

〈論 文〉

점탄성층이 샌드위치된 복합적층판의 진동감쇠 특성

김재호* · 박태학** · 신현정**

(1993년 2월 20일 접수)

Vibration and Damping Characteristics of Viscoelastically Damped Sandwich Plates

Chae-Ho Kim, Tae-Hak Park and Hyun-Jeong Shin

Key Words : Viscoelastic Layer(점탄성층), Constraining Layer(구속층), Loss Factor(손실계수), Dynamic Shear Modulus(동적 전단계수), Central Difference(중심차분), Direct Frequency Analysis(직접 진동수 해석)

Abstract

The purpose of this study is to verify the vibration and damping characteristics of elastic-viscoelastic-elastic structures, theoretically and experimentally. The forth-order differential equations of motion are derived for the transverse vibration of three-layered plates with viscoelastic core layer. The equations consider both transverse displacements of the constraining layer and the bare base plate as variable and account for the effect of the transverse normal strain and the shear strain of viscoelastic core layer on the vibration of the plates. Finite difference analysis of the equations and experimental measurements are performed on the three-layered plates of completely free boundary condition. Comparative investigations on the theory and the results of direct frequency analysis of NASTRAN are carried out on the same structures.

1. 서 론

탄성, 점탄성 및 탄성재질로 구성된 복합적층 구조물의 진동 및 감쇠효과에 대한 연구는 방진 및 소음제어가 요구되는 여러 산업분야에서 활발히 진행되고 있다. 복합적층 구조물의 탄성재질 사이에 있는 점탄성재질은 계의 진동에너지를 흡수하여 발산하므로써 감쇠에 매우 효과적이라는 사실은 연구논문^(1~3)들을 통하여 밝혀졌으나, 점탄성층과 탄성층 사이의 메카니즘(mechanism) 분석방법과 해를 구하는 방법이 상이하며, 현재까지도 이에 대한 연구는 계속되고 있다.

Ditaranto⁽⁴⁾는 유한길이를 가진 3층 적층보가 자유진동하는 경우에 있어 보의 전단변형효과를 고려한 6차 운동방정식과 흡진재의 감쇠효과를 설명하기 위한 보조방정식을 유도했으며, Mead 및 Markus⁽⁵⁾는 강제 진동하에 있는 3층 적층보에 대하여 보의 전단변형 효과를 고려한 6차 운동방정식을 유도하였다. Yan과 Dowell⁽⁶⁾은 완전피복된 3층 적층보에서 각 층의 길이방향 변위 및 회전관성과 모재 및 보강재의 전단스트레인 영향을 고려한 해석방법을 제시하였다. Douglas와 Yang⁽⁷⁾은 강제 진동하에 있는 3층적층보에서 흡진재의 법선변형효과를 고려한 8차 운동방정식을 유도하고 이론해석과 실험을 통해 이의 타당성을 증명했으며, Okazaki^(8,9) 등은 구속재는 없고 점탄성층만을 피복시킨 곡선보(curved beams)와 원통형상의 곡판

*정회원, 경북대학교 기계공학과

**정회원, 경북대학교 기계공학과 대학원

(cylindrically curved plate)에 대한 감쇠특성을 이론과 실험을 통해 규명했다. Rao와 Crocker⁽¹⁰⁾는 겹치기 이음(lap joint)되어 있는 단순 지지보의 고유진동수에 미치는 흡진재의 영향을 분석하였다. Alam⁽¹¹⁾는 단순 지지된 다층(multilayered)의 직사각형 평판에 대하여 모든 탄성층의 횡방향 변위는 동일하다고 가정한 해석방법을 제시했으며, Lall⁽¹²⁾은 경계조건이 단순지지이며 부분파복된 평판에 대해 Rayleigh-Ritz 방법을 이용한 해석방법과 진동감쇠 특성을 연구했다.

Lu⁽¹³⁾, Johnson⁽¹⁴⁾ 및 Shin⁽¹⁵⁾은 NASTRAN 프로그램을 이용하여 점탄성 재료는 고체요소(solid element), 탄성 재료는 평판요소(plate element)로 모델링한 유한요소 해석을 통하여 복합적층 구조물의 감쇠효과를 조사한 바 있으며, Ma⁽¹⁶⁾는 모재와 구속층의 횡방향 변위와 포아송의 비가 같다고 가정한 뒤 유한요소 해석을 수행했으나 실험을 통한 비교 검토는 수행하지 않았다.

복합적층 평판의 진동감쇠 연구는 해를 구하는 방법에 있어서 분석해(analytic solution)와 유한요소법 등을 이용한 수치계산 해로 대별할 수 있다. 전자의 경우 경계조건이 단순지지이거나 고정된 경우(fixed condition) 혹은 그 조합인 경우에 대해서만 해를 구하는 방법이 알려져 있으므로 해를 구하는 데 한계성이 있다. 유한요소 해석의 경우 모재와 구속층은 각각 평판요소로 모델링하고, 점탄성층은 박판이지만 전단변형에 의한 스트레인 에너지를 정확히 나타내기 위해서 고체요소로 모델링하는 기법이 일반적이다. 그러나 박판인 고체요소의 종횡비(aspect ratio)에 의해 유발되는 계산오차를 줄이기 위해서는 미세 요소화 해야 하고 평판요소도 따라서 미세 요소화 해야 하므로 전체 요소의 수 및 계산량이 증가하게 된다. 그러므로 복합적층판의 수치계산해를 구하는 하나의 방법으로서 유한요소법을 이용하지 않고도 수치계산이 가능하며 해 또한 정확한 해석방법이 요구된다.

탄성층과 점탄성층의 메카니즘 분석시 점탄성층의 두께에 따라 전단과 법선변형(즉, 두께방향변위)이 계의 감쇠에 미치는 영향⁽¹⁷⁾이 서로 다르므로 운동방정식 유도시에 이들의 영향이 고려되어야 한다. 그리고 탄성층인 모재와 구속층의 횡방향 변위 역시 재료 및 경계조건에 따라 다르므로 각각을 독립변수로 취급하여 그 해를 구하여야 할 것으로 생각된다.

본 연구에서는 탄성, 점탄성 및 탄성 재료로 이루어진 복합적층 평판의 진동감쇠 특성을 규명하기 위하여 점탄성 재료의 전단변형 및 법선변형의 영향과 각 탄성층의 횡방향 변위를 고려한 운동방정식을 4차 연립 미분방정식으로 유도한 뒤, 연립 미분방정식의 적용이 간편한 유한차분법으로 그 해를 구했으며 실험을 통하여 그 결과들을 분석 검토하였다. 이론해석과 실험을 수행한 대상 평판의 경계조건은 주변을 완전자유로 하였다. 그리고 MSC/NASTRAN(version 67)의 direct frequency analysis 결과와 본 이론에 의한 해석결과를 비교 검토하였다.

2. 운동방정식의 유도

본 연구에서는 점착제와 박판들의 적층으로 이루어진 Fig. 1과 같은 구조물의 운동방정식을 구하기 위하여 다음과 같은 가정을 하였다.

- (1) 적층판은 각각 균일한 등방성 재료로 구성되어 있다.
- (2) 점탄성인 점착제층은 평판요소들 사이에서 전단과 법선응력을 전달하는 선형 점탄성 스프링으로 간주한다.
- (3) 각 평판의 전단변형 및 회전관성 효과는 무시한다.
- (4) 점탄성층과 박판 접촉 부위에서의 변위와 응력에 대한 연속성은 유지된다.

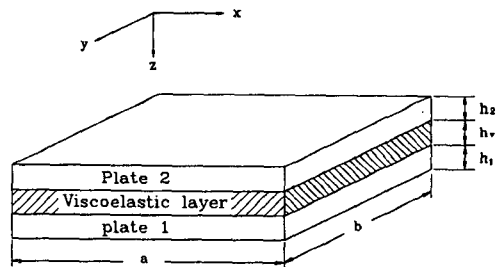


Fig. 1 Geometry and coordinate system for three-layered plate

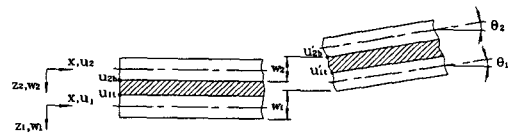


Fig. 2 Undeformed and deformed sections of plate

2.1 점탄성층의 변위와 변형을 관계식

Fig. 2와 같이 plate 1과 2의 상, 하부 표면에서의 x 및 y 방향 변위는 다음과 같이 표시된다.

$$u_{1t}(x, y) = z_{1t} \theta_{1x}(x, y) = -\frac{h_1}{2} \theta_{1x} = -\frac{h_1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \tag{1}$$

$$u_{2b}(x, y) = z_{2b} \theta_{2x}(x, y) = \frac{h_2}{2} \theta_{2x} = -\frac{h_2}{2} \frac{\partial w_2}{\partial x} \tag{2}$$

$$v_{1t}(x, y) = z_{1t} \theta_{1y}(x, y) = -\frac{h_1}{2} \theta_{1y} = -\frac{h_1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial y} \tag{3}$$

$$v_{2b}(x, y) = z_{2b} \theta_{2y}(x, y) = \frac{h_2}{2} \theta_{2y} = -\frac{h_2}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y} \tag{4}$$

여기서,

u_{it}, u_{ib} : plate i 의 top과 bottom에서의 x -방향 변위

v_{it}, v_{ib} : plate i 의 top과 bottom에서의 y -방향 변위

z_{it}, z_{ib} : plate i 의 중간 평면에서 top과 bottom까지의 z 방향 거리

θ_{ix}, θ_{iy} : plate i 의 x 및 y 방향 기울기

w_i : plate i 의 z -방향 변위

$i=1, 2$

2.2 점탄성층의 응력과 변형을 관계식

점탄성층의 변형률은 식 (1)~(4)로부터,

$$\gamma_{vzx}(x, y) = \frac{u_{1t}(x, y) - u_{2b}(x, y)}{h_v} = \frac{1}{h_v} \left(\frac{h_2}{2} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \tag{5}$$

$$\gamma_{vzy}(x, y) = \frac{v_{1t}(x, y) - v_{2b}(x, y)}{h_v} = \frac{1}{h_v} \left(\frac{h_2}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \tag{6}$$

$$\epsilon_{vz}(x, y) = \frac{w_2(x, y) - w_1(x, y)}{h_v} = \frac{w_2 - w_1}{h_v} \tag{7}$$

점탄성층의 응력과 변형률 사이의 관계식은,

$$\tau_{vzx}(x, y) = G_v \gamma_{vzx}(x, y) = G_v \gamma_{vzx} \tag{8}$$

$$\tau_{vzy}(x, y) = G_v \gamma_{vzy}(x, y) = G_v \gamma_{vzy} \tag{9}$$

$$\sigma_{vz}(x, y) = E_v \epsilon_{vz}(x, y) = E_v \epsilon_{vz} \tag{10}$$

여기서,

$\gamma_{vzx}, \gamma_{vzy}$: 점탄성층의 x 및 y 방향 전단 변형률

$\epsilon_{vz}, \sigma_{vz}$: 점탄성층의 z 방향 법선변형률과 법선응력

τ_{vzx}, τ_{vzy} : 점탄성층의 x 및 y 방향 전단 응력

G_v, E_v : 점탄성층의 전단 및 탄성계수

2.3 평형방정식

계가 횡진동을 할 경우 Fig. 3으로부터 plate 1 및 2의 평형방정식은 다음과 같다.

(1) plate 1;

plate 1의 미소 부분에 대한 모멘트 평형 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\Sigma M_y = 0;$$

$$\begin{aligned} & (M_{1x} + \frac{\partial M_{1x}}{\partial x} dx) dy - M_{1x} dy \\ & + (M_{1yx} + \frac{\partial M_{1yx}}{\partial y} dy) dx - M_{1yx} dx \end{aligned}$$

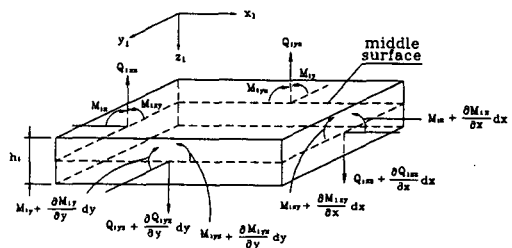
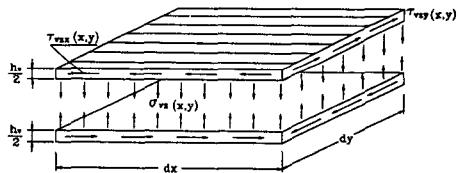
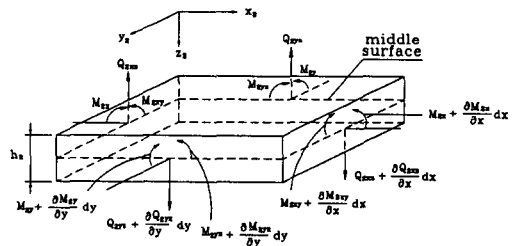


Fig. 3 Force equilibrium for differential volume of plate

$$\begin{aligned}
 & - (Q_{1xz} + \frac{\partial Q_{1xz}}{\partial x} dx) dy \frac{dx}{2} \\
 & - Q_{1xz} dy \frac{dx}{2} - \tau_{vzx} dx dy \frac{(h_1 + h_v)}{2} = 0
 \end{aligned}$$

여기서 고차항을 무시하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial M_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial M_{1yx}}{\partial y} - Q_{1xz} - \frac{(h_1 + h_v)}{2} \tau_{vzx} = 0 \quad (11)$$

$$\Sigma M_x = 0;$$

$$\begin{aligned}
 & (M_{1y} + \frac{\partial M_{1y}}{\partial y} dy) dx - M_{1y} dx \\
 & + (M_{1xy} + \frac{\partial M_{1xy}}{\partial x} dx) dy - M_{1xy} dy \\
 & - (Q_{1yz} + \frac{\partial Q_{1yz}}{\partial y} dy) dx \frac{dy}{2} \\
 & - Q_{1yz} dx \frac{dy}{2} - \tau_{vzy} dy dx \frac{(h_1 + h_v)}{2} = 0
 \end{aligned}$$

고차항을 무시하면,

$$\frac{\partial M_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial M_{1xy}}{\partial x} - Q_{1yz} - \frac{(h_1 + h_v)}{2} \tau_{vzy} = 0 \quad (12)$$

$$\Sigma F_z = 0;$$

$$\begin{aligned}
 & (Q_{1yz} + \frac{\partial Q_{1yz}}{\partial y} dy) dx - Q_{1yz} dx \\
 & + (Q_{1xz} + \frac{\partial Q_{1xz}}{\partial x} dx) dy - Q_{1xz} dy \\
 & - \sigma_{vz} dx dy = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} dx dy \\
 & \frac{\partial Q_{1xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{1yz}}{\partial y} - \sigma_{vz} = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서, $M_{i(x,y,xy)}$; plate i 의 중간평면에서의 단위 길이당 내부 모멘트

$Q_{i(xz,yz)}$; plate i 의 중간평면에서의 단위 길이당 내력, ($i=1,2$)

식(11)과 (12)를 x 와 y 에 대해서 각각 편미분하면

$$\frac{\partial Q_{1xz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{1yx}}{\partial x \partial y} - \frac{(h_1 + h_v)}{2} \frac{\partial \tau_{vzx}}{\partial x} \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q_{1yz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_{1y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{1xy}}{\partial x \partial y} - \frac{(h_1 + h_v)}{2} \frac{\partial \tau_{vzy}}{\partial y} \quad (15)$$

여기서, 식(14)와 (15)를 식(13)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 M_{1x}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{1xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{1y}}{\partial y^2} \\
 & - \frac{(h_1 + h_v)}{2} (\frac{\partial \tau_{vzx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{vzy}}{\partial y})
 \end{aligned}$$

$$- \sigma_{vz} = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad (16)$$

여기서, 각 plate의 x 및 y 방향에 대한 모멘트는 다음과 같다.

$$M_{ix} = -D_i (\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \nu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}) \quad (17)$$

$$M_{iy} = -D_i (\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \nu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}) \quad (18)$$

$$M_{ixy} = M_{iyx} = - (1 - \nu_i) D_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

여기서, $D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)}$ 는 plate i ($i=1,2$)의 굽힘강성 (flexural rigidity)을 나타낸다.

식(8), (9), (10) 및 (17)~(19)를 식(16)에 대입 정리하면

$$\begin{aligned}
 & D_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \\
 & + \frac{(h_1 + h_v)}{2} \cdot \frac{G_v}{h_v} \left[\frac{h_2}{2} (\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}) \right. \\
 & \left. + \frac{h_1}{2} (\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}) \right] \\
 & + \frac{E_v}{h_v} (w_2 - w_1) = -\rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad (20)
 \end{aligned}$$

(2) Plate 2;

plate 1과 같은 방법으로 plate 2의 미소 부분에 대해 모멘트 평형을 시키면 다음과 같다.

$$\Sigma M_y = 0;$$

$$\frac{\partial M_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2yx}}{\partial y} - Q_{2xz} - \frac{(h_2 + h_v)}{2} \tau_{vzx} = 0 \quad (21)$$

$$\Sigma M_x = 0;$$

$$\frac{\partial M_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial M_{2xy}}{\partial x} - Q_{2yz} - \frac{(h_2 + h_v)}{2} \tau_{vzy} = 0 \quad (22)$$

$$\Sigma F_z = 0;$$

$$\frac{\partial Q_{2xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{2yz}}{\partial y} + \sigma_{vz} = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \quad (23)$$

식(21)과 (22)를 x 와 y 에 대하여 각각 편미분하면

$$\frac{\partial Q_{2xz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_{2x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{2yx}}{\partial x \partial y} - \frac{(h_2 + h_v)}{2} \frac{\partial \tau_{vzx}}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial Q_{2yz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_{2y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{2xy}}{\partial x \partial y} - \frac{(h_2 + h_v)}{2} \frac{\partial \tau_{vzy}}{\partial y} \quad (25)$$

식(24)와 (25)를 식(23)에 대입 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{2x}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{2yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{2y}}{\partial y^2} \\ & - \frac{(h_2 + h_v)}{2} \left(\frac{\partial \tau_{vzx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{vzy}}{\partial y} \right) \\ & + \sigma_{vz} = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (26)$$

식(8), (9), (10) 및 (17)~(19)를 식(26)에 대입 정리하면

$$\begin{aligned} & D_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} + \frac{(h_2 + h_v)}{2} \cdot \\ & \frac{G_v}{h_v} \left[\frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \right] \\ & - \frac{E_v}{h_v} (w_2 - w_1) = -\rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (27)$$

2.4 경계조건

평판($x=a, y=b$)의 경계조건이 완전 자유일 경우, 모서리를 따라서 모든 모멘트와 수직력은 0이 된다.

$$\begin{aligned} M_{1x} = M_{2x} = S_{1x} = S_{2x} = 0 \text{ at } x=0, a \\ M_{1y} = M_{2y} = S_{1y} = S_{2y} = 0 \text{ at } y=0, b \end{aligned} \quad (28)$$

여기서, 모서리를 따라 x 및 y 방향으로 단위 길이당 작용하는 수직력(vertical edge force) S_{ix} 및 S_{iy} 는

$$\begin{aligned} S_{ix} &= Q_{ix} + \frac{\partial M_{ixy}}{\partial y} \\ &= -D_i \left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} + (2 - \nu_i) \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_{iy} &= Q_{iy} + \frac{\partial M_{ixy}}{\partial x} \\ &= -D_i \left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3} + (2 - \nu_i) \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^2 \partial y} \right] \end{aligned}$$

plate 1의 (p, q) 위치에 외력 $F(x, y, t) = F_0(p, q)e^{i\omega t}$ 가 작용할 경우 운동방정식(20) 및 (27)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1(x, y) e^{i\omega t} \\ w_2 &= W_2(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (30)$$

식(28)~(30)을 식(20) 및 (27)에 대입하면 외력 $F_0(p, q)e^{i\omega t}$ 에 대한 계의 정상상태 해를 구할 수 있다.

이때, 계의 반응을 조사하기 위한 하나의 방법으로서, 다음과 같은 cross inertance를 예로 들 수 있다.

$$\begin{aligned} CI &= \frac{\dot{w}_2}{F} = \frac{-\omega^2 W_2(r, s) e^{i\omega t}}{F_0(p, q) e^{i\omega t}} \\ &= -\omega^2 \frac{W_2(r, s)}{F_0(p, q)} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 (p, q) 는 가진점의 위치, (r, s) 는 반응 측정점의 위치이다.

3. 유한차분법으로의 변환

식(20)과 (27)의 각 항들을 중심차분(central difference)으로 임의의 격자점(mesh point)인 (m, n) 에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right]_{m,n} &\cong \frac{1}{d^4} \left[w_{i(m+2,n)} - 4w_{i(m+1,n)} \right. \\ &\left. + 6w_{i(m,n)} - 4w_{i(m-1,n)} + w_{i(m-2,n)} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} \right]_{m,n} &\cong \frac{1}{d^4} \left[w_{i(m,n+2)} - 4w_{i(m,n+1)} \right. \\ &\left. + 6w_{i(m,n)} - 4w_{i(m,n-1)} + w_{i(m,n-2)} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} \right]_{m,n} &\cong \frac{1}{d^4} \left[4w_{i(m,n)} - 2(w_{i(m+1,n)} \right. \\ &+ w_{i(m-1,n)} + w_{i(m,n+1)} \\ &+ w_{i(m,n-1)} + w_{i(m+1,n-1)} + w_{i(m+1,n-1)} \\ &\left. + w_{i(m-1,n+1)} + w_{i(m-1,n-1)} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right]_{m,n} &\cong \frac{1}{d^2} \left[w_{i(m+1,n)} \right. \\ &\left. - 2w_{i(m,n)} + w_{i(m-1,n)} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right]_{m,n} &\cong \frac{1}{d^2} \left[w_{i(m,n+1)} \right. \\ &\left. - 2w_{i(m,n)} + w_{i(m,n-1)} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

여기서, $d = \Delta x = \Delta y$ 이다.

유한차분법으로 해를 구하기 위해 식(30), (32)~(36)을 식(20)에 대입 정리하면

$$\begin{aligned} & \left(20 \frac{D_1}{d^4} - 2 \frac{A_1 h_1}{d^2} - B_v - \rho_1 h_1 \omega_i^2 \right) W_{1(m,n)} \\ & + \left(-8 \frac{D_1}{d^4} + \frac{A_1 h_1}{2d^2} \right) (W_{1(m+1,n)} \\ & + W_{1(m-1,n)} + W_{1(m,n+1)} + W_{1(m,n-1)}) \\ & + \frac{2D_1}{d^4} (W_{1(m+1,n+1)} + W_{1(m-1,n+1)} \\ & + W_{1(m+1,n-1)} + W_{1(m-1,n-1)}) \\ & + \frac{D_1}{d^4} (W_{1(m+2,n)} + W_{1(m-2,n)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ W_{1(m,n+2)} + W_{1(m,n-2)} \\
 &+ \left(-2\frac{A_1 h_2}{d^2} + B_v\right) W_{2(m,n)} \\
 &+ \frac{A_1 h_2}{2d^2} (W_{2(m+1,n)} + W_{2(m-1,n)} \\
 &+ W_{2(m,n+1)} + W_{2(m,n-1)}) = 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

식 (27)에 대해서도 같은 방법을 적용하면

$$\begin{aligned}
 &(20\frac{D_2}{d^4} - 2\frac{A_2 h_2}{d^2} - B_v - \rho_2 h_2 \omega^2) W_{2(m,n)} \\
 &+ \left(-8\frac{D_2}{d^4} + \frac{A_2 h_2}{2d^2}\right) (W_{2(m+1,n)} \\
 &+ W_{2(m-1,n)} + W_{2(m,n+1)} + W_{2(m,n-1)}) \\
 &+ \frac{2D_2}{d^4} (W_{2(m+1,n+1)} + W_{2(m-1,n+1)} \\
 &+ W_{2(m+1,n-1)} + W_{2(m-1,n-1)}) \\
 &+ \frac{D_2}{d^4} (W_{2(m+2,n)} + W_{2(m-2,n)} \\
 &+ W_{2(m,n+2)} + W_{2(m,n-2)}) \\
 &+ \left(-2\frac{A_2 h_1}{d^2} + B_v\right) W_{1(m,n)} \\
 &+ \frac{A_2 h_1}{2d^2} (W_{1(m+1,n)} + W_{1(m-1,n)} \\
 &+ W_{1(m,n+1)} + W_{1(m,n-1)}) = 0
 \end{aligned} \tag{38}$$

여기서, $A_i = \frac{(h_i + h_v)}{2} \frac{G_v}{h_v}$, $B_v = \frac{E_v}{h_v}$ 이다.

식 (37)과 (38)에 경계조건 (28) 및 외력을 적용해서 모든 격자점에 대해 행렬식으로 나타내면 최종 다음과 같은 형태가 된다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1(1,1)} \\ \vdots \\ W_{1(m,n)} \\ \vdots \\ W_{1(j,k)} \\ W_{2(1,1)} \\ \vdots \\ W_{2(m,n)} \\ \vdots \\ W_{2(j,k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_0(p, q) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

여기서,

C_{12} , C_{12} ; plate 1에 대한 식 (37) 중에서 W_1 및 W_2 에 대한 계수

C_{21} , C_{22} ; plate 2에 대한 식 (38) 중에서 W_1

및 W_2 에 대한 계수
 $m=1-j, n=1-k$

4. 수치계산, 실험 및 고찰

본 연구에서는 수치해석 및 실험시의 경계조건을 완전자유로 하고, plate 1의 $p=8.8$ cm, $q=10$ cm 인 곳에 외력 $F=F_0 e^{i\omega t}$ 를 가하고, 그때의 계의 반응으로서 plate 2의 $r=8.8$ cm, $s=10$ cm인 곳의 inertance를 식 (31)에 의해 진동수 영역 0~5000 Hz까지 구하였다. 수치해석 및 실험에 사용한 시편의 종류는 Table 1과 같이 탄성층은 A1 2024-T3를 사용했고, 점탄성재료는 미국 3M사 제품인 SJ2015X TYPE112이며 재료의 동적 전단계수 G_v 와 손실계수(loss factor)는 Table 1에 나타난 바와 같다.

수치계산은 중심차분을 이용한 유한차분법으로 슈퍼컴퓨터 cray-ymp에서 FORTRAN programming으로 수행했다.

실험은 Fig. 4와 같이 주파수 분석기(FFT analyzer), 충격망치(impact hammer) 및 가속도계 등을 이용하여 수치계산시와 같은 위치에서 진동수 영역 0~5000 Hz 사이의 inertance를 충격기법(impulse technique)으로 측정했다.

Table 2는 수치계산 해의 수렴도를 확인하기 위하여 모재만의 시편에 대해 가로 및 세로방향으로 각각 10, 16, 20, 25등분하여 8번째 모드까지 수치계산한 결과와 정해를 비교한 것이다. 25등분 했을 때가 정해에 근사하며 8번째 모드에서 최대 1.4%의 오차범위 내에 든다. 이하 모든 시편들을 25등분하여 계산했다.

Fig. 5는 모재만의 시편에 대한 실험과 수치계산 결과를 비교한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 전진동수 범위에서 서로 잘 일치하고 있으며 복합적층판과 진동감쇠 특성 비교시 참고자료가 된다.

Fig. 6~8은 시편 s1~s3 각각에 대한 inertance를 수치계산과 실험에 의해 구하여 그 비교를 나타낸 것이다. 각 시편 모두 공진진동수 800~925 Hz 사이의 2번째 공진진동수와 2500~3300 Hz 사이의 5, 6, 7번째 공진진동수의 구별이 분명하지 않고 noise처럼 보이고 있는데, 이는 2번째와 6번째 공진진동수에서의 진폭감쇠율이 평균 25 db와 31 db로써 다른 공진진동수에서의 진폭감쇠율보다 훨씬 크기 때문이며, 수치계산으로 각 시편의 공진진동

Table 1 Dimension and physical data of specimen

(unit : cm)

specimen and physical data		dimension				
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> _v	<i>h</i> ₂
specimen	s1	10	10	0.2	0.1	0.1
	s2				0.15	0.1
	s3				0.1	0.15
plate		Al 2024-T3 : E=7.2347E11 (dyne/cm ²)				
viscoelastic material (T=23.88°C)		shear modulus : $G_v = (\text{freq.})^{0.557} \times 5.966 \times 10^5 \times (1 + i\alpha)$ (dyne/cm ²) loss factor: $\alpha = 0.0520947 \times \ln(\text{freq.}) + 0.644273$				

수와 inertance를 비교해 놓은 Table 3을 조사해보면 알 수 있다. 계산치 보다 실험치에서 더욱 진폭 감쇠 현상이 나타나는 것은 운동방정식 유도시에 탄성층의 감쇠영향 무시와 점탄성층을 선형 점탄성 스프링으로 가정한 데서 발생하는 이론과 실험의 오차라고 생각된다.

Fig. 9~11은 모재만의 시편과 복합적층된 시편 s1~s3의 inertance를 수치계산에 의해 구하여 각

각 비교한 그림으로서 복합적층판의 진폭감쇠율이 평균 21 db에 달한다. 점탄성재질을 이용한 복합적층구조물의 감쇠효율의 우수함을 알 수 있다. 그림을 조사해보면 복합적층된 시편의 공진진동수가 모재만의 시편에 비해 좌측으로 이동되었는데, 이같은 현상은 점탄성 및 구속층의 의해 복합적층되면서 계의 질량은 구속층의 질량만큼 증가했으나 판의 굽힘강성은 점탄성층에 의해 구속층이 모재와 연결되어 있으므로 그만큼 증가하지 않기 때문에 발생한 현상이라고 생각한다.

Fig. 12는 구조해석용 프로그램인 MSC/NASTRAN에서 탄성, 점탄성 및 탄성재질로 구성된 복합적층판을 direct frequency analysis하기 위하여 유한요소 모델화 한 그림이다. 탄성층인 plate 1 및 plate 2는 QUAD4 요소로, 점탄성층은 고체요소인 HEXA8 요소로 모델링 했으며 HEXA8과 QUAD4 요소의 격자점을 공유하게 했다. 그리고 QUAD4 요소의 중립면과 격자점 사이의 거리를 offset시켰다. 요소의 크기는 유한차분 해석결과와 비교하기 위하여 동일하게 가로 및 세로를 각각 25 등분 했다. 점탄성층을 고체요소로 모델링 한 것은 점탄성층의 전단에 의한 스트레인 에너지를 정확하게 나타내기 위해서이다.

Fig. 13~15은 MSC/NASTRAN(version 67)의 direct frequency analysis 결과를 이론 및 실험결과와 시편 s1, s2, s3에 대해 각각 비교한 그림이다. direct frequency analysis시 재질, 외력, 가속도 및 경계조건은 유한차분 해석시와 동일하다. 그림에서 알 수 있듯이 direct frequency analysis 결과

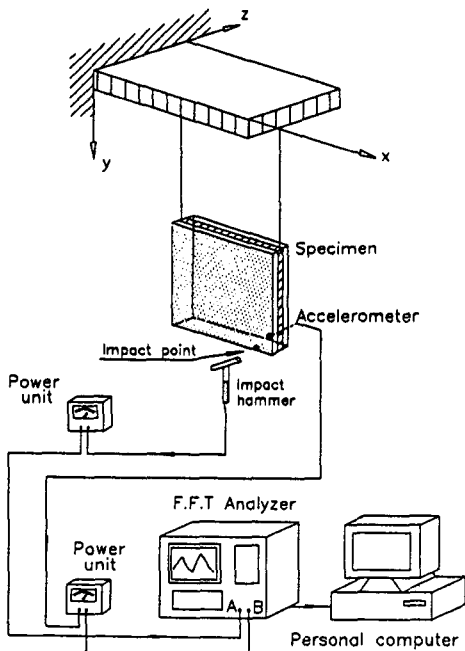


Fig. 4 Experimental set-up

도 점탄성층에 의한 감쇠 경향은 본 연구의 이론해석에 의한 결과와 유사하나 공진진동수가 이론 및 실험결과 보다 우측으로 이동되어 있다. 이것은 NASTRAN을 이용해서 복합적층판을 해석한 논

문^(13,14,15)에서 공통으로 나타나는 현상이며 본 연구에서 확립한 이론의 해석 결과가 진동감쇠 영향을 보다 정확히 예측하고 있음을 보여 주고 있다.

Fig. 16은 점탄성층의 두께변화가 계의 진동감쇠

Table 2 Natural frequencies of the bare base plate

(unit : Hz)

no. of mode	exact sol.	mesh size			
		10×10	16×16	20×20	25×25
1	655	650	650	650	650
2	956	920	940	950	950
3	1215	1170	1200	1200	1200
4	1703	1640	1680	1690	1700
5	3031	2780	2930	2970	3000
6	3123	2960	3060	3080	3100
7	3390	3110	3280	3320	3350
8	3829	3530	3710	3750	3775

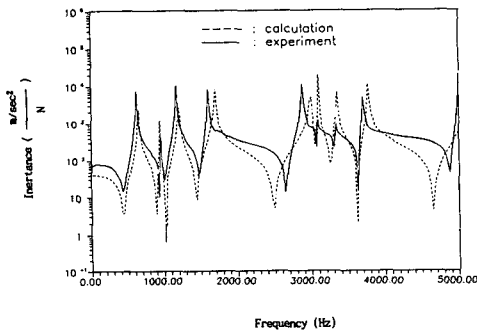


Fig. 5 Transverse driving point inertances of bare base plate

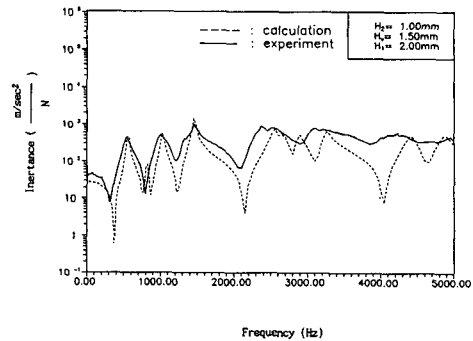


Fig. 7 Transverse driving point inertances of specimen 2

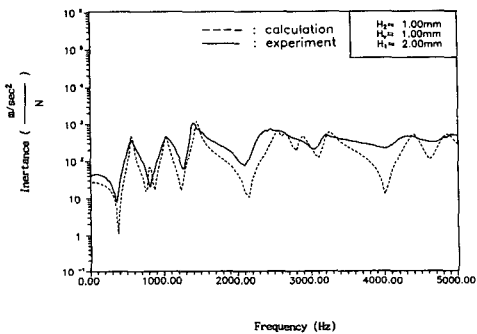


Fig. 6 Transverse driving point inertances of specimen 1

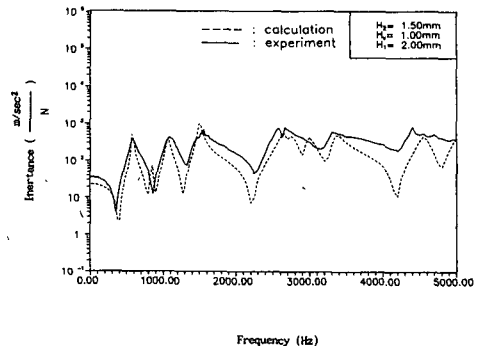


Fig. 8 Transverse driving point inertances of specimen 3

Table 3 Resonance frequencies and inertances of specimens (freq. : Hz, inet. : $\frac{m/sec^2}{N}$)

no.	freq. & inet.	s1	s2	s3	bare base plate
1	freq.	550	575	575	650
	(inet.)	(481)	(472)	(501)	(2273)
2	freq.	800	825	850	950
	(inet.)	(69)	(80)	(69)	(1239)
3	freq.	1025	1025	1075	1200
	(inet.)	(491)	(577)	(385)	(2639)
4	freq.	1450	1450	1500	1700
	(inet.)	(1228)	(1434)	(994)	(8684)
5	freq.	2550	2550	2650	3000
	(inet.)	(667)	(746)	(572)	(4787)
6	freq.	2650	2650	2750	3100
	(inet.)	(560)	(549)	(475)	(19520)
7	freq.	2900	2900	3000	3350
	(inet.)	(478)	(539)	(449)	(6872)
8	freq.	3250	3250	3400	3775
	(inet.)	(596)	(634)	(495)	(10980)
9	freq.	4400	4400	4550	
	(inet.)	(505)	(512)	(464)	

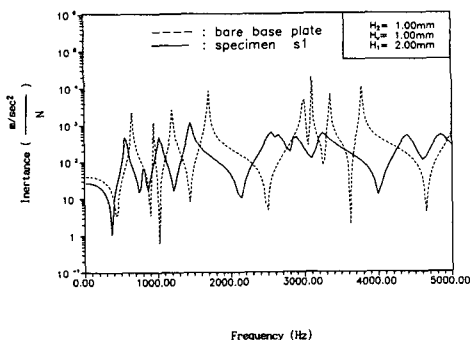


Fig. 9 Comparison of transverse driving point inertances of bare base plate and specimen s1

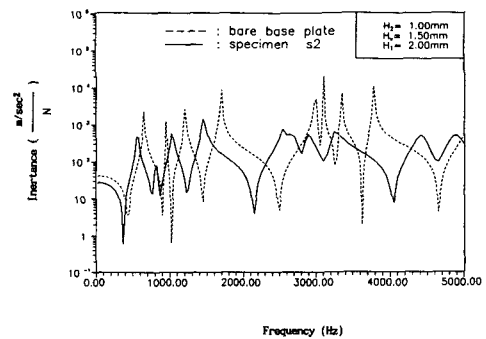


Fig. 10 Comparison of transverse driving point inertances of bare base plate and specimen s2

에 미치는 영향을 분석하기 위하여 탄성층의 두께를 $H_1=2.0$, $H_2=1.0$ 으로 고정하고 점탄성층의 두께만을 변화시킨 경우이며, 모드별 각 공진진동수에서의 inertance를 유한차분법으로 계산하여 비교한 것이다. 구속층 두께의 고정으로 공진진동수의 변화는 거의 없고, 점탄성층 두께의 변화에 따라

감쇠효과만 변화하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 17은 구속층의 두께변화가 계의 진동감쇠에 미치는 영향을 분석하기 위하여 모재와 점탄성층의 두께를 $H_1=2.0$, $H_2=1.0$ 으로 고정하고 구속층의 두께만을 변화시킨 경우이다. Fig. 16과는 달리 공진진동수가 구속층의 두께 증가에 따라 증가하고

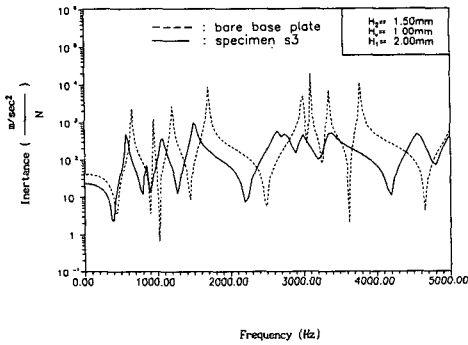


Fig. 11 Comparison of transverse driving point inertances of bare base plate and specimen s3

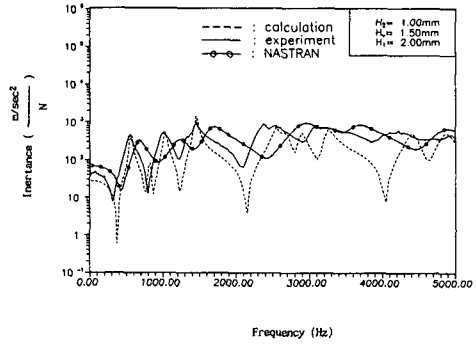


Fig. 14 Comparison of transverse driving point inertances of theory and NASTRAN for specimen s2

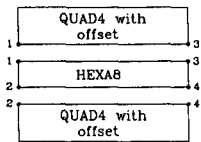


Fig. 12 Finite element modeling of a sandwich plate with viscoelastic layer

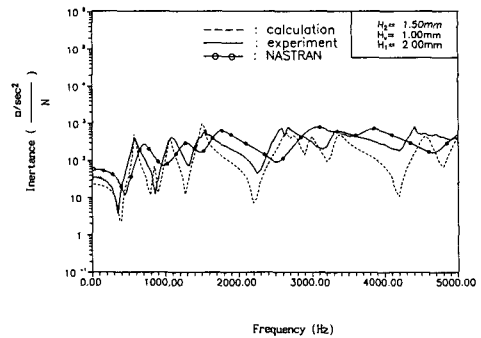


Fig. 15 Comparison of transverse driving point inertances of theory and NASTRAN for specimen s3

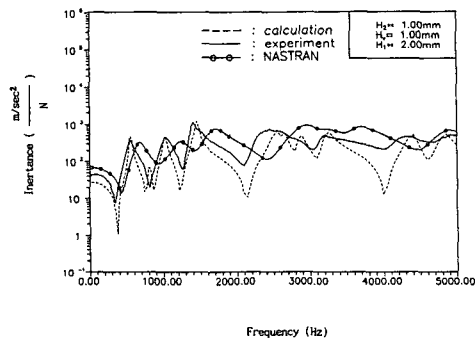


Fig. 13 Comparison of transverse driving point inertances of theory and NASTRAN for specimen s1

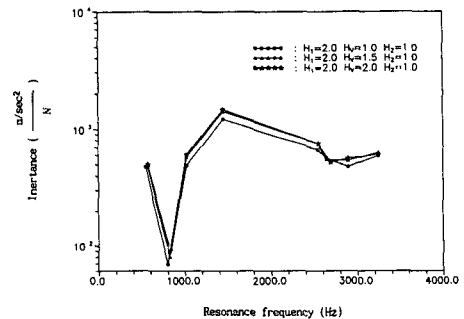


Fig. 16 Effect of variation of viscoelastic layer thickness

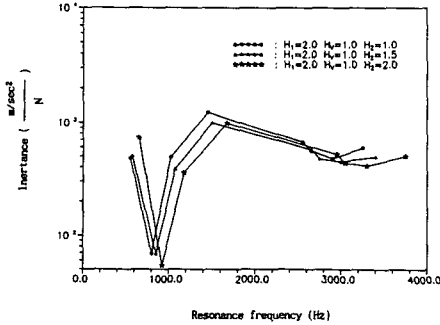


Fig. 17 Effect of variation of constraining layer thickness

있음을 알 수 있다. 이는 구속층의 두께증가로 인하여 계의 강성이 증가되기 때문이다.

이와 같은 현상으로 보아 계의 진동감쇠 효과를 최대화시키기 위해서는 점탄성층과 구속층의 두께를 인자로한 최적화 과정이 필요함을 알 수 있다.

5. 결론

경계조건이 완전자유인 탄성, 점탄성 및 탄성재질로 구성된 복합적층판의 진동감쇠 효과를 이론 및 실험으로 해석한 결과는 다음과 같다.

(1) 탄성층의 횡방향 변위를 각각 변수로 가정하고 점탄성층의 전단변형과 범선변형의 영향을 고려한 복합적층판의 운동방정식을 4차 연립미분방정식으로 유도한 뒤 정상상태 때의 해를 유한차분법으로 계산한 결과는 실험결과와 서로 잘 일치했다.

(2) 본 연구에서 확립한 이론의 해석결과가 NASTRAN의 해석결과 보다 진동감쇠 영향을 정확히 예측하고 있음을 알 수 있었다.

(3) 계의 공진진동수 이동효과는 구속층의 강성이, 감쇠효과에는 점탄성층의 두께가 크게 영향을 미치고 있으므로 진동감쇠 효과를 최대화 하기 위해서는 이 두가지 요소를 인자로 한 최적화 과정이 필요함을 알 수 있었다.

참고문헌

(1) Swallow, W., 1939, "An Improved Method of Damping Panel vibrations," British Patent Specification 513, 171.
 (2) Ross, D., Ungar, E. and Kerwin, Jr.E.M., 1959,

"Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminae," Structural Damping, ASME, New York, pp. 49~87.

(3) Whittier, J.S., 1959, "The Effect of Configurational Additions Using Viscoelastic Interfaces on the Damping of a Cantilever Beam," WADC Technical Report 58~568, Wright Air Development Center.
 (4) DiTaranto, R.A., 1965, "Theory of the Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Finite Length Beams," Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 881~886.
 (5) Mead, D.J. and Markus, S., 1969, "The Forced Vibration of a Three-Layer damped sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions," J. of Sound and Vibration, Vol. 10(2), pp. 163~175.
 (6) Yan, M.J. and Dowell, E.H., 1972, "Governing Equations for Vibrating Constrained Layer Damping of Sandwich Plates and Beams," Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 94, pp. 1041~1046.
 (7) Douglas, B.E. and Yang, J.C.S., 1978, "Transverse Compressional Damping in the Vibratory Response of elastic-Viscoelastic-Elastic Beams," AIAA Journal, Vol. 16, No. 9, pp. 925~930.
 (8) Okazaki, A., Urata, Y. and Ookouchi, T., 1988, "Damping Properties of Two-Layered Curved Beams with an Unconstrained Viscoelastic Layer," JSME(Series C), Vol. 54, No. 498, pp. 402~409.
 (9) Okazaki, A., Urata, Y. and Ookouchi, T., 1988, "Damping Properties of Two-Layered Cylindrically Curved Plates with an Unconstrained Viscoelastic Layer," JSME(Series C), Vol. 54, No. 508, pp. 2957~2965.
 (10) Rao, M.D. and Crocker, M.J., 1990, "Analytical and Experimental Study of the Vibration of Bonded Beams With a Lap Joint," Trans. of the ASME, J. of Vibration and Acoustics, Vol. 112, pp. 444~451.
 (11) Alam, N. and Asnani, N.T., 1987, "Refined Vibration and damping Analysis of Multilayered Rectangular Plates," J. of Sound and Vibration, Vol. 119(2), pp. 347~362.

- (12) Lall, A.K., Asnani, N.T. and Nakra, B.C., 1987, "Vibration and Damping Analysis of rectangular Plate with Partially Covered Constrained Viscoelastic Layer," J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 109, pp. 241~247.
- (13) Lu, Y.P., Killian, J.N. and Everstine, G.C., 1979, "Vibration of Three Layered Damped Sandwich Plate Composites," J. of Sound and Vibration, Vol. 64(1), pp. 63~71.
- (14) Johnson, C.D. and Kienholz, D.A., 1982, "Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers," J. of AIAA, Vol. 20, No. 9, pp. 1284~1290.
- (15) Shin, Y.S. and Maurer, G.J., 1991, "Vibration Response of Constrained Viscoelastically Damped Plates; Analysis and Experiments," Finite Element in Analysis and Design, Vol. 7, pp. 291~297.
- (16) Ma, B.A. and He, J.F., 1992, "A Finite Element Analysis of Viscoelastically Damped Sandwich Plates," J. of Sound and Vibration, Vol. 152(1), pp. 107~123.
- (17) 김재호, 박태학, 1992, "접착제층의 전단과 범선변형 효과를 고려한 적층판의 진동감쇠 특성 연구," 대한기계학회논문집, 제16권, 제7호, pp. 1244~1254.