

〈論 文〉

열응력, 내력 및 균열 경계하중을 고려한 2차원 균열문제의 에너지방출율

이 태 원*

(1992년 10월 29일 접수)

The Energy Release Rate of the Two Dimensional Cracked Body Under Thermal Stresses, Body Forces and Crack-Face Traction

Tae Won Lee

Key Words : Energy Release Rate(에너지방출율), Design Variable(설계변수) Material Derivative(전미분), Shape Design Sensitivity(형상설계민감도), Velocity(속도장), Virtual Crack Extension(가상 균열성장)

Abstract

Under general loadings, including body forces, crack-face tractions and thermal loading, the energy release rate equation for a two-dimensional cracked body is presented. Defining the virtual crack extension as the variation of the geometry, the equation is directly derived by a shape design sensitivity of the potential energy. Although the form of the derived energy release rate equation is different from other researchers's results, the three example show that the former is exactly the same as the latter. However, the final integral equation do not involve the derivative of the displacement on the crack surface and crack tip region, thereby improving the numerical accuracy in the computation of the energy release rate. Moreover, as it was derived from the governing equation including non-linear elasticity without special assumptions, the energy release rate of an elasto-plastic fracture can be obtained and any numerical stress analysis method can be applied.

기 호 설 명

a : 균열의 길이

b : 설계변수

G : 에너지방출율

f_i : 단위체적당 체적력

n_i : 경계에서의 단위수직벡터 성분

t : 가상시간

T_i : 경계에서의 표면력

u_i : 변위

v_i : 속도장

W : 단위체적당 에너지밀도

β_{ij} : 열팽창상수

Γ : 연속체의 경계

δ : 증분량

ϵ_{ij} : 변형률 텐서

θ : 온도분포차

σ_{ij} : 응력 텐서

π : 연속체의 전체에너지

Ω : 연속체의 영역

*정회원, 금오공과대학 기계설계공학과

첨자

- : 변수의 전미분
- : 변수의 시간에 대한 편미분
- , : 변수의 공간좌표에 대한 편미분
- i, j, k : 벡터나 텐서의 방향성분

1. 서 론

기계 구조물은 시간이 지남에 따라 내재된 균열이 성장하여 결국 파단이 일어나게 되므로 기계의 수명예측 및 파단여부의 판별을 위한 많은 연구가 이루어졌고 그 결과 여러가지 가설 및 실험식이 제안되었다.^(1,2) 이 식들은 응력확대계수(stress intensity factor) 또는 J 적분값으로 표현되므로 이 변수들의 정확한 예측은 균열해석의 근간이 된다. 그러므로, 응력확대계수나 J 적분을 해석적^(3,4,5)이나 수치적⁽⁶⁻¹⁹⁾으로 구하는 많은 방법이 제시되었으나 특수한 문제를 제외하고는 해석적으로 이 값들을 구하기가 불가능하기 때문에 수치해법에 중점을 두고 연구가 진행되었다.

연속체역학에서 주로 사용되는 수치해석은 주로 유한요소법과 경계요소법으로, 균열문제를 먼저 응력해석한 후 이 결과를 토대로 다시 응력확대계수 또는 J 를 구하는 간접방식⁽⁶⁻¹⁷⁾과 응력확대계수로 정의된 새로운 요소모델을 사용하여 응력해석과 동시에 응력확대계수를 구하는 직접방식^(18,19)으로 구분된다. 이러한 방법론들 중에서 기존의 수치응력 해석법과의 연계 및 해의 정확도 관점에서 간접방법이 많이 사용되고 있다.

간접방법 중 J 적분법은 탄성균열뿐 만 아니라 탄소성 변형하의 균열문제도 다룰 수 있으므로 가장 좋은 방법으로 알려져 있다. J 적분은 균열주위의 표면력과 변형에너지의 폐경로 적분인데 이것은 적분경로에 무관하다. 즉 다른 의미로 가상의 균열 성장에 대한 전체에너지의 변화율, 에너지방출율과 동일하다. J 적분의 이와같은 특성은 수치적으로 비교적 정확한 값을 얻을 수 있는 근간이 되나 응력해석으로 유한요소법을 사용하는 경우 응력 및 변형률이 요소경계에서 불연속으로 인하여 이를 이용한 J 적분값의 계산은 신뢰성이 없다. 그러므로, 이의 해결을 위하여 J 적분을 Gauss 발산이론으로부터 면적분으로 변환하거나^(8,9,10) J 적분의 물리적

인 의미인 에너지방출율을 에너지 식으로부터 직접 유도하여야 한다.⁽¹¹⁻¹⁴⁾ 수학적 정의로부터 직접 에너지방출율을 유도하는 방법으로서 문헌⁽¹¹⁾은 Lagrange 관점에서 전미분을 이용하였고 문헌^(13,14)들은 사상(mapping)이론을 적용하였다. 그러나, 이들의 결과식은 균열부의 내력 및 경계하중을 포함하는 경우 수치해법상 부정확한 균열부의 응력 및 변형에 대한 적분값을 계산하여야만 하는 단점이 있다.

앞서 설명하였듯이 에너지방출율은 가상 균열성장장에 대한 균열을 내재한 연속체의 에너지 변화율이므로, 새로운 접근방법으로 가상 균열성장장을 연속체의 형상변화로 보고 연속체의 에너지를 목적함수로 설정하면 균열문제는 형상 최적화문제가 된다. 이 때 에너지방출율은 바로 형상설계 민감계수와 동일하다. 연속체의 최적형상을 결정하는 형상 최적화문제는 문헌들⁽²⁰⁻²³⁾을 포함하여 이미 많이 다루어져왔고 최적화 과정에서 필요한 형상설계 민감계수도 다양한 방법에 의하여 유도되었다. 이 방법들은 연속체의 지배방정식으로부터 변분이론을 사용하여 해석학적으로 형상설계 민감도를 유도하였으나 연속체의 형상이 연속이고 미분가능한 함수라는 조건에만 성립한다. 이 조건때문에 균열문제는 형상최적화 문제임에도 불구하고 기존의 형상 최적화기법으로부터 직접 에너지방출율을 유도할 수 없다. 그러나, 문헌⁽²³⁾은 연속체를 균열선단부와 나머지 부분으로 분할하여 이러한 문제점을 해결하였다. 즉, 특이점을 갖는 균열선단부는 형상변화가 없이 단지 강성운동만 하므로 강체운동으로 인한 에너지방출율을 구하고 형상이 변하는 균열선단부를 제외한 영역은 기존의 형상설계기법을 적용하여 에너지방출율을 유도하였다. 이러한 방법론은 범함수론에 근간을 두고 있으므로 일반적인 하중조건하의 균열문제에 확장 적용할 수 있는 장점이 있다. 그러므로, 본 연구는 이 기법을 적용하여 모든 하중조건, 즉, 내력, 열응력 및 균열부 경계하중까지 고려한 균열문제의 에너지방출율을 유도하고자 한다.

2. 열응력하의 균열문제

연속체의 온도차에 의하여 열응력이 발생할 때 변형과 응력사이의 상관관계를 수식으로 표현하면

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\epsilon_{ij}, \theta)}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2)$$

where $W(\epsilon_{ij}, \theta) = W^e(\epsilon_{ij}) - \beta_{ij}\theta\epsilon_{ij}$

이 된다. 위식에서 u_i 는 변위, ϵ_{ij} 는 변형률, σ_{ij} 는 응력, β_{ij} 는 열팽창상수, θ 는 온도분포차, W^e 는 열변형이 없는 경우의 에너지밀도, W 는 열변형까지 고려한 에너지밀도를 나타낸다. 이 때, 열변형하에 있는 연속체는 다음의 경계조건과 지배방정식을 만족하여야 한다.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$u_i = d_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4)$$

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = c_i \quad \text{on } \Gamma_f \quad (5)$$

여기서 f_i 는 단위체적당 체적력이고, T_i 와 n_j 는 경계에서의 표면력과 단위수직벡터 성분을 나타낸다. d_i 와 c_i 는 각각의 부 경계에서 주어진 변위 및 표면력이나 수직전개의 편의를 위하여 $d_i=0$ 로 설정하였다. 현재 기술된 식(1)~(5)은 응력과 변형률의 관계식이 에너지밀도의 편미분으로 표시되고 온도항을 제외하고 선형가정이 없으므로 비선형 탄성 변형까지 포함한다. 그러므로, 위식으로부터 유도된 에너지방출율은 탄성균열 뿐 아니라 탄소성 균열문제도 적용이 가능하다.

지배방정식(3)와 경계조건(4), (5)을 만족하는 연속체의 전체에너지 π 는

$$\pi = \int_{\Omega} W d\Omega - \int_{\Gamma} T_i u_i d\Gamma - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega \quad (6)$$

으로 표현된다. 여기서 Ω 와 Γ 는 연속체의 영역과 경계를 나타낸다. Fig. 1과 같이 균열이 발생한 연속체에서 균열문제의 길이를 a 라 하면 정의에 의하여 에너지방출율 G 를 수식으로 표현하면 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$G = J = -\frac{\partial \pi}{\partial a} \quad (7)$$

즉, 에너지방출율 G 또는 J 적분값은 균열길이 변화에 대한 연속체의 전체 에너지의 변화량이다. 그러므로, 균열길이 변화를 연속체의 형상변화로 보고 균열길이를 설계변수로, 전체에너지는 목적함수로 설정하면 식(7)는 바로 형상설계 민감계수가 된다. 그러나, 균열선단부는 특이점에 해당하므로 연속체의 형상이 미분가능한 연속함수로 표현이 불가능하기 때문에 형상설계 민감도를 유도하기 위하여 특이점에 대한 특별한 주의가 필요하다.

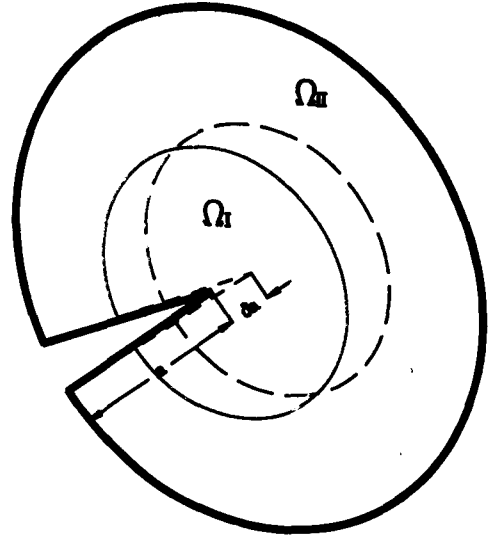
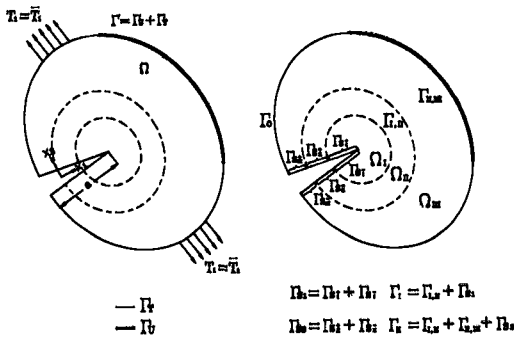


Fig. 1 Modeling of crack extension

3. 형상설계 민감도 해석

앞 절에서 설명하였듯이 균열문제는 연속체의 형상이 특이점을 포함하고 있기 때문에 이미 발표된 방법으로 형상설계 민감도를 직접 유도할 수 없다. 그런데, 연속체를 균열선단을 포함한 부분과 포함하지 않은 두 부분으로 나누어 생각하면 균열의 성장은 Fig. 1에서 묘사되었듯이 균열선단을 포함한 영역 I이 균열형상의 접선방향으로 평행이동을 한 것으로 볼 수 있다. 이 때 영역 I의 형상변화는 없고 단지 평행운동만 하고 나머지 영역은 이로 인한 형상변화가 발생한다. 수식 유도의 일반성을 위하여 Fig. 2에서 균열선단부를 포함하지 않은 영역을 다시 형상변화가 있는 영역 II와 형상변화가 전혀 없는 영역 III으로 구분하였다. 만약 영역 II를 최대한 확장하면 특이점을 제외한 연속체의 전체 형상을 나타낼 수 있고 이 경우 영역 III은 존재하지 않으며 영역 I은 특이점을 포함하는 무한히 작은 영역을 나타낸다. 이와같이 균열을 내재한 연속체를 3부분으로 나누어 균열의 성장을 특이점을 포함한 영역 I은 수학적으로 다루기가 문제가 있으나 강성운동만 하기 때문에 이 영역의 에너지 변화량을 구할 수 있다.

형상설계 민감도를 유도하기에 앞서 연속체의 형상과 설계변수 등의 관계를 이해하여야 한다. 형상설계분야에서는 불필요한 부분이나 균열해석의 이



(a) Geometry of the body and crack tip coordinate system
 (b) Subdivision of body into three regions

Fig. 2 The configuration of the cracked body

해를 돕기 위하여 간단히 서술하기로 한다. 먼저 형상변화가 일어나는 균열길이의 일부분, 즉, 균열부에서 영역 II에 포함된 길이를 설계변수 b 로 정의한다. 영역 I과 영역 III에도 일부 균열길이를 포함하고 있고 균열 성장후에도 변화가 없으므로 이를 l_1, l_{III} 이라 하면 임의의 시간 $t=t^*$ 에서 $b=a(t^*)-l_1-l_{III}$ 이다. 여기서 균열의 길이는 성장전에는 $a(0)$ 이므로 성장후 균열의 길이 $a(t^*)=a(0)+\delta a$ 이 되고 균열의 변화량 δa 는 영역 I의 평행이동한 변위에 해당하며 설계변수의 변화량 δb 와 동일하다. 그러므로 에너지방출율 식(7)은 에너지의 설계변수에 대한 미분이 된다.

만약 우리가 좌표계를 Fig. 2에서 보는 바와 같이 원점을 영역 II에서 균열의 시작점으로, 균열의 방향을 x_1 , 수직방향을 x_2 라 하면 강체운동을 하는 영역 I의 경우 연속체의 임의의 점 x_i 는

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + b - (a(0) - l_1 - l_{III}) \\ x_2(t) &= x_2(0) \end{aligned} \quad (8)$$

으로 정의되고 영역 II의 임의의 점 x_i 는 설계변수의 함수로 표현됨을 알 수 있다. 물론 위와 달리 좌표계를 임의로 설정할 수도 있으나 이는 좌표변환을 통하여 얻을수 있기 때문에 앞으로의 수식전개의 편의를 위하여 Fig. 2와 같이 좌표계를 설정한다. 한편, 형상변화를 하는 영역 II의 경우 영역 I과 공유경계 $\Gamma_{I,II}$ 상의 점들은 δb 만큼 이동하고 영역 III과 공유경계 $\Gamma_{I,III}$ 는 고정되어 있을 뿐 내부 영역점의 변화는 기술되어 있지 않다. 그러므로 이러한 경계조건을 만족하면서 내부 영역점의 이동

을 표현하는 수식을 두 경계에서의 선형보간으로 가정하였다. (이 가정은 제약성은 없고 물리적으로 타당하도록 다른 가정도 가능하다). 이러한 가정하에 두 경계에서의 상응하는 좌표사이의 거리를 d 이라 하고 $\Gamma_{II,III}$ 에 있는 점으로부터 내부 영역점까지의 거리를 s 라 하여 이들 영역 내부점의 변화를 설계변수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + \{b - (a(0) - l_1 - l_{III})\}s/d \\ x_2(t) &= x_2(0) \end{aligned} \quad (9)$$

설계변수 b 는 균열 성장전 ($t=0$)과 성장후 ($t=t^*$)에 균열의 길이 a 를 한 식에 표현한다. 이와같이 영역 I과 영역 II의 임의의 점 x_i 는 시간 t 에 따른 값의 변화를 설계변수로 정의하므로 속도장 v_i 와 임의의 함수 $g_k(x_i)$ 의 전미분은

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial b} \delta b \quad (10)$$

$$\dot{g}_k(x_i) = \frac{dg_k}{dt} = \frac{\partial g_k}{\partial t} + v_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = g'_k + v_i g_{k,i} \quad (11)$$

관계를 갖는다.

이러한 개념하에 먼저 균열선단부를 가진 영역 I 시스템의 전에너지를 생각하자. 균열의 성장으로 인한 영역 I은 단지 균열방향으로 평행이동만 하였을 뿐 형상의 변화는 없기 때문에 특이적인 균열의 선단부를 포함하고 있음에도 불구하고 균열 형상변화에 대한 에너지의 변화는 계산할 수 있다. 즉, 이 영역의 에너지의 전미분은

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_I &= \int_{\Omega_I} (\dot{W} - f_i \dot{u}_i - f_i \dot{u}_i) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_I} (\dot{T}_i u_i + T_i \dot{u}_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

이 된다. 위 식에서 Ω_I 은 영역 I을, Γ_I 은 영역 I을 구성하는 전 경계를 의미한다. (12)에서 변형에너지 밀도 W 의 전미분은

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (13)$$

이다. 그런데, 식(12)을 구성하는 적분항 중에서 지배방정식 (3)과 경계조건으로부터 다음의 항등식이 성립된다.

$$\int_{\Omega_I} (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - f_i \dot{u}_i) d\Omega = \int_{\Gamma_I} T_i \dot{u}_i d\Gamma \quad (14)$$

이 식(14)을 식(12)에 대입하면

$$\dot{\pi}_I = - \int_{\Omega_I} f_i \dot{u}_i d\Omega - \int_{\Gamma_I} \dot{T}_i u_i d\Gamma \quad (15)$$

의 결과식을 얻는다.

특이점이 없는 영역 II는 영역 I의 강성운동으로 인하여 형상변화가 일어나므로 이로인한 에너지의 변화가 발생한다. 이 영역은 형상 최적화기법을 적용하여 에너지의 전미분을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{II} = & \int_{\Omega_{II}} (\dot{W} - \dot{f}_i u_i - \dot{f}_i \dot{u}_i) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{II}} (\dot{T}_i u_i + T_i \dot{u}_i) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega_{II}} (W - f_i u_i) d\dot{\Omega} \\ & - \int_{\Gamma_{II}} T_i u_i d\dot{\Gamma} \end{aligned} \quad (16)$$

where $d\dot{\Omega} = v_{k,k} d\Omega$

$$d\dot{\Gamma} = (v_{k,k} - v_{l,m} n_l n_m) d\Gamma \quad (17)$$

식(17)에서 n_i 는 경계에서의 단위 법선방향벡터이다. 그런데, 함수의 전미분은 식(11)을 적용하여 t 와 x 의 편미분의 형태로 표현할 수 있고 식(16)은 아래와 같은 가상일의 원리를 내포하고 있다.

$$\int_{\Omega_{II}} (\sigma_{ij} \epsilon'_{ij} - f_i u_i) d\Omega = \int_{\Gamma_{II}} T_i u_i d\Gamma \quad (18)$$

이 식을 식(16)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{II} = & \int_{\Gamma_{II}} (W - f_i u_i) v_k n_k d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{II}} (\dot{T}_i u_i + T_i u_{i,j} v_j) d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_{II}} \dot{f}_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{II}} T_i u_i d\dot{\Gamma} \end{aligned} \quad (19)$$

이 된다. 한편, 연속체의 원래 형상은 영역 I, II, III로 구성되었고 영역 III는 균열의 성장으로 인한 에너지의 변화가 0이므로 시스템의 전체에너지 변화는 π 과 π_{II} 만 고려하면 된다. 이 때 영역 I과 II의 공유하는 경계에서 경계의 외향법선벡터가 반대방향이므로 공유경계 $\Gamma_{I,II}$ 에서 표면력의 크기가 같고 방향이 반대임을 주의하라. 이러한 사실로부터 영역 Ω_{II} 를 기준으로 법선방향을 정의하면 연속체의 에너지변화율은

$$\begin{aligned} \dot{\pi} = & \int_{\Gamma_{II}} (W - f_i u_i) v_k n_k d\Gamma - \int_{\Gamma_{II}} T_i u_{i,j} v_j d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_S} \dot{T}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{S2}} T_i u_i d\dot{\Gamma} \\ & - \int_{\Omega_1 + \Omega_{II}} \dot{f}_i u_i d\Omega + \int_{\Omega_{II}} f_{i,k} u_i v_k d\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

으로 정리된다. 위 식의 3번째 적분항은 적분경계

가 영역 I과 II에서 균열부의 경계에 해당하는 Γ_S 로, 4번째 적분항은 영역 II의 균열부에 해당하는 Γ_{S2} 로 축소되었다. (이는 영역 II의 공유경계 $\Gamma_{I,II}$ 에서 표면력항이 상쇄되고, 영역 I은 강성운동을, 영역 III는 속도가 0이므로 공유경계 $\Gamma_{I,II}$ 와 $\Gamma_{II,III}$ 에서 항상 $v_{i,j}=0$ 를 만족한다.)

식(20)으로부터 열응력까지 고려한 일반적인 균열문제에 대한 에너지방출율을 구할 수 있다. 그러나, 이 식은 유한요소법에 적용하기에는 문제가 있다. 그러므로, 주어진 표면력 및 내력을 제외하고 요소경계에서 불연속인 응력 및 변형률로부터 계산되는 첫번째 및 두번째 적분항을 Gauss의 발산이론을 적용하여 다음과 같이 변환한다.

$$\begin{aligned} \dot{\pi} = & \int_{\Omega_{II}} \{ (W - f_i u_i) v_k \}_{,k} d\Omega - \int_{\Omega_{II}} (\sigma_{ij} u_{i,k} v_j)_{,k} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_S} \dot{T}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{S2}} T_i u_i d\dot{\Gamma} \\ & - \int_{\Omega_1 + \Omega_{II}} \dot{f}_i u_i d\Omega + \int_{\Omega_{II}} f_{i,k} u_i v_k d\Omega \end{aligned} \quad (21)$$

위 식에서

$$W_{,k} = \frac{\partial W}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \epsilon_{ij,k} = \sigma_{ij} u_{ij,k} \quad (22)$$

의 관계가 성립하므로 결과적으로

$$\begin{aligned} \dot{\pi} = & \int_{\Omega_{II}} \{ (W - f_i u_i) v_k - \sigma_{ij} u_{i,k} v_j \}_{,k} d\Omega \\ & - \int_{\Omega_1 + \Omega_{II}} \dot{f}_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_S} \dot{T}_i u_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{S2}} T_i u_i (v_k n_k - v_{l,m} n_l n_m) d\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

이 유도된다.

결과식(23)에서 균열성장에 따른 균열부를 포함한 외력과 영역 I, II에서의 내력, 표면력 및 영역 I, II의 형상변화를 설계변수 b 로 표현하고 이의 미분항을 구하기만 하면 적분은 쉽게 구해진다. (속도장 v 와 T 및 f 의 전미분은 설계변수의 변화에 대한 변화량이다.) 이것은 수학적으로 상당히 중요한 의미를 갖는다. 유도된 식은 내력 및 표면력의 설계변수에 대한 미분을 해석학적으로 구하여야만 하는 어려움에도 불구하고 문헌^(10,13,14)들의 경우와 달리 균열선단부의 응력 및 변형량을 고려하지 않고 에너지방출율을 계산할 수 있다. 더구나, 만약 내력 및 균열부의 표면력이 일정하다면 이들 하중의 전미분은 0가되어 균열부를 제외한 임의의 영역 Ω_{II} 만 고려하여도 된다.

4. 하중조건에 따른 에너지방출율

형상설계 민감도로 유도된 식(20)와 (23)은 전미분을 사용하여 표현하였으나 에너지방출율은 식(7)에서와 같이 전체에너지의 균열의 길이에 대한 미분값이다. 그러므로 이 절에서 이들식과 에너지방출율과의 관계를 유도하기로 한다. 먼저 앞절에서 균열길이의 변화량 δa 는 설계변수의 변화량 δb 와 동일하므로

$$G = -\frac{\partial \pi}{\partial a} = -\frac{\partial \pi}{\partial b} \quad (24)$$

이며

$$\dot{\pi} = \frac{\partial \pi}{\partial b} \delta b = -G \delta b \quad (25)$$

이다. 또한, 영역 II에서 속도장 v_i 는 x_1 방향만(s/d) δb 이고 x_2 방향은 0이므로 속도장의 편미분은

$$v_{i,j} = \frac{1}{d} \frac{\partial s}{\partial x_j} \delta b = r_{i,j} \delta b \quad (26)$$

으로 표현된다. 이러한 관계들과 δb 가 임의의 변화량이라는 사실로부터 G 는 식(20)과 식(23)로부터 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} G &= - \int_{\Gamma_{I,II} - \Gamma_{II,III}} (w - f_i u_i) n_1 d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{II} - \Gamma_{II,III}} T_i u_{i,1} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial T_i}{\partial b} u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{S2}} T_i u_i (r_{1,1} - r_{1,k} n_k) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega_1 + \Omega_{II}} \frac{\partial f_i}{\partial b} u_i d\Omega + \int_{\Omega_{II}} f_{i,1} u_i d\Omega \\ &= - \int_{\Omega_{II}} \{ (W - f_i u_i) r_{1,1} - \sigma_{ij} u_{i,j} r_{1,k} \} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_1 + \Omega_{II}} \frac{\partial f_i}{\partial b} u_i d\Omega + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial T_i}{\partial b} u_i d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{S2}} T_i u_i (r_{1,1} - r_{1,k} n_k) d\Gamma \quad (27) \end{aligned}$$

식(27)는 열하중, 내력 및 균열부의 표면력까지 고려한 모든 균열문제에 적용된다. 그러나, 식의 형태가 이미 발표된 식들의 형태와 상이하므로 예제들을 통하여 식의 타당성을 입증하기로 한다.

4.1 균열부를 제외한 경계표면력만 존재하는 경우

내력, 균열부의 압력 및 열응력이 없는 경우에

너지밀도 W 는 W^e 가 되고 식(27)에서 균열부 표면력의 변화 및 내력의 변화로 인한 에너지변화는 0가 되므로 간단히 아래의 식으로 정리된다.

$$G = - \int_{\Gamma_{II} - \Gamma_{II,III}} W n_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{II} - \Gamma_{II,III}} T_i u_{i,1} d\Gamma \quad (28)$$

그런데 Fig. 2에서 보듯이 영역 II의 경계 $\Gamma_{II} = \Gamma_{I,II} + \Gamma_{II,III} + \Gamma_{S2}$ 이며 x_1 방향을 균열방향으로 설정하였으므로 Γ_{S2} 에서 법선 방향벡터성분 n_1 은 0가 되어

$$G = - \int_{\Gamma_{I,II}} W n_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{I,II}} T_i u_{i,1} d\Gamma \quad (29)$$

로 정리된다. 이 식의 형태가 문헌에서 발표된 J 적분값과 크기는 동일하고 부호가 반대로 나타난 이유는 본 연구에서는 문헌들과 달리 역으로 $\Gamma_{I,II}$ 의 방향을 시계방향으로 선택하였기 때문이다.

4.2 내력이 존재하는 경우

문헌⁽¹³⁾은 상사를 사용하여 내력 및 균열부를 제외한 경계부에서 표면력이 작용할 때의 에너지방출율을 유도하였고 결과로서 식(29) 외에 영역 I과 II에서 내력으로 인한 적분항을 추가하였다. 문헌식과 본 연구식의 형태는 다르나 결과적으로 동일하다. 이의 증명을 위하여 편의상 에너지방출율 식(27)보다 에너지의 전미분 식(20)를 사용하였다. 열응력이 존재하지 않고 균열부의 표면력이 존재하지 않는 경우 에너지의 전미분 식(20)은

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= \int_{\Gamma_{II}} (W - f_i u_i) v_k n_k d\Gamma - \int_{\Gamma_{II}} T_i u_{i,j} v_j d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega_1 + \Omega_{II}} f_i u_i d\Omega + \int_{\Omega_{II}} f_{i,k} u_i v_k d\Omega \quad (30) \end{aligned}$$

으로 단순화 된다. 그런데, 내력은 단지 x_i 좌표의 함수이므로 $f_i = 0$ 이고 균열부서 n_1 은 0이므로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= \int_{\Gamma_{I,II}} (W - f_i u_i) v_k n_k d\Gamma - \int_{\Gamma_{I,II}} T_i u_{i,j} v_j d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega_1} f_{i,k} u_i v_k d\Omega \quad (31) \end{aligned}$$

식(31)은 영역 II의 관점에서 경계 $\Gamma_{I,II}$ 를 표현하였기 때문에 시계방향으로 정의되나 이를 영역 I의 관점에서 표현하면 반시계방향이 되므로 첫번째, 두번째 적분항의 부호는 반대가 된다. 한편 특이점에 해당하는 균열선단부는 반경이 0에 접근하고 이 특

이점에서 내력으로 인한 항은 무시할 수 있으므로 특이점을 제외한 형상으로 영역 I을 가정하고 영역 I의 균열부 경계 Γ_{S1} 에서 $n_1=0$ 라는 사실에 착안하여 Gauss 발산이론으로부터

$$\int_{\Gamma_{S1}} f_i u_{i,k} v_k n_k d\Gamma = \int_{\Gamma_{S1}} f_i u_{i,k} v_k n_k d\Gamma = \int_{\Omega_1} (f_i u_{i,k})_{,k} d\Omega \quad (32)$$

을 유도한다. 식(32)에서 영역 I은 강성운동만하므로 $v_{k,1}=0$ 이다. 이를 대입하여 식(31)을 다시 적으면

$$\dot{\pi} = - \int_{\Gamma_{S1}} W v_k n_k d\Gamma + \int_{\Gamma_{S1}} T_i u_{i,j} v_j d\Gamma - \int_{\Omega_1} f_i u_{i,k} v_k d\Omega \quad (33)$$

이 되고 영역 I과 경계 $\Gamma_{i,11}$ 에서 속도장은 x_1 방향으로 일정속도 δb 이므로 에너지방출율은

$$G = \int_{\Gamma_{S1}} W n_1 d\Gamma - \int_{\Gamma_{S1}} T_i u_{i,1} d\Gamma W + \int_{\Omega_1} f_i u_{i,1} d\Omega \quad (34)$$

으로 유도된다. 이 식(34)은 문헌⁽¹³⁾의 식과 동일하다. 그러나, 두 식의 동일함에도 불구하고 식(34)의 형태는 본 연구의 결과 식(27)와 달리 균열선단부에서 특이성을 갖는 변위의 미분을 적분에 포함함으로써 수치적분상 문제점이 있다.

4.3 균열부에 균일압력이 작용하는 경우

문헌⁽¹⁰⁾은 내력이 없고 균열부의 균일압력이 작용하는 경우 J 적분의 정의로부터 Gauss 발산이론을 적용하여 적분식을 유도하였다. 형상이 변하는 균열부의 균일압력은 표면력의 전미분이 0를 의미하므로 이러한 하중조건에서 식(27)는

$$G = - \int_{\Gamma_{i1}} w_{n1} - T_i u_{i,1} d\Gamma + \int_{\Gamma_{S2}} T_i u_i (r_{1,1} - r_{1,k} n_1 n_k) d\Gamma \quad (35)$$

으로 정리된다. 이 식에서 첫번째 적분항은 문헌⁽¹⁰⁾과 동일하나 두번째 적분항은 형태가 다르다. 또한 균열의 형상이 x_1 방향이므로 균열부에서 $n_1=0$ 을 고려하면 식(35)의 두번째 적분항은 $r_{1,1}$ 만 존재한다. 이상의 결과로부터 균열부에서 균일압력 $T_1=0$, $T_2=-p$ 의 경우 Γ_{S2} 의 거리를 l_{11} 라 하면

$$\int_{\Gamma_{S2}} T_i u_{i,r_{1,1}} d\Gamma = 2 \int_{-l_{11}}^{-l_1} p u_2 r_{1,1} dx_1 \quad (36)$$

으로 표현된다. 그런데, 압력은 일정하므로 식(36)의 오른쪽항은

$$\int_{-l_{11}}^{-l_1} p u_2 r_{1,1} dx_1 = - \int_{-l_{11}}^{-l_1} p u_{2,1} r_1 dx_1 + [p u_2 r_1]_{-l_{11}}^{-l_1} \quad (37)$$

으로 계산되고 식에서 $v_1=r_1 \delta b$ 을 유의하면 점 $-l_1 - l_{11}$ 에서 $r_1=0$, $-l_1$ 점에서는 $r_1=1$ 임을 알 수 있다. 한편 균열선단에서 $u_2=0$ 이므로 영역 I에서 균열부 Γ_{S1} 에 대하여 아래의 관계식이 만족된다.

$$\int_{-l_1}^0 p u_{2,1} dx_1 = [p u_2]_{-l_1}^0 = - [p u_2 r_1]_{-l_{11}}^{-l_1} \quad (38)$$

그러므로 결과적으로 식(35)는 문헌⁽¹⁰⁾과 동일하게 다음의 식으로 표현된다.

$$G = - \int_{\Gamma_{i1}} (w_{n1} - T_i u_{i,1}) d\Gamma - 2 \int_{-l_{11}}^{-l_1} p u_{2,1} r_1 d\Gamma - 2 \int_{-l_1}^0 p u_{2,1} d\Gamma \quad (39)$$

유도된 식(39)을 살펴보면 에너지방출율을 계산하는데 특이성을 갖는 균열선단부 변위의 미분을 사용한다. 이는 수치적분의 어려움을 유발할 뿐 아니라, 만약 응력해석을 유한요소법으로 구하는 경우 수치해가 부정확한 경계에서의 변위의 미분을 요구하고 있다. 그러나, 식(35)은 식(39)과 동일함에도 불구하고 균열선단을 포함한 영역 I을 배제하고 균열부 경계에서 단지 변위와 표면력의 적분항으로서 표현되어 이러한 문제점을 해결하였다.

5. 결 론

열응력, 내력 및 경계하중하에서 탄소성까지 고려한 2차원 균열문제의 에너지방출율식을 기존의 방법과 달리 균열문제를 형상 최적화문제로 정의하여 형상설계 민감도로부터 유도되었다. 결과식은 어떤 가정없이 지배방정식과 경계조건 및 연속체의 에너지의 전미분과 변분이론으로부터 직접 유도되었으므로, 해석적이거나 수치적으로 에너지방출율을 계산하는데 적용될 수 있다.

본 연구의 제안식(27)는 균열문제에의 접근방법의 차이로 인하여 식의 형태는 균열부외의 경계하중만 작용하는 경우를 제외하고 기존의 문헌^(10,13,14)식과 다르다. 물론 4절의 예제들에서 증명하였듯이

결과적으로 동일하나, 표현상의 차이로 인하여 식 (27)이 수치계산상 큰 장점을 갖는다. 왜냐하면, 균열선단부에서 거리 $\rho^{-1/2}$ 에 비례하는 응력 및 변형률은 수치적으로 정확한 값의 계산이 불가능하기 때문에 (만약 균열선단부의 정확한 응력값이 계산되면 J 적분 방법의 의미가 없다), 보다 정확한 에너지방출율을 계산하기 위하여 이의 사용은 피해야 한다. 식 (27)은 이러한 조건을 만족한다. 즉, 해석 함수인 경계하중과 내력의 미분만 적분항에 포함하고 응력과 변형률은 균열선단부를 제외한 임의의 영역 II에서만 고려한다. 그러나, 내력 및 균열부의 경계하중하에서 기존의 식들은 균열선단부의 변형률항으로 표현되어 있으므로 수치해의 오차를 피할 수 없다. 또한, 실제 공학문제에서 많이 접할 수 있는 중력 및 균열부의 균일압력 등과 같이 가상균열의 성장에도 동일한 하중크기를 갖는 균열문제의 경우 식 (27)은 에너지방출율이 균열선단부를 배제한 임의의 폐경로(영역 II의 경계)에 무관함을 설명하고 있다.

결과적으로 동일함에도 불구하고 식의 표현상 차이는 문헌들에서 고려하지 않은 가상 균열성장으로 인한 내력 및 표면력에 의한 에너지변화를 형상변화항으로 처리하였기 때문에 균열성장으로 인한 내력 및 표면력에 의한 에너지변화를 형상변화항으로 처리하였기 때문에 발생한다. 그러므로, 형상변화의 수식화가 상당히 중요하다. 본 연구에서는 연속체의 형상변화인 속도장을 영역 II에서 선형가정을 하였으나, 정확히 말하자면 Fig. 2에서 보듯이 영역 II의 경계 $\Gamma_{I,II}$ 와 $\Gamma_{II,III}$ 에서만 기술되었기 때문에 이 조건을 만족하는 임의의 함수가 사용될 수 있다. 그러나, 이미 J 적분을 유한요소법으로 계산하는 문헌들은 이 선형가정을 사용하고 있으며 수학적으로도 만약 영역 II의 경계 $\Gamma_{I,II}$ 와 $\Gamma_{II,III}$ 의 거리가 적당히 작으면 선형가정하에 계산된 에너지방출율값은 오차가 작음을 예상할 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 박사후 연수과정 프로그램의 지원을 받아 수행되었으며 이러한 기회들 준 한국과학재단에 감사한다.

참고문헌

(1) Hussain, M.A., Pu, S.L. and Underwood, J.H.,

- 1974, "Strain Energy Release Rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II," *Fracture Analysis*, ASTM STP 560, pp. 2~28.
- (2) Sih, G.C., 1974, "Strain Energy Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problem," *Int. J. Fracture* 10, pp. 305~321.
- (3) Eshelby, J.D., 1956, "The Continuum Theory of Lattice Defects," in *Solid State Physics 3*, Academic Press, New York, pp. 79~144.
- (4) Rice, J.R., 1968, "A Path-Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks," *J. Appl. Mech.* 35, pp. 376~386
- (5) Cherapanov, G.P., 1979, *Mechanics of Brittle Fracture*, McGraw-Hill, New York.
- (6) Parks, D.M., 1974, "A Stiffness Derivative Finite Element Technique for determination of Crack Tip Stress Intensity Factor," *Int. J. Fracture* 10, pp. 487~502.
- (7) Hellen, T.K., 1975, "On the Method of Virtual Crack Extension," *Int. J. Numer. Methods Engng.* 9, pp. 183~192.
- (8) Nikishkof, G.P. and Atluri, S.N., 1987, "An Equivalent Domain Integral Method for Computing Crack Tip Integral Parameters in Non-Elastic Thermomechanical Fracture," *Engng. Fracture Mech.* 26, pp. 851~867.
- (9) Nikishkof, G.P. and Atluri, S.N., 1987, "Calculation of Fracture Mechanics Parameters for an Arbitrary Three-Dimensional Crack by Equivalent Domain Integral Method," *Int. J. Numer. Methods Engng.* 24, pp. 1801~1821.
- (10) Raju, I.S. and Shivakumar, K.N., 1990, "An Equivalent Domain Integral Method in the Two-Dimensional Analysis of Mixed Mode Crack Problems," *Engng. Fracture Mech.* 37, pp. 707~725.
- (11) Li, F.Z., Shih, C.F. and Needleman, A., 1985, "A Comparison of Methods for Calculating Energy Release Rate," *Engng. Fracture Mech.* 21, pp. 405~421.
- (12) Haber, R.B. and Koh, H.M., 1985, "Explicit Expressions for Energy Release Rates Using Virtual Crack Extensions," *Int. J. Numer. Meth-*

- ods Engng. 21, pp. 302~315.
- (13) de Lorenzi, H.G., 1982, "On Energy Release Rate and the J-Integral for 3-D Crack Configuration," *Int. J. Fracture* 19, pp. 183~192.
- (14) de Lorenzi, H.G., 1985, "Energy Release Rate Calculation by Finite Element Method," *Engng. Fracture Mech.* 21, pp. 129~143.
- (15) Raju, I.S., 1987, "Calculation of Strain Energy Release Rates with Higher Order and Singular Finite Elements," *Engng. Fracture Mech.* 28, pp. 251~274.
- (16) Jih, C.J. and Sun, C.T., 1990, "Evaluation of a Finite Element Based Crack Closure Method for Calculating Static and Dynamic Strain Release Rates," *Engng. Fracture Mech.* 37, pp. 313~322.
- (17) Hung, N.D., de Saxce, G. and Kang, C.H., 1991, "The computation of 2-D Stress Intensity Factors Using Hybrid Mongrel Displacement Finite Elements," *Engng. Fracture Mech.* 38, pp. 197~205.
- (18) Owen, D.R.J. and Fawkes, A.J., 1983, *Engineering Fracture Mechanics : Numerical Methods and Applications*, Pineridge Press, Swansea.
- (19) Miyazaki, M., Ikeda, T. and Munakata, T., 1990, "Stress Intensity Factor by Combination of Boundary Element and Finite Element Methods," *Engng. Fracture Mech.* 36, pp. 61~70.
- (20) Zolesio, J.P., 1981, "The Material Derivative (or speed) Method for Shape Optimization," in *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, pp. 1152~1194.
- (21) Choi, K.K. and Haug, E.J., 1983, "Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures," *J. Structural Mech.* 11, pp. 231~269.
- (22) Haug, E.J., Choi, K.K. and Komkov, V., 1984, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York.
- (23) Lee, T.W. and Gross, I.R., 1993, "Energy Release Rate by a Shape Design Sensitivity Approach," *Engng. Fracture Mech.* 44, pp. 807~819.