

## 밀폐된 계층인구에 있어서 유행병 모델

정형환\* · 주수원\* · 이광우\*\*

=Abstract=

### On an Epidemic Model in a Closed Stratified Population

Hyeng-Hwan Chong\*, Soo-Won Joo\*, Kwang-Woo Lee\*\*

Of the assumptions commonly used in continuous infection model, the least likely to be even approximately true in large population, is that of homogeneous mixing.

In this paper, We investigate a model for the spread of infection amongst a population which is divided into classes, such that the individuals of each class mix homogeneously amongst themselves, but mix to a lesser degree with individuals of other class. The stochastic model in this form is intractable and approximations are made, yielding results in reasonable agreement with simulation trials.

#### 1. 서 론

여태껏 유행병 모델은 동질적 혼합인구(homogeneously mixing population)로 가정하여 연구되었다. 여기서는 계층(class)으로 나누어진 사람사이에서 전염병이 퍼지는 모델을 연구하였다. 어느 계층의 사람은 그들사이 잘 섞이고, 다른계층 사이에는 섞이는 혼합 빈도가 낮다. 계층을 친구 그룹이라든지, 혹은 일정한 지역사회내에 개인의 모임으로 생각할수 있다. 이와 같은 생각은 동질혼합가정(homogeneous mixing assumption)에 실제적으로

대체될 수 있으며, 이와같은 모델을 가진다는 것은 유행병의 연구에 크게 공헌할 것이다.

이와같은 종류의 간단한 모델은 Bartlett[1]가 비슷한 가정을 사용하여 유행병 모델을 처음 흉내 내었다. 그리고 Watson[3]가 계층으로 나누어진 사람 사이에 퍼지는 간단한 유행병 모델을 수학적으로 제시하고 있다.

이 모델의 첫째 목적은 동질혼합가정에 다른 방도가 있을 뿐만 아니라, 전염에 대한 비-동질작용(non-homogeneous behaviour)을 고려할 수 있음을 말한다 예로서, 이것은 어떤 이유때문에 유행병에 걸리기 쉬운 빈민굴과 같은 지역에 유용하게 쓸 수 있는 것이다.

게다가, 파라메타를 적당히 교정하므로, 모델은 다른 감염가능자와 회복비율을 나타내는 별개의 개인으로 구성된 인구등을 설명하는데 사용할 수 있다. 나이 계층으로 인구를 나누는 것이 모델에

(접수 : 1993년 9월 1일)

\* 동아대학교 전기공학과

Dept. of Electrical Engineering, Dong-A Univ.

\*\* 부산 외국어 대학교 컴퓨터 공학과

Dept. of Computer Engineering, Pusan Univ. of Foreign Studies.

맞도록 하는 것이다.

## 2. 결정론적 모델

m 개의 별개의 계층으로 나누어지고,  $N_i$  ( $1 \leq i \leq m$ )의 크기가  $C_i$ 인, 인구 N을 생각하자. 전염(infection)과 제거(removal)가 관계되고 있는 과정(process)의 근본적인 특징은 일반 통계학적 유행병(stochastic epidemic)과 같다.

우리는 다음과 같은 정의를 하자.

$X_i = C_i$ 에 있어서 감염 가능자 수,  $X = \sum X_i$

$Y_i = C_i$ 에 있어서 감염자 수,  $Y = \sum Y_i$

$Z_i = C_i$ 에 있어서 제거된 환자수,  $Z = \sum Z_i$

$\beta_i = C_i$ 에서 전염율

$P_{ij} = C_i$ 와  $C_j$ 사이 섞이는 혼합정도

$\beta_{ij} = C_j$ 에 있는 감염자에 대한  $C_i$ 에 있는 감염율, ( $1 \leq i, j \leq m$ )

$r_i = C_i$ 에 있어서 제거율(removal rate), ( $1 \leq i \leq m$ )

$\lambda =$  감염된 개인이 병이 되는 분수

그래서 과정은 전이율(transition rate)에 의해 규정되는 것이다.

$C_i$ 에 있어서 전염율( $X_i \rightarrow X_i - 1, \rightarrow Y_i + 1$ ) =

$$X_i \sum_{j=1}^m \beta_{ij} Y_j$$

$C_i$ 에 있어서 제거율 ( $Y_i \rightarrow Y_i - 1 \rightarrow Z_i + 1$ ) =  $r_i Y_i$

초기조건은 식(1)과 같다.

$$(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0} = (n_i, a_i, 0) \dots \dots \dots (1)$$

그리고 발병은 한계층  $C_1$ 에서 시작하므로,  $a_1$ 은 0이 아니다. 과정의 제일 마지막 상태는 식(2)로 된다.

$$(X_{i\infty}, Y_{i\infty}, Z_{i\infty}) = (n_i - \theta_i, 0, \theta_i + a_i) \dots \dots (2)$$

$\theta_i = \theta_i/n_i$ 은  $C_i$ 에 있어서 이환율(attack rate) 이다.

계층으로 나누어진 인구에서 각 계층의 일원은 그들자신 사이에 동질적으로 잘 섞이지만, 다른 계층의 개인과는 섞이는 빈도가 낮게 혼합된다. 그래서  $\beta_{ij}$ 는 식(3)과 같은 의미 있는 항으로 나타낼 수

있다.

$$\beta_{ij} = \beta_i P_{ij} N_i / N_j \dots \dots \dots (3)$$

이들에서 본래부터  $P_{ii}$ 은 식(4)와 같은 일정한 구속이 있다

$$P_{ii} = P_{ii}, P_{ii} = 1, 0 \leq P_{ij} \leq 1 \dots \dots \dots (4)$$

$P_{ij} = 1$ 은 잘 섞이는 동질 혼합(homogeneous mixing)을 말하며, 반면  $P_{ij} = 0$ 은 완전한 분리 인구에서 주어진다. 과정은 이 2개의 극단값에 얽매어 있다.

대동한 계층에서 식(5)을 얻는다.

$$N_i = N_0, r_i = r, \beta_{ij} = \begin{cases} \beta & (i=j) \\ q\beta & (i \neq j) \end{cases} \dots \dots \dots (5)$$

여기서  $0 \leq q \leq 1$  이다. 이모델은 동질의 혼합 가정에 상관없이 일반적 통계모델과 같다. 우리는 m 계층으로 나눈 균동한 인구를 가진다.

결정론적 근사값은 방정식으로부터 결과가 확률론적 수단을 만족시키는 미분방정식의 해로써 구해진다. 그들은 상세한 과정의 작용을 나타내지는 못하지만, 수단에 대한 근사치로써 가장 중요시 되고 있다.

( $X_i, Y_i, Z_i$ )로써 표시되는 결정론적 근사치는 아래 식(6)~(8)로써 표시 된다.

$$\frac{dX_i}{dt} = -X_i \sum_{j=1}^m \beta_{ij} Y_j \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{dY_i}{dt} = X_i \sum_{j=1}^m \beta_{ij} Y_j - r_i Y_i \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{dZ_i}{dt} = r_i Y_i \dots \dots \dots (8)$$

초기조건은 식(1)과 같고, 그리고 최종 상태는 식(2)와 같다.

## 3. 결정론적 모델해석

식(8)의 양쪽에  $\epsilon_{ij} = \beta_{ij}/r_j$ 을 곱하면 식(9)를 구한다.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} Z_j \right\} = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} Y_j \dots \dots \dots (9)$$

그리고, 식(6)에 식(9)을 대입시키면 식(10)와 같

은 결과를 얻는다.

$$\frac{dX_i}{dt} = -X_i \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} Z_j \right\} \dots\dots\dots (10)$$

초기 조건에서, 식(11)을 구할 수 있다.

$$X_i = X_{i0} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} Z_j \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$X_i$ 에 대한 명백한 해를 알 수 없지만,  $t \rightarrow \infty$ 로 두면 식(12)와 같은 형태의 최종값을 나타낼 수 있다.

$$X_{i\infty} = X_{i0} - \theta_i > 0, Y_{i\infty} = 0, Z_{i\infty} = Z_{i0} + \theta_i > 0 \dots\dots\dots (12)$$

만약  $i$ 그룹에서 감염 이환율 (attack rate)은 식(13)과 같이 정의된다.

$$\sigma_i = Y_{i0} + \theta_i \dots\dots\dots (13)$$

식(13)과 식(12)의 결합에 의해서 식(14)가 된다.

$$\sigma_i - Y_{i0} = X_{i0} - X_{i\infty} \dots\dots\dots (14)$$

식(11)와 식(13)에 의해서, 최종적으로 식(15)가 산출 된다.

$$\sigma_i = X_{i0} \left[ 1 + \frac{Y_{i0}}{X_{i0}} - \exp \left\{ - \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} \sigma_j \right\} \right] \dots\dots\dots (15)$$

식(15)는 컴퓨터에 의해서, 정확한 해석을 얻을 수 없다. 그러나  $\sigma_i$ 은 Watson[3]에 의해 제시된 반복과정에 의해서 구할 수 있다.

$n$ 번째  $\sigma_i^{(n)}$ 을 구하면 식(16)이 된다.

$$\sigma_i^{(n)} = X_{i0} \left[ 1 + \frac{Y_{i0}}{X_{i0}} - \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_{ij} \sigma_j^{(n)} - \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} \sigma_j^{(n-1)} \right\} \right] \dots\dots\dots (16)$$

발병 이환율 (illness attack rates)은 식(17)로 구한다.

$$\sigma_i = \lambda \sigma_i \dots\dots\dots (17)$$

#### 4. 모델의 해석과 결과

##### 4.1 시뮬레이터 구성

3종류 인구 나이 분포에 대하여 이환율을 알아

보기 위한 수학적 모델은 식(16)을 사용한다.

그림은 Elveback[4] 등이 홍콩 인플루엔자에 대해 5개 나이그룹 (미학아동, 학교아동, 청년, 중년, 노년)으로 하였으므로,  $m = 5$ 로한다. 그러나 해석을 위해  $\gamma, \lambda$  및  $B_{ij}$ 의 초기설정 값은 아래와 같이 가정한다.

①인구 나이 분포 : 인구를 단위법으로 1로 하여 3개 집단을 연구 대상으로 한다.

제1집단 :	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1
제2집단 :	0.07	0.17	0.4	0.23	0.13
제3집단 :	0.04	0.14	0.4	0.27	0.17

②전염 이동율 : 병원과 집에 머물게 되는 것을 고려한 각 나이 그룹에 대해서 계산한다.

$$\gamma = (0.435, 0.454, 0.327, 0.327, 0.327)$$

③병이 되는 분수 :  $\lambda = 2/3$ 로 한다.

④전염율 :  $B_{ij} = \beta_i \mu_{ij}$

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} .30500 & .13200 & .20500 & .09900 & .04100 \\ .03200 & .92300 & .15800 & .07400 & .02800 \\ .04200 & .13200 & .18300 & .09900 & .04100 \\ .03200 & .10100 & .15800 & .06700 & .02900 \\ .03200 & .10100 & .15800 & .07400 & .03200 \end{pmatrix}$$

⑤초기 조건 :

$$a) X_0 = 1.00000 \quad .97200 \quad 1.00000 \quad 1.00000 \quad 1.00000 \\ Y_0 = .00000 \quad .02800 \quad .00000 \quad .00000 \quad .00000$$

$$b) X_0 = 1.00000 \quad .98800 \quad .99200 \quad .98500 \quad 1.00000 \\ Y_0 = .00000 \quad .01200 \quad .00800 \quad .01500 \quad .00000$$

어떤 유행병의 유행에서 발병 이환율을 구하기 위한 프로그램을 구성하기 위해서 계 정수는 다음과 같이 구한다.

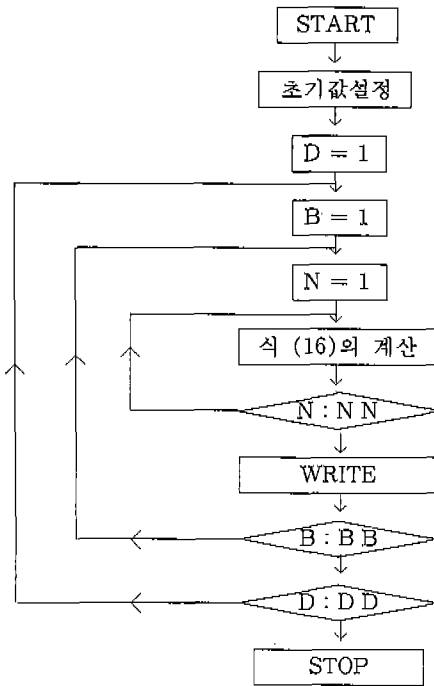
NN : 반복 횟수

BB : 인구 집단 최종치

DD : 초기 집단 최종치

표 1 계산결과

초기조건	인구나이분포	이 환 율 (attack rates)					
a)의 경우	제 1 집단	$\sigma_{11}=0.409$ ,	$\sigma_{21}=0.618$ ,	$\sigma_{31}=0.328$ ,	$\sigma_{41}=0.324$ ,	$\sigma_{51}=0.281$ ,	$\sigma_{av}=0.389$
	제 2 집단	$\sigma_{11}=0.460$ ,	$\sigma_{21}=0.622$ ,	$\sigma_{31}=0.307$ ,	$\sigma_{41}=0.273$ ,	$\sigma_{51}=0.212$ ,	$\sigma_{av}=0.351$
	제 3 집단	$\sigma_{11}=0.537$ ,	$\sigma_{21}=0.624$ ,	$\sigma_{31}=0.277$ ,	$\sigma_{41}=0.216$ ,	$\sigma_{51}=0.150$ ,	$\sigma_{av}=0.303$
b)의 경우	제 1 집단	$\sigma_{11}=0.411$ ,	$\sigma_{21}=0.618$ ,	$\sigma_{31}=0.333$ ,	$\sigma_{41}=332$ ,	$\sigma_{51}=0.283$ ,	$\sigma_{av}=0.393$
	제 1 집단	$\sigma_{11}=0.463$ ,	$\sigma_{21}=0.622$ ,	$\sigma_{31}=0.313$ ,	$\sigma_{41}=282$ ,	$\sigma_{51}=0.215$ ,	$\sigma_{av}=0.356$
	제 1 집단	$\sigma_{11}=0.541$ ,	$\sigma_{21}=0.625$ ,	$\sigma_{31}=0.285$ ,	$\sigma_{41}=227$ ,	$\sigma_{51}=0.154$ ,	$\sigma_{av}=0.311$



$$\beta_{11} = \begin{pmatrix} .30500 & .06600 & .05125 & .04950 & .04100 \\ .06400 & .92300 & .07900 & .07400 & .05600 \\ .16800 & .26400 & .18300 & .19800 & .16400 \\ .06400 & .10100 & .07900 & .06700 & .05800 \\ .03200 & .05050 & .03950 & .03700 & .03200 \end{pmatrix}$$

표 1 중 초기조건에 영향을 고찰하여 보면, (b)의 경우가 발병 이환율이 많다. 이것은  $Y_0$ 가 분산되고 많을 수록 이환율이 많다는 사실을 알 수 있다.

인구 나이 분포에 관하여 고찰하며, (a)와 (b) 어느 경우이든 노인층이 많을 수록 이환율이 적어지는 특성을 보이고 있다.

### 5. 결 론

밀폐된 인구를 계층으로 나누어서 전염병이 유행되는 모델을 연구한 본 논문은 다음과 같은 결론을 얻었다.

- ① 본 논문에서 제시한 이론은 정확함을 보였다.
- ② 감염자의 초기값이 많을수록 이환율은 많아지고 있다.
- ③ 노인층이 많을수록 이환율이 적어지고 있다.

본 논문이 앞으로 비동질성 인구중에서 퍼지는 전염병 연구에 크게 공헌할 줄 믿는다.

### 참 고 문 헌

- 1) Bartlett, M. S. Measles periodicity and community size. J. Roy. statist. SOC. A 120, 1957.
- 2) Bailey, N, T.J. The mathematical theory of infectious diseases and its Applications. Griffin. London. 1975.

그림 1 발병 이환율을 구하기 위한 흐름도

Fig. 1 Flow-chart for the calculation of illness attack rates

발병 이환율을 구할 수 있는 flow-chart는 그림 1과 같다.

### 4. 2 결과 해석

$m = 5$ ,  $NN = 100$ ,  $BB = 3$ ,  $DD = 2$ 로 하고 디지털 컴퓨터로 수치계산을 하였다.

수치 계산 결과 이환율은 표 1과 같다.

초기 초기 (a)의 경우의 제 1집단에서  $\beta_{11}$ 은 다음과 같다.

- 3) Watson, R,K, On an Epidemic in stratified population. J. Appl. prob. 9, 659-666, 1972.
- 4) Elveback, L. R. etal., An influenza simulation model for immunization studies, Amer, J. Epidemic, 103, 152-165, 1976.
- 5) 정형환 외, 초동급수 전개에 의한 유행병모델의 해법에 관한 연구. 의공학회지. Vol. 12, No.3. 1991.
- 6) 정형환 외, 전염병 모델에 있어서 파라메타 값에 관한 수치해석적 연구. 의공학회지. Vol, 13, No.4. 1992.