

〈論 文〉

## 2차원 외팔보의 형상변수에 대한 민감도 오차해석

박 경 진\*

(1992년 1월 8일 접수)

### Sensitivity Error Analyses with Respect to Shape Variables in a Two-Dimensional Cantilever Beam

Gyung-Jin Park

**Key Words :** Sensitivity Analysis(민감도 해석), Error Analysis(오차해석), Structural Optimization(구조최적설계)

#### Abstract

Sensitivity information is required in the optimal design process. In structural optimization, sensitivity calculation is a bottleneck due to its complexities and expensiveness. Various schemes have been proposed for the calculation. Analytic and finite difference methods are the most popular at the present time. However, they have advantages and disadvantages in different ways. Semi-analytic method has been suggested to overcome the difficulties. In spite of the excellency, the semi-analytic method has been found to possess numerical error quite much with respect to shape variables. In this research, the error from each method is evaluated and compared using a shape variable. A two-dimensional beam is selected for an example since it has mathematical solution. An efficient method is suggested for the structural optimization which utilizes finite element method.

#### 기 호 설 명

$K$  : 강성행렬  
 $u$  : 절점에서의 변위벡터  
 $p$  : 외력벡터  
 $bv$  : 설계변수벡터  
 $f$  : 임의의 함수  
 $s$  : 임의의 변수  
 $p_{PS}$  : Pseudo Load 벡터  
 $\Delta$  : 유한차분  
 $c$  : 유한차분 비율  
 $N$  : 외팔보에서의 요소숫자  
 $n$  :  $n$  번째 요소  
 $I_n$  :  $n$  번째 요소의 관성 모멘트

$l_n$  :  $n$  번째 요소의 길이  
 $W_n$  :  $n$  번째 요소 단면의 넓이  
 $h_n$  :  $n$  번째 요소 단면의 높이  
 $K^e$  : 한 요소의 강성행렬  
 $\epsilon$  : 오차지수  
 $E$  : 영의 계수

#### 1. 서 론

일반적으로 구조최적설계시 응력이나 처짐 등의 반응값의 설계변수에 대한 민감도 해석이 필요하다는 것은 주지의 사실이다. 여기서 말하는 민감도란 수학적으로 반응값의 설계변수에 대한 미분치로 정의되며 비선형 문제를 선형화시키는 과정에서의 정보로 이용되고 있다.<sup>(1,2,3)</sup> 최적설계시 일반적으로

\*정회원, 한양대학교 기계공학과

민감도 해석은 설계비용 즉 컴퓨터 사용시간의 대부분을 차지하게 되므로 그 정확에 상당히 주의를 기울여야 한다. 각 경우마다 계산방법이 달라질 수 있는 민감도 해석방법은 이미 많은 사람에 의해 연구가 행해져 왔다. 연속체의 형상설계에 관한 민감도 해석은 다소 다른 방법이 사용되고 있으나 대부분 다음과 같은 세 가지 방법이 주로 개발되어 있는데 이들을 열거해 보면, (1) 수학적으로 해석적인 식을 컴퓨터로 직접 계산하는 방법(analytic method, AM),<sup>(1)</sup> (2) 전체적인 유한차분법으로 구하는 방법(overall finite difference method, OFD)<sup>(2)</sup> (3) 위의 두 방법을 유한요소법을 이용하는 구조 최적설계에서 적당히 조합하여 효율적으로 사용되고 있는 준해석적 방법(semi-analytic method, SAM) 등이다.<sup>(4)</sup>

앞에서 언급된 해석적인 방법은 정확도가 높다는 이점때문에 많이 사용되고 있으나 코드화가 너무 어렵고 특히 형상변수(shape variable, configuration variables)에 대한 민감도는 거의 코딩이 안되어 있는 상태이다. 전체적인 유한차분법에 의한 방법은 프로그램 작성이 극히 간단해서 자주 이용되고 있으나 구조설계의 경우 계산량이 극도로 많기 때문에 대규모의 문제에서는 그 효율성에 의문이 제기된다. 마지막으로 준해석적 방법은 유한요소법의 특성을 효과적으로 이용하여 프로그램 개발이 쉽게 이루어질 수 있어서 넓게 사용됨을 볼 수 있다.

본 연구에서는 준해석적 방법에 초점을 맞추어 전개를 하려 한다. 대개의 최적설계방식이 그렇듯 준해석적 방법도 치수변수에 관해 응용이 이루어졌는데 그 정확도에 문제가 나타나지는 않는다. 그러나 최근 형상변수에 대해 응용을 할 경우 오차가 큰 것이 발견되었다.<sup>(5)</sup> 물론 치수변수에 관해서도 준해석적 방법에서 오차가 존재한다는 보고 있으나 그 절대량이 크지 않으므로 그다지 심각하지 않다고 사료된다.<sup>(6)</sup> 여기서는 준해석적 방법의 오차의 과정이 수학적으로 전개될 것이며, 설정된 구조물에 대한 수치적 계산결과가 논의될 것이다. 해석의 대상 구조물로는 임밀해가 존재하여 비교분석이 용이한 2차원 외팔보가 선택되었으며, 여러가지 방법과의 비교로서 준해석적 방법이 논의되고 효과적인 방법선택이 제안될 것이다.

## 2. 유한요소법을 이용한 민감도 해석

유한요소법을 이용한 구조물의 평형 방정식은

$$K(b)u = p \quad (1)$$

로 표기되는데,  $K$ 는 강성행렬,  $u$ 는 절점에서의 해당하는 방향으로의 변위,  $p$ 는 외력,  $b$ 는 설계변수벡터이다. 구조최적설계시 목적함수나 제한조건의 선형화에 사용되는 민감도 해석은

$$\frac{du}{db} = \frac{d(K(b)^{-1}p)}{db} \quad (2)$$

를 근간으로 계산하는데,  $b$ 는 치수 최적설계(size optimization)에서는 보 구조물의 경우 부재의 단면 치수, 형상최적설계(shape optimization 혹은 configuration optimization)에서는 형상을 결정하는 길이 등의 형상변수이다.

해석적 방법에서는 식(2)의 계산이 수학적으로 이루어지는데 반하여 유한차분법(overall finite difference method)은 다음의 식을 이용한다.

$$\frac{du}{db} \approx \frac{\Delta(K^{-1}(b)p)}{\Delta b} \equiv \left[ \frac{\Delta u}{\Delta b} \right]_{\text{OFD}} \quad (3)$$

유한차분법에 의한 민감도 해석은 대개 다음의 두 가지 방법으로 이루어져 있는데 Forward-Difference와 Central-Difference 방법이다. Forward-Difference는  $f$ 가 대상함수,  $s$ 를 임의의 변수라 할 때

$$\frac{df}{ds} \approx \left[ \frac{\Delta f}{\Delta s} \right]_{\text{FD}} = \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s} \quad (4)$$

으로 표현되며, Central-Difference는

$$\frac{df}{ds} \approx \left[ \frac{\Delta f}{\Delta s} \right]_{\text{CR}} = \frac{f(s + \Delta s/2) - f(s - \Delta s/2)}{\Delta s} \quad (5)$$

으로 표기되는데 일반적인 함수의 미분에서는 Central-Difference방법이 오차가 적은것으로 알려져 있다. 앞에서 언급한 대로 해석적인 방법은 정확하며 수학적으로 많이 개발되어 있으나 프로그램 작성이 너무 어려운 관계로 응용에 제약이 있다고 하겠다. 전체적인 유한차분법에 의한 방법은  $\Delta s$ 의 크기에 따른 오차가 존재함에도 불구하고 비교적 정확하나 각 변수의 변화마다 구조해석을 해야하는 이유로 인해 대규모 구조설계시는 고가의 방법이다. 특히 전체적인 유한차분법시 Central-

Difference가 사용되는 경우는 계산량이 두배로 증가함으로 인해 실용적이지 못하다. 위 두 방법의 장점들을 효율적으로 조합한 이론이 준 해석적 방법(semi-analytic method)인데 소개하면 다음과 같다. 식(1)에서 미분을 하면

$$K \frac{du}{db} = \frac{dp}{db} - \frac{dK}{db} u \equiv p_{ps} \quad (6)$$

으로 유도되는데 여기서의 미분식만 유한차분법으로 구하게 된다. 즉

$$\frac{du}{db} \approx K^{-1} \left[ \frac{\Delta p}{\Delta b} - \frac{\Delta K}{\Delta b} u \right] \equiv \left[ \frac{\Delta u}{\Delta b} \right]_{SAM} \quad (7)$$

으로 민감도를 구하게 된다.

일반적으로 유한차분법에서는 그 간편성으로 인하여 Forward-Difference를 사용하고 있다. 준 해석적 방법의 장점은 식(3)에서 각 민감도를 구하기 위해 유한요소법 과정을 따로 거쳐야 하는 불편함을 개선하는데 있다. 유한요소 프로그램에는 각 요소의 강성행렬이 저장되어 있으나 강성 행렬을 구하는 부 프로그램이 존재하는데 준 해석적 방법에서는 이를 쉽게 이용할 수 있다. 유한차분법으로 민감도를 계산할 때는 다음과 같은 설계변수에 변화를 주는데

$$\Delta b_i = c \cdot b_i \quad (8)$$

여기서  $c$ 는 유한차분의 비율을 의미하며 그 크기는 민감도 해석의 오차량을 결정짓게 된다. 이와같이  $c$ 의 크기는 대단히 중요함에도 불구하고 그 적정량이 일반적으로 제시되지 못한다. 그 이유가  $c$ 가 클 경우는 많은 Truncation Error가 유발하게 되고  $c$ 가 극히 적을 경우는 Round-off Error가 발생하기 때문이다. 따라서 각 경우의 문제마다  $c$ 의 크기가 사용자에게 따라서 임의로 정해지는 경향이 있다.

### 3. 이론적 민감도 오차해석

본 연구에서 택한 2차원 외팔보는 Fig. 1에 보여지는 바와 같다. 이 외팔보는  $N$ 개의 요소로 구성되어 있으며 수학적인 엄밀해 및 유한요소법 상의 해석적인 민감도 등이 쉽게 얻어지므로 비교분석이 용이하다. 해석적 방법으로 민감도를 계산할시는 오차가 없으므로 수학적으로 얻어진 것과 동일할 것으로 예상된다. 전체적인 유한차분법, 즉 식(3)

을 이용한 방법에서의 민감도 오차량은 그 과정의 복잡함으로 인해 정량적으로 보여지기는 대단히 어렵다. 준 해석적 방법에서는 외력을 무시할 경우 식(7)에서 강성행렬의 유한차분법의 오차량에 수개의 벡터 및 행렬이 곱해진 결과가 전체 오차량이 된다. 여기서는 전체 오차량에는 강성행렬의 오차량이 가장 중요한 것으로 여겨지며 이에 대한 수학적 및 수치적 고찰이 이루어진다.

#### 3.1 치수변수에 대한 오차해석

Fig. 1의 외팔보의 각 요소는 Fig. 2의 보 요소로 보여질 수 있는데 각 요소의 강성행렬은 다음과 같이 된다.

$$K^e = \frac{2 \cdot E \cdot I_n}{1_n^3} \begin{bmatrix} 6 & 31_n \cdot -6 & 31_n \\ & 21_n^2 & -31_n & 1_n^2 \\ \text{Sym} & & 6 & -31_n \\ & & & & 21_n^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{여기서 } I_n = \frac{w_n \cdot h_n^3}{12} \quad (10)$$

으로서 단면의 관성 모멘트이며  $1_n, w_n, h_n$ 은  $n$ 번째 요소의 치수로서 Fig. 1에 표기되어 있다. 치수변수  $w_n$ 이나  $h_n$ 은  $I_n$ 에만 포함되어 있으므로 치수 설계변수에 대한 준 해석적 방법에서의 오차는  $I_n$ 에만 의존하게 된다. 임의의 함수  $f$ 의 준 해석적 방법에서의 오차치수를

$$\epsilon_i = \frac{\left[ \frac{\Delta f(b_i)}{\Delta b_i} - \frac{\partial f(b_i)}{\partial b_i} \right]}{\frac{\partial f(b_i)}{\partial b_i}} \quad (11)$$

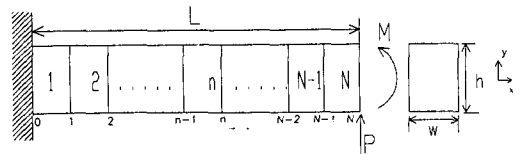


Fig. 1 Cantilever beam finite element model

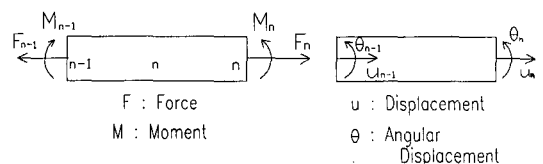


Fig. 2 A Planar beam element for finite element analysis with respect to Fig. 1

로 정의할 때

$$\frac{\Delta f(b_i)}{\Delta b_i} = (1 + \varepsilon_i) \frac{\partial f(b_i)}{\partial b_i} \quad (12)$$

로 된다. 식(10)에서  $h_n^3$ 을  $f(b_i)$ 라 할 때

$$K^e = f(b_i) K_{sub} \quad (13)$$

가 되는데  $K_{sub}$ 는  $f(b_i)$ 를 인수로 나눈 나머지 값을 의미한다. 식(7)에서  $p=0$ 으로 가정하여 식(13)을 식(7)에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u}{\Delta b} &= -K^{-1} \cdot \frac{\Delta f(b_i)}{\Delta b_i} \cdot K_{sub} \cdot u \\ &= -K^{-1} \left[ (1 + \varepsilon_i) \cdot \frac{\partial f(b_i)}{\partial b_i} \right] K_{sub} \cdot u \\ &= (1 + \varepsilon_i) \left[ -K^{-1} \cdot \frac{\partial f(b_i)}{\partial b_i} \cdot K_{sub} \cdot u \right] \\ &= (1 + \varepsilon_i) \cdot \frac{\partial u}{\partial b_i} \end{aligned} \quad (14)$$

로 되어서 준 해석적 방법의 오차는  $\varepsilon_i$ 에만 의존하고 Fig. 1의 요소숫자에는 무관하게 된다.

여기서 오차의 주종을 이루는  $h_n^3$ 의 Forward-Difference에서의 오차를 보면 식(12)는 식(9)의 관계를 사용할 때<sup>(6)</sup>

$$\varepsilon_{hn} = \frac{c^2 + 3c}{3} \quad (15)$$

가 되며 Central-Difference방법에서는

$$\varepsilon_{hn} = \frac{c^2}{12} \quad (16)$$

이 되어서  $c$ 의 값에 따라서의 오차의 크기를 보여주는 Table 1에서 보는 바와 같이 Central-Difference에서의 오차가 훨씬 작으며  $c$ 가 작아짐에 따라 그 오차의 크기가 더욱 더 작아짐을 알 수 있

**Table 1** Error analysis of a stiffness matrix with respect to a size variable

	Forward-Difference	Central-Difference
$c=0.1$	0.1033 E+00	0.8333 E-03
$c=0.01$	0.1003 E-01	0.8333 E-05
$c=0.001$	0.1000 E-02	0.8333 E-07
$c=0.0001$	0.1000 E-03	0.8333 E-09
$c=0.00001$	0.1000 E-04	0.8333 E-11

다. 즉, 치수설계변수 이용시 민감도는 요소분할 숫자에 영향을 받지 않아서 큰 오차는 없다 할지라도 Central-Difference방법에서의 오차가 훨씬 작음을 볼 수 있다.

### 3.2 형상변수에 대한 오차해석

앞에서의 과정을 반복해서 형상변수  $1_n$ 에 대한 강성행렬의 Forward-Difference에 의한 미분행렬은 다음과 같다.

$$\frac{\Delta K_n^e}{\Delta 1_n} = \frac{2EI_n}{1_n^2} \begin{bmatrix} \frac{18}{1_n^2} C_1 & \frac{-6}{1_n} C_1 & \frac{-18}{1_n^2} C_1 & \frac{-6}{1_n} C_2 \\ & 2C_3 & \frac{6}{1_n} C_2 & C_3 \\ \text{Sym} & & \frac{18}{1_n^2} C_1 & \frac{6}{1_n} C_2 \\ & & & 2C_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$C_1 = \frac{c^2/3 + c + 1}{(c+1)^3} \quad (18)$$

$$C_2 = \frac{c/2 + 1}{(c+1)^2} \quad (19)$$

$$C_3 = \frac{1}{1+c} \quad (20)$$

Central-Difference방법에 의한 미분행렬은

$$\frac{\Delta K_n^e}{\Delta 1_n} = \frac{2EI_n}{1_n^2} \begin{bmatrix} \frac{18}{1_n^2} D_1 & \frac{6}{1_n} D_1 & \frac{-6}{1_n^2} D_1 & \frac{6}{1_n} D_2 \\ & 2D_3 & \frac{-6}{1_n} D_2 & D_3 \\ \text{Sym} & & \frac{6}{1_n^2} D_1 & \frac{-6}{1_n} D_2 \\ & & & 2D_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$D_1 = \frac{-3 - c^2/4}{(1+c/2)^3(1-c/2)^3} \quad (22)$$

$$D_2 = \frac{1}{(1-c^2/4)^2} \quad (23)$$

$$D_3 = \frac{-1}{(1+c/2)(1-c/2)} \quad (24)$$

가 되며,  $u^t$ 를 Fig. 1에서의 끝점에서의 처짐이라 할 때

$$\frac{\Delta u^t}{\Delta 1_n} = \frac{\partial u^t}{\partial 1_n} = \partial(c, n, N) \quad (25)$$

으로 되어서  $\varepsilon$ 이  $c, n, N$ 의 함수가 됨을 알 수 있다.<sup>(7)</sup> 여기서 주목되는 것은 식(25)의 오차량이

**Table 2** Error analysis of a stiffness matrix with respect to a shape variable

	Forward-Difference	Central-Difference
$c=0.1$	0.1736 E+00	-0.5019 E-02
$c=0.01$	0.1970 E-01	-0.5000 E-04
$c=0.001$	0.1997 E-02	-0.5000 E-06
$c=0.0001$	0.2000 E-03	0.5000 E-08
$c=0.00001$	0.2000 E-04	0.5000 E-10

요소수  $N$ 에 관계가 된다는 점이다. 한편 강성행렬에 관해서만 계산한 식(17)과 식(21)의 미분값은 단지  $c$ 에만 영향을 받으며 그  $K(I, J)$ 에 대한 오차지수는 다음과 같다.

$$\frac{\frac{\Delta K(I, J)}{\Delta 1_n} - \frac{\partial K(I, J)}{\partial 1_n}}{\frac{\partial K(I, J)}{\partial 1_n}} \quad (26)$$

이 되며 임의로  $I=1, J=2$ 를 선택했을 경우 식(26)값의 Forward-Difference에 대한 오차는

$$\frac{-(c^2+2c)}{(1-\frac{c^2}{4})^2} \quad (27)$$

이며 Central-Difference의 경우는

$$\frac{c^4/16-c^2/2}{(1-\frac{c^2}{4})^2} \quad (28)$$

로 된다. 식(27)과 (28)의 계산값이 Table 2에 보여지고 있는데 그 경향이 치수설계변수의 경우와 동일하게 Central-Difference의 경우가 Forward-Difference보다 오차량이 크게 작음을 알 수 있다. Central-Difference의 경우가 오차가 크게 작다는 것은 일반적으로 많이 알려져 있는 사실이다. 형상설계변수에 대한 식(2)의 미분값을 계산할 경우, 식(25)에 나타나 있듯이 요소분할수에 의해서도 오차의 크기가 영향을 받는데 종래의 연구에서는 Forward-Difference의 경우의 실험결과로 요소분할의 숫자에 의한 영향이 너무 강조되는 경향이 있었다.<sup>(6,7)</sup> 위의 결과를 살펴보면 요소의 분할 수도 중요한 요인이거나 Forward-Difference방법에서는 그 이전에 강성행렬 미분시 오차가 큰 작용을 할 것으로 예상될 수 있다. 이러한 사항의 수치적 계

산이 다음 장에 보여질 것이다.

#### 4. 형상변수에 대한 오차해석의 수치적 결과

앞에서의 이론적 결과에 대한 수치적 실험의 예제로서 Fig. 1에 보여지고 있는 2차원상의 외팔보를 택하였다. 임의로 여기서는 단위에 대한 고려없이 외력  $P=-100, M=100, L=50, I_n=100 (n=1, N), E=30 \times 10^6$ 으로 정하여 Fig. 1의 요소의 수  $N$ 을 1부터 30까지 변화시켜 가면서 민감도를 비교하였다. 비교된 민감도는  $u_i$ 를 Fig. 1의 우측 끝단에서의 처짐이라 할때

$$\frac{\partial u_i}{\partial L} \quad (29)$$

인데 식(29)의 값을 수학적인 방법과, 유한요소법의 강성행렬을 식(2)의 해석적으로 미분한 값, 식(7)의 준해석적 방법으로 Forward-Difference와 Central-Difference방법으로 구한 값, 식(3)의 전반적인 유한차분법으로 구한 값들의 비율을 비교하였다. 그 결과가 보여지고 있는데 편의상 위의 방법들을 각각 *MH, AM, FD, CT, OFD*로 명명하여, 가로축을 Fig. 1의  $N$ 값으로 세로축을 각 경우의 가장 정확하다고 여겨지는 *MH*법에 대한 비율로 정의하였다. 해석을 위하여 사용된 컴퓨터는 IBM 386이며 프로그램은 OS/2에서 더블 프리시전이 선언된 FORTRAN언어로 작성되었다.<sup>(8)</sup>

##### 4.1 각 미분방법에 대한 결과

각 방법에 대해 식(8)의  $c$ 가 변화될 때의 추세가 Fig. 3~8에 보여지고 있다. AM방법의 경우  $c$ 와는 상관없는 것은 당연하다고 하겠는데 Fig. 3에 보여지듯이 요소분할 숫자  $N$ 에 무관하게 거의 정확하다고 할 수 있겠다. 준 해석적 방법시 Forward-Difference방법에 의한 결과가 Fig. 4에 보여지고 있는데  $c$ 가 줄어들수록, Element 수가 줄어들수록 더욱 정확해지는 현상이 관찰되었다. Fig. 4의 위 부분을 확대한 것이 Fig. 5에 보여지고 있는 바 Fig. 4에서 확인된 사실이 극명하게 나타나 있다. 유한차분값  $c$ 가 작아질수록 오차가 작아지는 경향은 이 방법이 앞의 이론부분에서 고찰된 것과 같이 Truncation 오차가 대단히 큰 방법임을 나타내고 있다. 즉  $c$ 가 아주 작아야만 민감도가

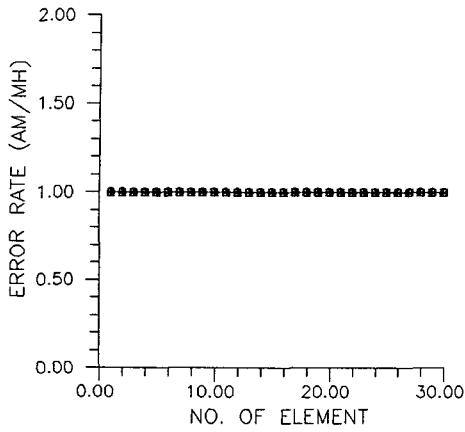


Fig. 3 Rate of tip displacement derivative for analysis method

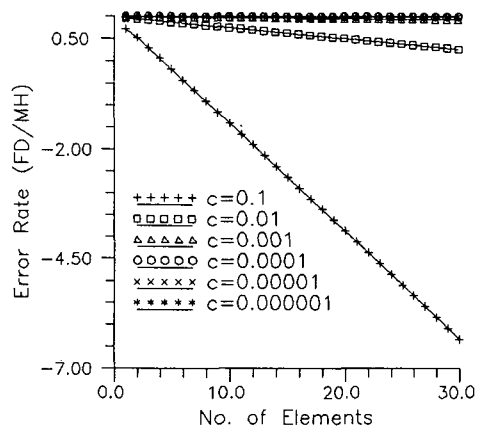


Fig. 4 Rate of tip displacement derivative for forward-difference method ( I )

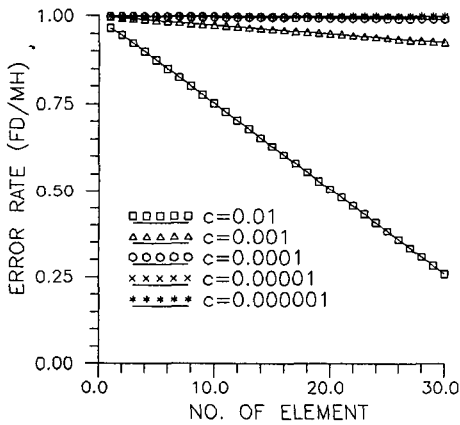


Fig. 5 Rate of tip displacement derivative for forward-difference method ( II )

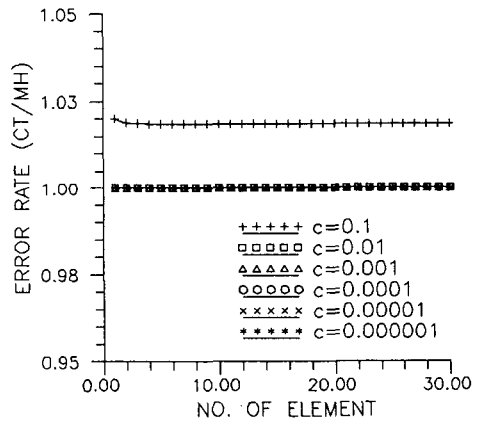


Fig. 6 Rate of tip displacement derivative for central-difference method

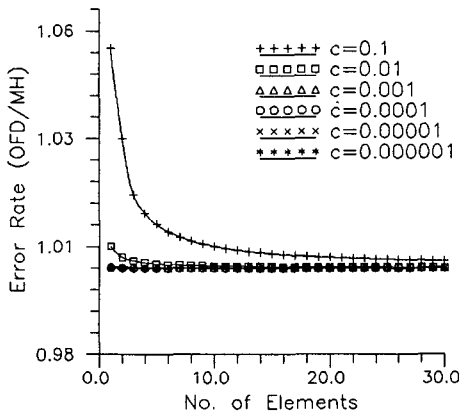


Fig. 7 Rate of tip displacement derivative for overall finite difference method ( I )

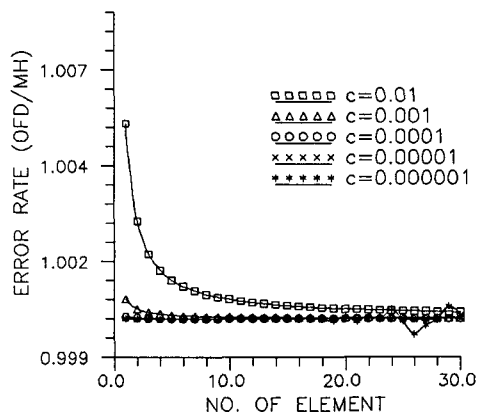


Fig. 8 Rate of tip displacement derivative for overall finite difference method ( II )

정확해지는데 구조물이 복잡해 질 경우  $c$ 가 극히 작아지면 Round-off 오차가 커지므로  $c$ 의 크기에 한계가 있다 하겠다. 또한  $N$ 이 커질 경우 더욱 부정확해짐을 볼 수 있는데 이는 복잡한 구조물에서는 사용하기가 어렵다는 것을 암시하고 있다. Fig. 6에 보여지는 바와 같이 CT 방법에서는  $c=0.1$ 로 대단히 큰 경우 외에는  $c$ 의 크기가 요소숫자에 관계없이 극히 정확한 값이 얻어지고 있다. 이는 형상변수에 대한 민감도 해석 오차량은 식(25)에 보이듯이  $c$ 와 요소수  $N$ 의 함수이나 식(28)의 계산결과 강성행렬에 대한 오차가 극히 작으므로 전체 오차량이 작아진다고 분석된다. 따라서 요소숫자  $N$ 은 오차량에 큰 영향을 미치지 않는다고 할 수 있겠다. OFD방법에 의한 민감도 해석 오차량이 Fig. 7에 나타나 있는데,  $c$ 가 큰 경우에는 많은 Truncation Error가 포함되어 있음을 알 수 있다. 오차의 경향을 더욱 뚜렷이 보여주기 위해서 Fig. 7의 아래부분이 확대되어 Fig. 8에 보여지고 있다. 여기서는 요소수  $N$ 이 커질수록 더욱 정확해지는데 이는 유한요소법 적용의 경우 요소수가 커질수록 더욱 정확한 해가 구해지는 것과 무관하지 않다고 보겠다. 유한차분량  $c$ 가 작아질수록 정확해지는데는 당연하다고 하겠으나  $c$ 가 극히 작을 경우는 요소수가 많을 때 오차량에 떨림을 볼 수 있는데 이는 OFD방법 적용시 복잡한 계산과정으로 인해 Round-off오차가 크게 작용하는 것으로 추정된다. 여기서 주목되는 것은 Fig. 7의 CT방법의 경우는  $c$ 가 작아지더라도 이러한 현상이 발견되지 않는다는 점이다.

4.2 유한차분의 크기에 따른 각 방법의 비교

유한차분의 크기  $c$ 에 따른 네 방법의 비교가 Fig. 9~18에 보여지고 있다. Fig. 9~10에 보는 바와 같이  $c=0.1$ 로 유한차분값이 대단히 큰 경우에 FD방법은 대단히 커다란 오차를 가지며 CT가 OFD방법은 정확하지는 않더라도 요소숫자에 대해 비교적 안정적인 오차량을 보이고 있다. 민감도 해석서 흔히 쓰이는  $c$ 의 영역에 대한 오차량의 분석이 Fig. 11~14에 보여지고 있다. 여기서 특기할 것은 OFD방법에서는 요소수의 크기에 따라 오차량이 변화하는데 반해 CT방법에서는 큰 변화가 관찰되지 않는다는 점이다. 물론 본 연구에서 택한 예제에 한정된 결과라고도 볼 수 있으나 종래 OFD방법을 기준삼아 오차량을 분석하는 것이<sup>(5,6)</sup>

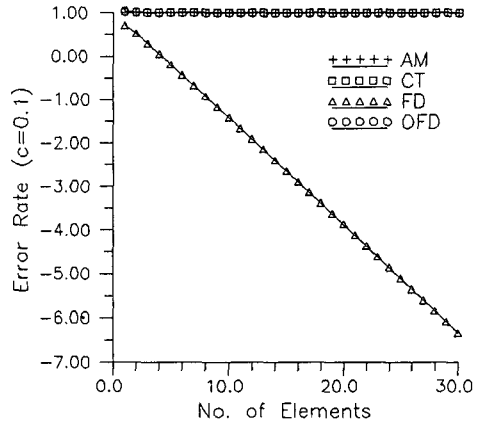


Fig. 9 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.01$ ) (I)

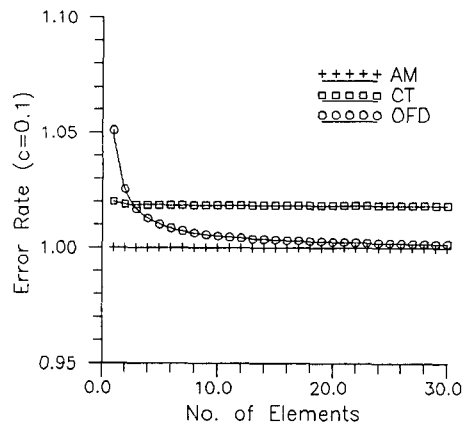


Fig. 10 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.01$ ) (II)

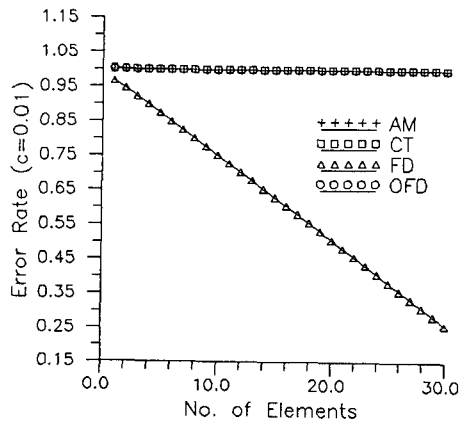


Fig. 11 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.01$ ) (I)

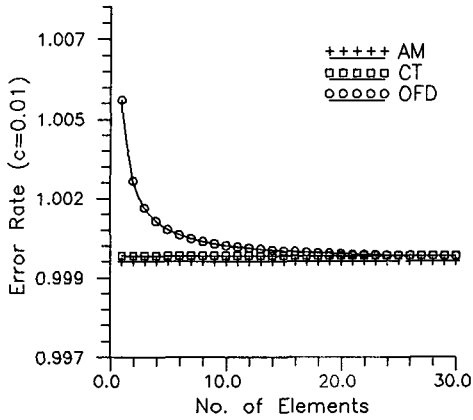


Fig. 12 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.01$ ) (II)

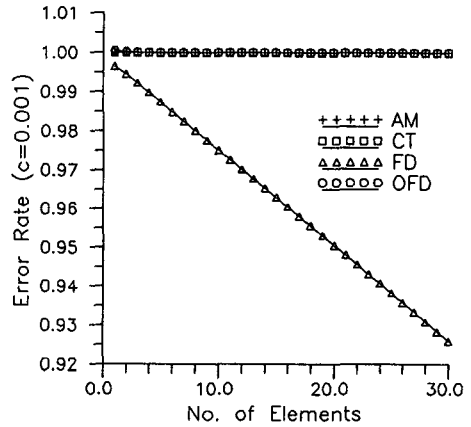


Fig. 13 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.01$ ) (I)

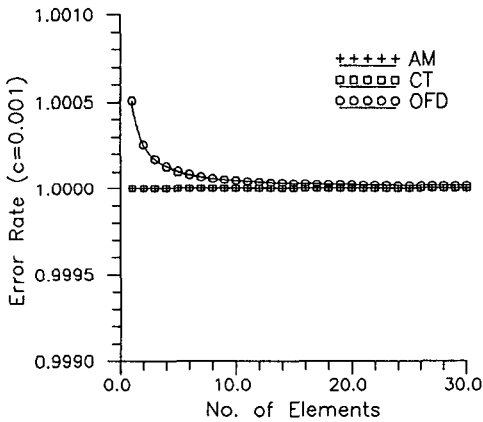


Fig. 14 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.001$ ) (II)

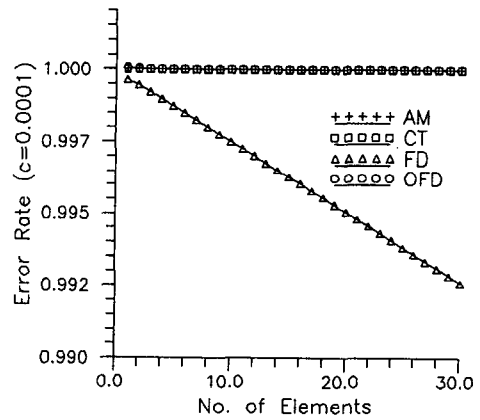


Fig. 15 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.0001$ ) (I)

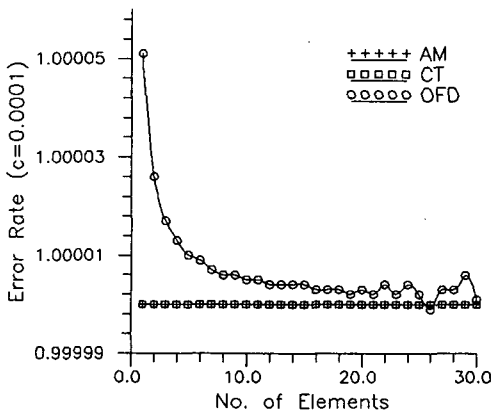


Fig. 16 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.0001$ ) (II)

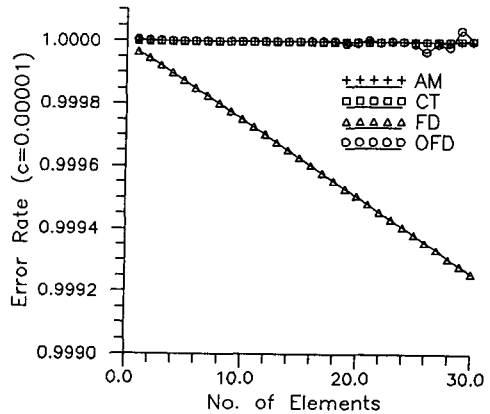


Fig. 17 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.00001$ )



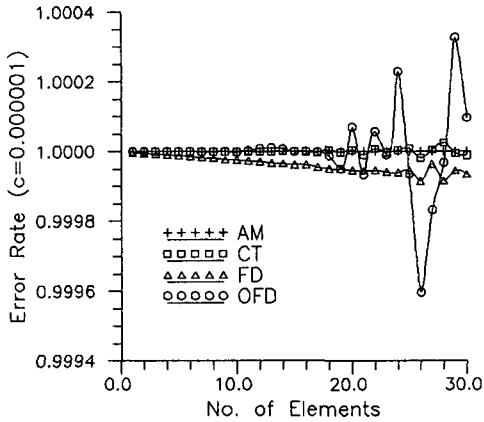


Fig. 18 Tip displacement derivatives with respect to beam length ( $c=0.000001$ )

때로는 맞지 않는 결과를 보여 줄수도 있다는 것이 추론될 수 있겠다. 유한차분값  $c$ 가 극히 작을 경우가 Fig. 15~18에 보여지고 있는데  $c$ 가 극히 작을 경우는 FD를 제외한 모든 방법에서 정확한 결과가 추출되었다. Fig. 16에서는 OFD방법의 정확성이 요소숫자에 관련이 된다는 앞에서의 결과와 같은 현상이 관찰되었다. Fig. 17~18에는  $c$ 의 크기가 극히 작을 경우 대한 오차경향이 보여지고 있는데 모든 경우 그 절대량은 미미하다고 생각된다. 그럼에도 불구하고 CT방법이 가장 정확하게 나타났으며, 앞에서의 결과와 마찬가지로 OFD방법에서는 요소숫자  $N$ 이 큰 경우 Round-off 오차에 의한 떨림이 관찰되었다.

## 5. 결 론

보 요소를 가진 유한요소법을 이용한 최적설계시 민감도 해석의 몇 가지 방법에 대한 오차가 비교분석되었다. 형상설계변수에 대한 민감도는 높은 비선형성으로 인해 각 방법에 따라 큰 Truncation 오차를 보여 주고 있다. 앞에서의 결과에 의해 비록 본 연구에서 채택된 예제에 한정된 것이긴 하나 이를 일반화하여 다음과 같은 결론이 얻어질 수 있다.

- (1) 수학적인 방법(MH)은 당연히 정확하나 일반적인 경우로의 적용은 불가능하다.
- (2) 해석적인 방법(AM)은 정확하나 그에 대한 프로그래밍 작업이 대단히 고가이다.
- (3) 전반적인 유한차분법 방법(OFD)은 프로그

램딩도 간단하고 정확성도 비교적 우수하다고 간주되나 계산시간이 너무 크고 때로는 오차량이 커질 때가 있는 것이 관찰되었다. 따라서 오차해석시 OFD방법이나 그에 대한 보정된 값을 가지고 엄밀해로 대처하여 결론을 짓는 종래의 연구결과는 다소 수정이 되어야 할 것으로 여겨진다.

(4) 준 해석적 방법은 위 두가지의 좋은 점들의 조합으로서 우수한 시도라 생각되나 현재 많이 쓰이고 있는 Forward-Difference(FD) 방법은 Truncation 오차량이 너무 큰 성질로 인해 형상설계 변수에 대한 민감도 해석에는 적합하지 않다.

(5) 준 해석적 방법시 Central-Difference(CD) 방법은 나타나는 결과로 보아 극히 우수하다고 사료된다. CD방법이 FD방법보다 더 정확하다는 것은 결과이다. 즉 형상설계변수에 대한 준 해석적 방법의 오차량은 요소숫자 및 강성행렬 미분의 오차량에 의존하게 되나, CD방법에 의해 강성행렬에 대한 오차량이 작아지게 되면 요소숫자에 크게 상관없이 민감도 해석이 정확해질 수 있다.

이상의 결론에서 CD방법에 의한 민감도 해석이, 강성행렬 미분의 정확성과 간편성으로 인해 가장 우수하다고 사료된다. 따라서 형상설계변수에 대한 준 해석적 민감도 해석은 정확하지 않다는 일부 연구자들의 우려는 극복될 수 있다고 생각된다. 앞으로는 본 연구에서 수치적으로만 관찰된 일부 결과들이 수학을 이용하여 정량적으로 보여지는 것이 필요하며 좀더 다양한 구조물에 대한 실험이 요구되어 현재 진행중에 있다. 복잡한 구조물에 대해 적용할시는 수학적인 해가 불가능하므로 본 연구에서 나타난 결과로 보아 해석적 방법을 엄밀해로 가정하여 비교해 볼 수 있겠다. 따라서 OFD방법이나 이를 보정하기 엄밀해를 근사시켜 만든 결과를 엄밀해로 가정하는 것은 다소 위험하다고 사료된다.

## 참고문헌

- (1) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, "Applied Optimal Design," John-Wiley & Sons, New York, NY, U.S.A.
- (2) Thanedar, P.B., Arora, J.S., Tseng, C.H., Lim, O.K. and Park, G.J., 1986, "Performance of Some SQP Algorithms on Structural Design Problems," Inter. J. for Num. Meth. in Eng. Vol

- 23, pp. 2187~2203.
- (3) 임오강, 이병우, 조수익, 1990, "개인용 전산기를 이용한 반복 2차계획법의 수치성능개선", 대한기계학회논문집, 제14권 제4호, pp. 850~856.
- (4) Prasad, B. and Emerson, J.F., "1982," A General Capability of Design Sensitivity for Finite Element Systems," Proceeding of the 23rd AIAA/ASME/ASCE/AHS Structure, Structural Dynamics, and Materials Conference.
- (5) Barthelemy, B. and Haftka, R.T., 1988, "Accuracy Analysis of the Semi-Analytical Method for Shape Sensitivity Calculation,"
- (6) Barthelemy, B. and Haftka, R.T., 1988, "Accuracy Problems Associated with Semi-Analytical Derivatives of Static Response," Finite Elements in Analysis and Design 4, pp. 249~265.
- (7) Lust, R.V. and Fenyves, P.A., 1989, "Error Analysis for Semi-Analytic Displacement Derivatives with Respect to Shape and Sizing Variables," Proceedings of the 30th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference.
- (8) Ben Ezzel, 1989, "Writing: OS/2 Resident Utilities," Addison-Wesley Publishing Company, Inc.