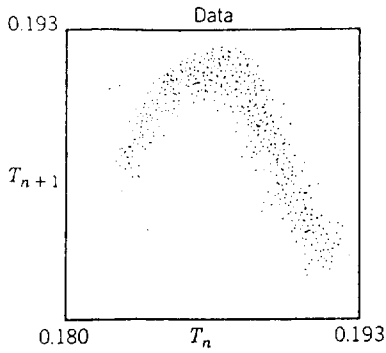


**그림 6.** 주기신호, 불규칙신호, 혼돈신호의 분석.  
 (a)주기적신호에 대한 평면도 및 회귀도.  
 (b)혼돈신호에 대한 위상평면도 및 회귀도.  
 (c)불규칙 신호에 대한 위상평면도 및 회귀도.

사용되고 있다. 좌심실벽의 응력을 x축에 수축속도를 y축에 표시하여 이 관계로부터 수축도를 간접적으로 얻을 수 있다. 이차원 평면상의 상태 공간의 표현이 가장 일반적인 경우이나, 위치, 속도, 가속도를 각각 한축에 나타내는 형태로 하여 3차원 공간에 표현할 수도 있다. 위상평면도 상에서의 주기적인 신호는 같은 과정을 반복적으로 수행하기 때문에 중첩되어 나타나고(그림 6, a), 불규칙신호의 경우에는 일정한 정형이 없이(그림 6,b) 나타나지만, 혼돈계인 경우에는 독특한 패턴을 갖고 나타나게 된다.(그림 6.c) 앞의 예에서 보았듯이 두가지 패턴이 혼돈계에 나타나는 것을 알수 있다. “밴드”의 부분은 토성의 띠와 같이 거의 중첩되지 않는 궤적의 집합을 나타내고, “금지구역”은 인접 밴드들간의 빈 공간을 나타낸다. 이 방법의 가장 큰 단점은 잡음에 상당히 민감하다는 것이다. 1% 정도의 작은 잡음도 위상평면도의 구조를 심하게 변형시킬수 있게된다. 따라서 측정 과정에서 잡음은 최대한으로 제거되어야한다. 잡음을 제거하기 위하여 필터링 방법을 사용할 수도 있겠으나 이것이 오히려 내재적인 혼돈적 특성의 표출을 막을 수도 있다.

2) 회귀도(Return Map)

회귀도는 위상평면도와 비슷한 특성을 지니고 있다. 단지 데이터가 이산적(discrete) 신호 이거나 또는 연속적 신호가 표본화 되어 이산적 신호화 된 것이 다르다. 이 회귀도는 시 계열(time series)의 주어진 표본 값을 가로축에 다음표본의 값을 세로축에 표시하여 관계를 나타낸다. 이들 표본간의 시간적 차이를 지연(lag)라고 하는데 이 시간적 지연이 측정된 데이터의 잡음의 영향을 감소 시켜주는 역할을 하게되어, 위상평면도 보다는 잡음에 덜 민감하게된다. 이와같은 특성 때문에 신호가 필터링 될수 없는 경우에 유용하게 사용할 수 있다. 이 회귀도는 위상평면도와 비슷한 특성을 나타내고 있다.(그림 6) x-축은 위치 또는 신호의 측정값등 위상 평면도와 같은 값을 나타내고 있으며, y-축도 서로 상관관계를 갖고 있다.(위상평면도에서는 dx/dt이고, 회귀도에서는 x+dx/dt이다.) Shaw는 혼돈계의 분석의 예로 수도꼭지에서 떨어지는 물방울의 특성을 이 회귀도를 이용하여서 분석하였다.[14] 수도꼭지에서 떨어지는 물방울은 바닥에 떨어지는 소리로 그순간을 알수 있는데, 처음에 그

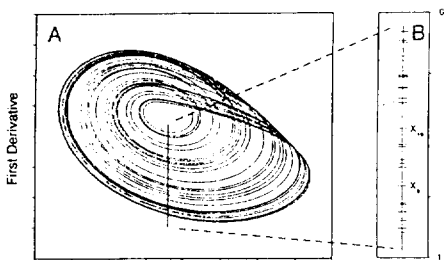


**그림 7.** 수도꼭지에서 떨어지는 물방울의 시간 간격에 대한 회귀도 상의 표현(단위:msec)

간격이 클때에는 주기적으로 떨어지다가, 조금씩 그 속도를 증가시키면 어느 일정한 점을 지나서는 떨어지는 간격이 긴 간격과 짧은 간격이 주기적으로 반복되어 나타나는 것을 알 수 있다. 조금더 흐르는 속도를 증가 시키면 물방울간의 떨어지는 간격이 불규칙적으로 들리는 상태에 도달한다. 이때 떨어지는 물방울간의 간격과 다음번의 간격과의 관계를 회귀도를 통하여서 분석하여보면, 그림 7과 같이 내재적인 기전이 불규칙적이라기보다는 혼돈적이라는 뚜렷한 질서를 발견하게된다. 이와같이 간단한 회귀도의 방법으로 겉으로는 불규칙하게 보이는 시스템이 일정한 구조를 갖고 있음을 분석할 수 있다.

### 3) Poincare의 단면(sections)

앞에서 설명한 위상 평면도가 뚜렷한 결과를 제공하여주지 못하는 경우에는 이 보조적인 방법을 이용할 수 있다. 이방법은 위상 평면도를 그 궤적들의 방향과 수직인 방향으로 절단하여 그단면에서의 특성을 분석하는 것이다.(그림 8) 절단선상의 각점



**그림 8.** Poincare의 단면에 의한 분석

들은 한개의 궤적에 해당된다. 따라서, 각점들간의 상호관계는 각 궤적의 상호 관계를 요약하여 나타낼 수 있다. 이 점들의 간격으로부터 인접한 궤적간의 특성을 나타내주는 새로운 그래프를 그릴 수 있다. 가끔씩 이방법이 원래의 위상평면도에서는 잘 관찰되지 않는 특성을 나타내 줄때도 있다. 이 방법은 3차원적 궤적을 분석하기 위하여서도 이용될 수 있으면 그때에도 한개의 궤적이 절단면상에서 한개의 점으로 나타나게 된다. 이 점들의 이차원 평면상에서의 관계를 분석하여 각 궤적들간의 상호관계로 효율적으로 분석할 수 있다.

### 4) Lyapunov지수(exponents)

이 Lyapunov의 방법은 앞에서 설명한 도식적 방법과는 달리 대수적방법으로 시스템의 특성을 분석한다. 앞에서 설명한 바와 같이 혼돈계는 초기조건에 민감하게 종속되어 있다. 이 초기조건에 대한 민감한 종속성은 상태공간상에서 인접한 궤적이 시간이 지남에 따라 멀리 떨어져 발산하게 되는 경우에 해당된다. 건포도빵의 예에서 두 개의 인접한 건포도가 초기에는 매우 가깝게 붙어 있었으나, 반죽을 함에 따라서 점차 멀어지게 되는것도, 초기조건에 대한 지수적 발산의 한예이다. Lyapunov지수는 이러한 초기조건의 차이가 벌어지는것을 정량화하여 나타낸것이라고 할수 있다.[10] 이 Lyapunov지수의 크기는 시스템이 얼마나 혼돈적인가를 나타낸다고도 할 수 있다. 즉, 그 값이 크면 클수록 더 혼돈적 특성이 강하다고 할 수 있다. 예를들어 3차원 시스템에서, 주기적인 신호는 Lyapunov가 0이되어 모든 궤적이 수렴하지도 않고 발산하지도 않으며, 중첩되어 같은 궤적위를 반복적으로 지나게 된다. 불규칙신호의 경우에도 역시 Lyapunov지수는 0의 값을 갖게되는데 이것은 장기간을 두고볼 때 불규칙 신호의 경우에는 궤적의 수렴과 발산이 같은 정도로 일어나기 때문이다.

반면에 Lyapunov지수가 양의 값을 갖는 경우는 초기조건에 대하여 민감하게 종속된다는 것을 나타내며, 이 경우 거의 예외 없이 혼돈계에 해당된다. 그러나 이 Lyapunov지수의 단점은 측정하기가 쉽지않다는 점이다. 이 지수값을 계산하기 위하여서는 현재의 알고리즘으로는 매우 많은분량의 데이터가 요구되고 있다.(1,000 또는 10,000 단위의 주기) 계산시간이 제한적인 요소임과 동시에 데이터의 수

집기간동안에 시스템의 상태가 안정적으로 같은 상태를 나타내고 있어야하는데 생체 시스템에서는 그와같은 조건을 만족시키기가 특히 어려우며, 실질적으로는 거의 불가능하다. 임상적으로 나타내는 심세세동(심장마비)의 경우에 예를 들어 보자. 한 주거나 두 주기내에 Lyapunov지수가 계산될 수 있다면 그사이에는 심장의 상태가 거의 변화하지 않고 있다고 가정할 수 있다. 그러나 정확한 Lyapunov지수를 계산하기 위하여 10내지 30주기의 데이터를 이용하는 경우에는(이정도의 데이터로도 정확한 Lyapunov 지수의 계산에는 불충분하지만) 심장 근육은 점차 빈혈의 상태에 도달하여 그 내재적 동태는 원래 가정한 상태와 다르게 심하게 변화하게 되는것이다.

5) 상관차원(Correlation Dimension)

혼돈계 시스템의 특성은 회귀도, 또는 Poincare 단면을 통하여서 얻은 동태의 패턴에서 일반적으로 불규칙 신호로부터 얻은 동태의 패턴과는 달리 공간적으로 구조적 패턴을 지니고 있어 이것을 정량화 할 수 있다. 이 구조적 특성의 대표적인 예는 자기유사성(self similarity)을 갖고 있다는 것이다. 이 자기 유사성은 측정 척도의 변화에도 그모습이 변화하지 않는 특성을 나타내는 것이다. 쉬운예로 구름의 경우를 들수있다. 구름의 경우는 커다란 구름의 모습과 작은 구름의 모습이 유사해서 그 모양만으로는 이 구름이 얼마나 멀리 떨어져 있는지 구분하기 어렵다. 이와같은 자기유사성이 혼돈계 시스템의 회귀도나 Poincare 단면상에 나타나게 된다. 즉, 패턴의 이틀을 확대하여보면 전체의 모습과 유사한 모습을 발견할 수 있고, 그러한 특성이 여러단계의 척도 또는 배율 변화에도 나타나게되는 것이다. 이와같은 특성을 정량화하는 방법으로 대표적인것이 다음과 같은 상관차원(correlation dimension)을 계산하여보는 것이다[1, 8].

측정된 시열계 데이터  $x_i$ 로 부터  $m$ 차원 공간상의 벡터  $y_i$ 를 다음과 같이 구성한다.

$$y_i = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+(m-1)r}),$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$m$ 차원 공간상에 분포한 전체  $n$ 개의 점들중에서 두점의 간격이  $e$ 보다 작은 점들의 쌍을 세어서 그것을 비율로 다음과 같이 나타낸다.

$$C(e) = (\text{두점 } y_i \text{와 } y_j \text{의 거리가 } e \text{보다 작은 쌍의 수})$$

이 때 두점간의 간격을 변화 시키면서 포함되는 점의 쌍의 수는 다음과 같이 나타내어질수 있다.

$$C(e) = k \cdot \exp(v)$$

즉 상관관계를 나타내는 적분값  $C(e)$ 는 간격  $e$ 의 지수승으로 나타내어진다. 이 때의 지수  $v$ 를 상관차원이라고 한다. 이것은 그래프형태로 표현된 패턴에서의 구조적 특성을 정량화하는 효율적 방법으로 이용할 수 있다. 불규칙신호인 경우 내재적인 공간적 구조가 없기 때문에 이 상관차원의 값은 매우 크게 나타난다. 그리고 주기적인 신호들은 일반적인 차원과 같은 정수 형태의 값을 갖게된다. 그러나 혼돈적 시스템인 경우에는 0.583, 2.3과 같은 정수가 아니라 소숫점 이하까지 표시되는 실수의 값을 갖게된다.

6) 스펙트럼분석(Spectral Analysis)

시스템이 혼돈계임을 확인 하는 과정에 스펙트럼 분석방법이 사용되기도 한다. 특히 이 방법은 주기적인 신호를 불규칙신호와 혼돈적 신호로부터 분명하게 구별할 수 있다.[13] 분석된 신호의 스펙트럼을 좁은 주파수 영역대에만 에너지가 집중되어 큰 진폭의 스파이크를 나타내는 경우와 에너지가 넓은 주파수 영역대에 연속적으로 퍼져 있는 경우로 나누어볼수 있다. 전자는 일반적으로 주기적인 신호의 전형적인 스펙트럼상의 특성이므로 혼돈딴 불규칙 신호로부터 구별되어 질수 있을 것이다. 스펙트럼이 후자의 경우처럼 연속적으로 나타나는 경우는 불규칙 신호인 경우와 혼돈계인 경우가 해당된다고 볼수 있는데, 이들을 스펙트럼상에서의 형태만으로 명확하게 판단하기는 어렵다. 단지 스펙트럼 상에서 그 패턴이  $1/f$ 의 특성을 보이는 경우 혼돈계 또는 비선형적 시스템의 유력한 증거라는 가설이 제기되고 있다. 또한 시스템의 분기의 과정을 거쳐서 그 동적 패턴이 변화 해나가는 경우 스펙트럼 상에서 그 패턴을 뚜렷하게 관찰할수 있다. 스펙트럼 분석방법은 잡음의 영향을 크게 받지 않는 장점이 있으나, 근본적으로 선형적인 분석방법이기때문에 비선형적 시스템 분석에는 한계가 있다.

7) 복합적 분석(Integrated Analysis)

표 1에 지금까지 열거한 여러가지 분석방법의 혼돈계의 여러가지 특성 검출에 관한 상대적인 능력을 요약하였다. 일반적으로 어느 한가지 방법으로 혼돈적 신호를 확인하기 불충분하기 때문에 열거한



**표 1. 혼돈적특성을 검출하기 위한 분석적 방법들의 능력비교**

	비주기성	민감한 종속성	영역 제한성
위상평면도	O	O	O
회귀도	O	O	O
Poincare 단면	O	O	O
Lyapunov 지수	X	O	X
상관차원	X	X	O
스펙트럼	O	X	X

방법들을 조합하여 사용하게 된다.

현재로서는 앞에 열거한 방법들중에서 그래프를 이용한 도식적 방법들이 보다 효과적인 방법으로 이용되고 있으나, 짧은 시간내에 Lyapunov 지수를 정확하게 계산할 수 있는 효율적인 방법이 개발된다면 혼돈적 시스템의 분석에 가장 효율적인 방법으로 사용될 것으로 예상된다.

## 6. 의공학 분야에서의 혼돈이론의 응용

여기에서는 의공학분야에서 혼돈이론이 응용되고 있는 경우를 예를들어 설명해보기로 하자.

### 1) 심박동수의 비선형적 특성분석

정상상태 및 이상상태에서의 심장의 동태는 매우 복잡하게 나타나고 있다. 임상적으로 측정되는 데이터들은 복잡한 동적특성을 나타내기 때문에 비선형역학에서 발전한 혼돈이론으로 표현하기에 적합하다. 정상적 상태에는 심장의 박동이 규칙적이고 주기적으로 떨어지라고 일반적으로 생각하고 있는 것과는 달리 매분당의 박동수를 위상평면도에 나타내어보면, 주기적인 특성이 나타나지않고 혼돈적 시스템에서 나타나는 독특한 패턴을 보이고 있다. [9] 이것은 정상적인 심장의 동적상태가 혼돈적이라는 것을 의미할 수 있다. 이러한 정상적 심장에서의 심장박동간 간격의 혼돈적 특성의 현상은 심박동수를 제어하는 자율신경계에 의한것으로 유추된다. 이 자율 신경계는 교감 신경과 무교감 신경의 두 부분으로 나누어져 이루어져 있다. 교감신경의 자극은 심박동수를 증가시키는 작용을하고, 부교감신경은 그와 반대의 작용을 하고 있다. 이 두개의 신경의 작용은 logic map에서의 첫번째항과 두번째항과 비슷한 역할을하여 심박수의 동적상태가 혼

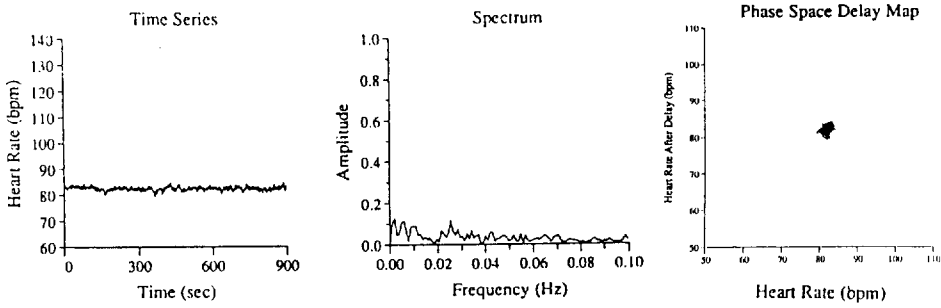
돈적 특성을 나타낸 것으로 추측되고 있다.

이와같은 특성은 그림 9에 보인 비정상적인 경우와 비교하여 볼때 더욱 뚜렷함을 알수 있다. 그림 9는 심장마비를 일으키기 13시간전과, 8일전, 그리고 정상적 심장상태에서의 심박동수의 변화에 대한 시계열 데이터와 스펙트럼과, 위상평면도를 나타낸 것이다. 여기에서 보면 정상적인 경우에 심박동수의 변화 패턴이 거의 불규칙하게 변화하고, 스펙트럼상에서는  $1/f$ 의 특성을 갖으며 넓은 영역에 분포하고 있으며, 위상평면도에서는 “밴드”와 “금지구역”을 보이는 혼돈시스템의 패턴을 보이고있다. 그러나 심장마비 8일전의 데이터는 심박동수가 거의 주기적인 울동을 갖고 진동하고 있음을 볼 수 있다. 이것은 스펙트럼상에서 커다란 스파이크로 나타나고, 위상 평면도에서는 중첩된 궤적으로 나타나고 있다. 더우기 심장마비 13시간전의 데이터는 박동수가 거의 일정하게 유지되고 있으며, 스펙트럼과 위상평면도에서도 그 특성을 나타내고 있음을 볼 수 있다. 여기서의 결과를 볼때 정상적인 심장의 경우에는 혼돈적으로 변화하는 특성을 갖게되고 그러한 특성이 약화되는 것은 심장의 정상적 기능이 저하되어가는 것으로 분석될 수 있음을 알수 있다.

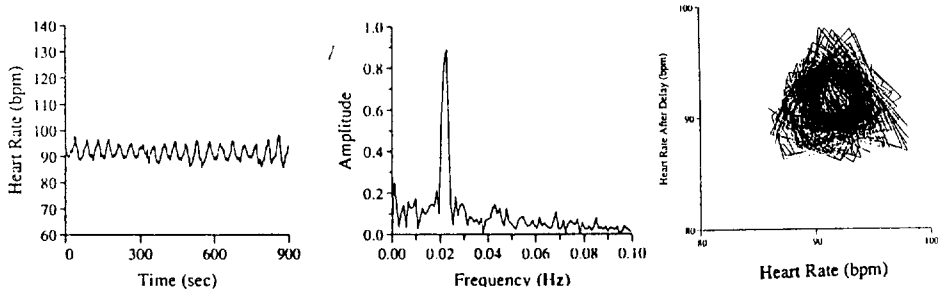
### 2) 뇌의 혼돈적 특성분석

정상적인 경우의 뇌의 활동상태와 간질등 뇌질환이 있는 경우에 대하여 뇌파신호를 기록하고, 이 데이터들을 분석하여 뇌의 기능 상태를 분석할 수 있다. 뇌파신호는 일견 보기에 불규칙 신호들처럼 보이나, 위상평면도 및 상관차원을 계산하여 분석하여 보면 혼돈적 특성을 나타내고 있음을 알수 있다. [2] 표2에는 뇌의 여러가지 상태에서 기록된 뇌파신호로부터 앞에서 소개한 방법으로 상관차원을 계산한 결과를 보여주고 있다.

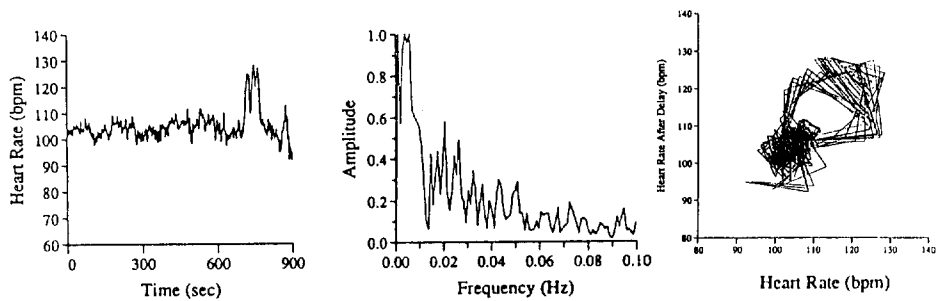
깨어있는 상태와 REM(Rapid Eye Movement : 꿈을 꾸는 수면상태)수면상태에서는 혼돈적 특성을 관찰하지 못하고 상관차원을 계산할 수 없었으나, 나머지 뇌의 기능적 상태에서는 혼돈적 특성을 위상평면도에서 관찰할 수 있으며, 상관차원을 계산해 낼 수 있었다. 2단계의 수면상태와 4단계의 수면상태에서는 실험대상자들에 대하여 각각 비슷한 상관차원 값이 계산되어져 나와 그 유효성을 관찰할 수 있으며, 간질의 소발작시에는 이 값이 크게



(a) 심장마비를 일으키기 13시간전의 심장 박동간격의 변화특성.



(b) 심장마비를 일으키기 8일전의 심장박동 간격의 변화특성.



(c) 정상적 상태에서 심장박동간격의 변화 특성

그림 9. 심장상태에 따른 심장박동간격의 동태분석.

표 2. 뇌의 기능 상태에 따른 상관차원의 변화

뇌의 기능적상태	상관차원
깨어있는 상태	계산불가능
2단계 수면상태	5.03±0.07 5.0±0.1
4단계수면상태	4.05±0.05 4.08±0.05 4.4±0.1
REM수면상태	계산불가능
간질(소발작)	2.05±0.09

차이 나는 것을 볼 수 있다. 위상평면도상에 나타나는 패턴의 구조적차이와 이것을 정량화한 상관차원을 이용하여서 뇌의 기능적 활동상태를 구별할 수가 있고, 간질등의 질환의 가능성을 진단하는 방법으로 이용할 수 있음을 볼 수 있다. 이러한 분석방법을 통하여서 우리는 뇌의 정상적인상태 및 병리학적인 상태에서 복잡한 형태이지만 결정론적인 역학이 존재함을 유추할 수 있다.

### 3) 전염병발생 패턴의 모델링

대량의 예방접종이 실시되기 이전의 전염병의 발생 패턴은 매우 독특한 패턴을 지니고 있다. 그예로

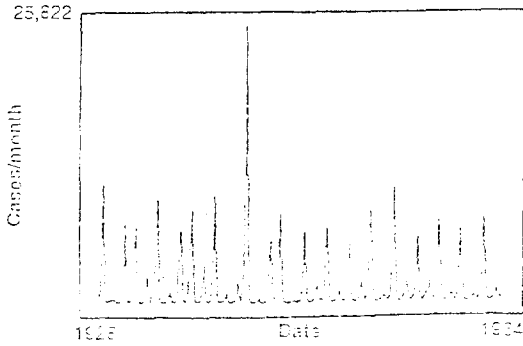


그림 10. NewYork에서 홍역의 매달별 발생건수

서, 1928년부터 1964까지의 New York에서의 홍역의 매달별 발생건수의 그래프를 보면 그 발생 패턴의 특성을 살펴볼 수 있다. (그림10) 홍역과 같은 전염성 질환의 경우 실내에 모여 있어 접촉율이 높은 경우에 주로 발생건수가 많이 나타나고 있으며, 매년별로 변화하는 그 발생 패턴이 외견상으로는 불규칙한 잡음과 같은 형태로 보인다. 그러나 조금 자세히 보면, 발생건수가 적은해 다음에는 발생건수가 급격히 증가하고, 한해에 발생건수가 많았으면 그 다음해는 발생건수가 줄어드는 패턴이 부분적으로 있는 것을 볼수있다. 또 다른 부분에서는 두 해정도 발생건수가 많다가, 다음해에는 발생건수가 현격하게 줄어들기도하고, 두해정도 발생 건수가 미약하다가 다음해에 매우 발생건수가 크게나타나기도한다. 부분적으로는 다소 주기적인 성격이 있는것 같기도 하지만 전체적으로 뚜렷한 규칙을 발견할수는 없고, 부분적으로 주기적 성질을 나타내어도 발생건수가 많은 해에도 발생건수에서 차이가 있어서 일정한 규칙을 쉽게 도출한다는 것은 불가능해보인다. 실제로 홍역의 발생건수에 영향을 미칠수 있는 요인은 인구의 증가율, 기후등 매우 여러가지가 있을 것이다. 그러나 이와같은 전염병의 발생패턴이 불규칙하다고 인정하여버리면 우리는 다음해의 발생건수를 전혀 예측하기가 불가능할 것이다.

여기서 매년발생하는 발생건수사이의 구조적 관계를 어느정도 파악할수 있다면, 다음해의 발생건수를 어느정도 예측하여줄 수 있는 등 여러가지 이득을 얻을 수 있을 것이다.

Schaffer 등은 그림 10에 보인 홍역의 경우와 같은 발생패턴을 보이는 여러가지 전염병의 동태를

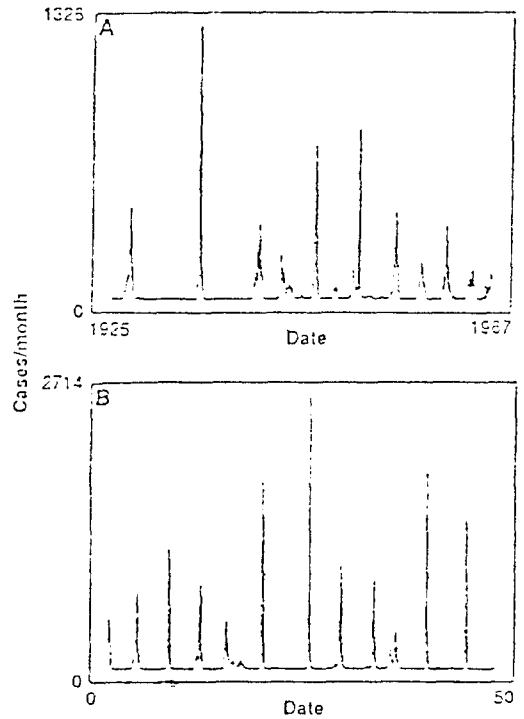


그림 11. 홍역의 발생건수(Bornholm, Denmark)에 대한 시뮬레이션  
(a)연도별로 기록된 발생건수  
(b)시뮬레이션 결과

혼돈적 역학에 의한것으로 해석하고 있다.[6] 혼돈 시스템의 특성이 내부적으로는 일정한 규칙에 의한 것임에도 외부적으로는 불규칙적으로보이는 이른바 "무질서속의 질서"의 특성을 나타내고 있으므로 전염병의 발생패턴에 대하여서도 적용하여 볼 수 있겠다. 그림 11에는 이와같은 이론의 타당성을 보이기 위하여 실제의 데이터와 컴퓨터로 시뮬레이션한 데이터를 비교하여 보였다. 이 그래프에서 보듯이 그 발생패턴이 비록 매년별로 일치하는 수준까지는 모델링이 되지 않지만, 전체적 발생패턴을 보면 거의 같음을 알수 있다. 즉 전염병의 발생 패턴이 혼돈적 특성에 의하여서 발생할 수 있음을 볼수 있다. 실제로 앞에서 설명한 혼돈적 특성을 파악하는 방법중 Lyapunov지수와 상관차원을 이용하여서,

정량적으로 매년별로 기록된 발생건수에 대하여 그 특성을 분석하여 본 결과 잡음에 의하여서 그 값이 정확하게는 계산되지 않았지만, 홍역, 이하선

염, 풍진등의 전염성 질환에서는 혼돈적 특성이 확인되었다. 이와같은 결과에 대하여 아직 토론의 여지가 남아 있지만 여러가지 형태로 응용될 수 있다. 매년발생하는 건수간의 구조를 파악하여 다음해의 발생건수를 어느정도 예측하여 변화의 범위를 축소시킬 수 있으며, 해당 질병에 대한 예방접종의 효율 분석등에도 이용될 수 있다.

## 7. 결론

혼돈이론은 여지까지 불규칙하다고 간주하고, 통계적 접근방법이외의 분석적방법의 접근이 어려웠던 시스템들에 대하여서 새로운 접근 방법을 제공하여주며, 보다 많은 시스템에 대하여 구조적 특성을 파악하게 하여주고 그 내부적 기전을 분석할 수 있게하여준다. 이러한 혼돈적 특성은 근본적으로 시스템의 내부적 비선형성에 의하여 근거한 것으로 볼수 있다. 특히 생체시스템의 경우에는 그 내부적 발생기전이 근본적으로 선형적 특성을 보이는것보다 비선형적 특성을 나타내는 것이 많기 때문에 이와같은 접근방법은 지금까지 분석이 불가능하게 여겨졌던 생체시스템의 분석 및 의공학의 여러분야들에 다양한 형태로 적용될 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌

[ 1 ] T.S.Parker, L.O.Chua, "Chaos : A Tutorial for Engineers.", Proc. IEEE, vol. 75, no. 8, pp. 982-1008, Aug, 1987.  
 [ 2 ] A.Babloyantz, A.Destexhe, "Low-dimensional Chaos in Instance of Epilepsy", Proc. Natl. Acad. Sca. USA, vol. 83, pp 3513-3517, May, 1986.  
 [ 3 ] T.A.Denton, G.A.Diamond, R.H.Helfant, S.Khan, H.Karagueuxian, "Facinating Rhythm:a Primer, on Chaos, Theory and Its Application to Cardiology", American Heart Journal, vol. 120, no. 6 pp. 1419-1440 Dec., 1990  
 [ 4 ] J.Gleick, "Chaos : Making a New Science", Now York: Viking Penguin Inc., 1987.

[ 5 ] E.N.Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow", J.Atmospheric Sci., vol.20, no. 2, Mar., 1963.  
 [ 6 ] R.Pool, "Is It Chaos, or Is It Just Noise", Science, vol. 1.243, pp. 25-28, Jan., 1989.  
 [ 7 ] R.Pool, "Is It Healthy to Be Chaotic", Science, vol. 1.243, pp. 604-607, Feb., 1989.  
 [ 8 ] P.Grassberger, I. Procaccia, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", Physica D.vol. 9, pp. 189-208, 1983.  
 [ 9 ] A.L.Goldberger, D.R.Rigney, B.J.West, "Chaos and Fractal in Human Physiology", Scientific American, pp. 35-41, Feb, 1990.  
 [10] J.P.Eckmann, S. O. Kamphorst, "Liapunov exponents form time series", Physical Review A., vol, 34, no. 6, pp. 4971-4979, Dec., 1986.  
 [11] K.Aihara and G.Matsumoto, "Chaotic Oscillation and Bifurcation in Squid Giant Axons", Chaos, Princeton Univ. Press, pp. 257-269, 1986.  
 [12] D.Gulick, "Encounters with Chaos", McGraw-Hill, Ins., 1992.  
 [13] N.B.Tufillaro, T. Abbott, J.Reilly, "Non-linear Dynamics and Chaos", Addison-Wesley Inc. 1992.  
 [14] J.P.Crutchfield, J.D.Farmer, N.H.Packard, R.S.Shaw, "Chaos", Sci. Am. vol. 255, pp. 46-57, 1986.



**박광석(朴光錫)**

1957년 5월 21일생. 1980년 서울대 공대 전자공학과 졸업. 1982년 동 대학원 의공학과 졸업(석사). 1985년 동 대학원 의공학과 졸업(공학). 1985~88년 서울대 의과 대학 전임강사. 1987~88년 미국 UCLA 방사선과 PACS 연수. 1990~91년 대한의용생체공학회 총무이사. 현재 서울대 의대 의공학교실 조교수.