

〈論 文〉

## 경계적분방정식을 이용한 축대칭 열전도 고체의 형상설계민감도 해석

이 부 윤\*

(1992년 5월 9일 접수)

### Shape Design Sensitivity Analysis of Axisymmetric Thermal Conducting Solids Using Boundary Integral Equations

Boo Youn Lee

**Key Words :** Shape Optimal Design(형상최적설계), Sensitivity Analysis(민감도해석), Axisymmetric(축대칭), Thermal Conducting Solid(열전도고체), Boundary Integral Equation(경계적분방정식), Boundary Element Method(경계요소법)

#### Abstract

A generalized method is presented for shape design sensitivity analysis of axisymmetric thermal conducting solids. The shape sensitivity formula of a general performance functional arising in shape optimal design problem is derived using the material derivative concept and the adjoint variable method. The method for deriving the formula is based on standard axisymmetric boundary integral equation formulation. It is then applied to obtain the sensitivity formulas for temperature and heat flux constraints imposed over a small segment of the boundary. To show the accuracy of the sensitivity analysis, numerical implementations are done for three examples. Sensitivities calculated by the presented method are compared with analytic sensitivities for two examples with analytic solutions, and compared with sensitivities by finite differences for a cooling fin example.

#### 1. 서 론

주어진 제한조건하에서 수치적으로 최적의 형상을 구하고자 하는 형상최적설계 분야에 있어서 가장 중요한 문제중의 하나는 형상설계민감도를 정확하게 계산하는 것이다. 형상설계민감도의 해석방법으로는 연속체적 관점에서 형상변화를 일반적으로 나타내고, 목적함수나 제한조건식의 형상변화에 따른 변분, 즉 형상민감도를 해석적으로 유도하는 방

법이 널리 연구되고 있다. 민감도의 정확성은 최적화 알고리즘 수행시의 반복과정(iteration) 회수에 직접적인 영향을 미치므로 민감도의 정확한 계산이 효율적인 최적화를 위한 관건이라고 할 수 있다. 1980년대에 출현한 경계요소법은 경계에서의 해의 정확성과 격자재구성(remeshing)의 편리함 등의 유한요소법에 비해 상대적인 장점때문에 형상최적화 분야에 널리 사용되고 있다. 형상최적화 문제에 경계요소법을 이용한 연구결과는 많이 발표되었으나, (1,2) 경계요소법의 근간이 되는 경계적분방정식에서 출발하여 연속체적 관점에서 해석적인 민감도 공식을 유도한 후 이산화(discretization)하여 상태

\*정희원, 한국중공업(주) 기술연구소

변수 및 형상설계민감도를 계산한 연구는 그다지 많지 않다. Kwak과 Choi,<sup>(3)</sup> Choi와 Kwak<sup>(4,5)</sup>은 경계적분방정식의 정식화를 이용하여 전미분방법<sup>(6)</sup>과 보조변수방법으로 형상설계민감도 공식을 유도하기 위한 일반적인 방법을 제안하고, 포텐셜문제와 2차원 탄성문제에 이를 적용하였다. Barone과 Yang<sup>(7,8)</sup>은 경계적분방정식을 전미분하여 얻어진 새로운 경계적분방정식에서 상태변수의 민감도를 직접 계산하도록 하는 직접 미분방법을 제안하였으며, 2차원 및 3차원 탄성문제를 다루었다. Rice와 Mukherjee<sup>(9)</sup>는 Barone과 Yang<sup>(7,8)</sup>의 방법을 축대칭 탄성문제로 확장하였다. 그들의 직접 미분방법은 경계적분방정식을 전미분하는 방식인데 비해 Choi와 Choi,<sup>(10)</sup> Choi와 Kwak<sup>(11)</sup>은 보조변수방법에서 유도하여 사용한 적분항등식을 전미분하는 방식을 사용하였다. Kwak과 Lee,<sup>(12)</sup> Lee와 Kwak<sup>(13,14)</sup>은 Choi와 Kwak<sup>(5)</sup>의 보조변수방법을 열탄성문제로 확장하였으며, 2차원 및 축대칭 열탄성문제의 수치적 응용을 다루었다. 최근에 Lee, Choi와 Kwak<sup>(15)</sup>은 포텐셜문제를 다룬 Kwak과 Choi<sup>(3)</sup>의 방법을 대류 경계조건을 포함하도록 확장하여 2차원 열전도 고체의 형상설계민감도 공식을 유도하였다.

형상최적설계의 적용대상이 될 수 있는 열전도 고체로는 열의 방출량을 최대화하기 위한 냉각핀(cooling fin), 균일하게 열을 발산하기 위한 열발산기(thermal diffuser), 소재 접촉면에서의 온도를 균일하게 하기 위한 성형다이(moulding die) 등을 들 수 있다. 이러한 형상최적화 문제들에서 목적함수나 제한조건을 나타내는 성능 범함수는 일반적으로 온도와 열속(heat flux)의 함수로 정의할 수 있다. 본 연구에서는 축대칭 열전도 고체의 형상설계민감도 해석을 위하여 2차원 문제를 다룬 Lee, Choi와 Kwak<sup>(15)</sup>의 방법을 축대칭 문제로 확장하였다. 축대칭 형태로 표시된 직접 및 간접 경계적분방정식의 정식화에 기초하여 전미분방법과 보조변수방법으로 형상최적화 문제에서 발생하는 일반적인 성능 범함수의 형상설계민감도 공식을 유도하고, 온도 및 열속의 제한조건에 이를 응용하였다. 제시된 민감도해석방법의 정확성을 검증하기 위하여 해석적인 해를 갖는 원통문제와 구문제를 다루었는데, 두 문제에 대하여 민감도 공식을 이용하여 수치계산된 결과를 해석적인 민감도와 비교하였다. 또한 복잡한 수치해로서 냉각핀(cooling fin)

문제를 다루었으며, 민감도 공식에 의한 계산 결과를 유한차분(finite difference)으로 수치미분한 결과와 비교하였다.

## 2. 축대칭 열탄성 고체의 경계적분방정식

등방성이고 균질인 고체에 대한, 정상상태하의 축대칭 열전도 문제에 대해 생각한다. 고려하는 임의의 영역은 원통좌표계(cylindrical coordinate system)를 이용하여 Fig. 1과 같이 나타낼 수 있으며, 여기서 영역  $\Omega$ 와 경계  $\Gamma$ 는  $(R, Z)$  평면에 있는 축대칭 단면의 영역 및 경계를 각각 나타낸다. 이제부터 영역 및 경계상의 임의의 점을 나타낼 때  $x$  혹은  $x_0$ 로 표기하기로 한다. 온도를  $T$ 로 나타내면, 단위면적당의 열유량을 나타내는 열속벡터  $q_i$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$q_i(T) = -kT_{,i}, \quad i=R, Z \quad (1)$$

여기서  $k$ 는 열전도상수(thermal conductivity)를 나타낸다. 일반적으로 정상상태의 축대칭 열전도 문제에 대한 평형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial q_R(T)}{\partial R} + \frac{\partial q_Z(T)}{\partial Z} + \frac{q_R(T)}{R} - Q(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (2)$$

여기서  $Q$ 는 영역 내부에 주어진 단위체적당의 열발생률(heat generation rate)을 나타낸다. 이후의 전개과정에서는 텐서표기방법을 사용하기로 하며, 텐서표기시의 하첨자는 반경방향 좌표  $R$  또는 대

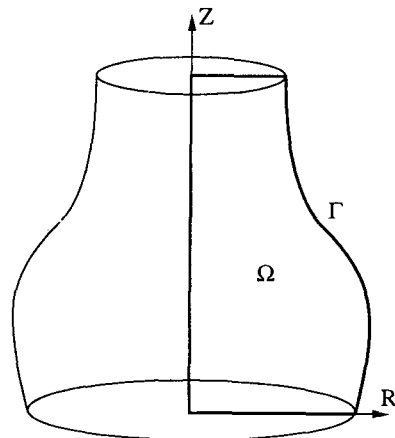


Fig. 1 Axisymmetric thermal conducting solid

칭 축방향 좌표  $Z$ 를 나타내기로 한다.

$\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$ 로 구성된 경계에 대하여, 열전도 문제의 경계조건은 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} T(x) &= T_o(x), & x \in \Gamma_T \\ q(T) &\equiv q_i(T) n_i(x) = q_o(x), & x \in \Gamma_q \\ q(T) &\equiv q_i(T) n_i(x) = h(x) \{T(x) - T_\infty(x)\}, & x \in \Gamma_c \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $q$ 는 경계에 수직한 방향의 열속이고,  $n_i$ 는 경계에서 영역 외부로 향한 단위수직벡터를 나타낸다. 경계조건에 있어서  $\Gamma_T$ 와  $\Gamma_q$ 에는 각각 온도  $T_o$ 와 수직열속  $q_o$ 가 주어지며, 대류 열전달이 일어나는  $\Gamma_c$ 에는 열전달 계수  $h$ 와 주위의 온도  $T_\infty$ 가 주어진다.

이제 축대칭 열전도 고체를 위한 직접 및 간접 경계적분방정식으로부터 형상설계 민감도해석을 위해 필요한 적분항등식을 유도하고자 한다. Fig. 1과 같이 원통좌표계  $(R, Z)$ 로 표현되는 축대칭 열전도 문제에 있어서 직접 경계적분방정식은 다음과 같이 주어진다. <sup>(16-18)</sup>

$$\begin{aligned} c(x_o) T(x_o) &= \int_r \{-q(x) G(x_o, x) \\ &\quad + T(x) F(x_o, x)\} R ds \\ &\quad + \int_\Omega Q(x) G(x_o, x) R dx \\ &\quad x_o \in \Omega \cup \Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $c(x_o)$ 는  $x_o$ 의 위치에 따라 결정되는 상수이며,  $G(x_o, x)$ 와  $F(x_o, x)$ 는  $x_o$ 가 축대칭 단위 링근원점(unit ring source point)일 때  $x$ 에서 발생하는 온도 및 열속을 각각 나타내는 기초해(fundamental solution)로서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} G(x_o, x) &= \frac{2K(m)}{\pi k \sqrt{\alpha + \beta}} \\ F(x_o, x) &= \frac{n_R(x) \{K(m) - E(m)\}}{2\pi R \sqrt{\alpha + \beta}} \\ &\quad + \frac{\{n_R(x)(R - R_o) + n_Z(x)(Z - Z_o)\} E(m)}{\pi(\alpha - \beta) \sqrt{\alpha + \beta}} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $K(m)$ 과  $E(m)$ 은 각각 제 1종 및 제 2종 완전 타원형 적분으로서 다음과 같이 표현되며,

$$\begin{aligned} K(m) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \\ E(m) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

$\alpha, \beta, m$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \alpha &= R^2 + R_o^2 + (Z - Z_o)^2 \\ \beta &= 2RR_o \\ m &= 2\beta / (\alpha + \beta) \end{aligned} \quad (7)$$

$x_o \in \Gamma$ 일 경우의 식(4)에 경계에 존재하는 임의의 함수  $\rho^*$ 를 곱하고 경계를 따라 적분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_r T(x) \left\{ c(x) \rho^*(x) - \int_r \rho^*(x_o) F(x_o, x) R ds_o \right\} R ds \\ + \int_r q(x) \left\{ \int_r \rho^*(x_o) G(x_o, x) R ds_o \right\} R ds \\ = \int_\Omega Q(x) \left\{ \int_r \rho^*(x_o) G(x_o, x) R ds_o \right\} R dx \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $ds_o$ 는 경계상의  $x_o$ 를 따른 적분을 나타낸다.

한편, 온도와 열속이 각각  $T^*$ 와  $q^*$ 로 표현되는 임의의 축대칭 열전도 시스템에 대한 간접 경계적분방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다. <sup>(16)</sup>

$$\begin{aligned} T^*(x) &= \int_r \rho^*(x_o) G(x_o, x) R ds_o \\ &\quad + \int_\Omega Q^*(x_o) G(x_o, x) R dx_o, \quad x \in \Omega \cup \Gamma \\ q^*(T^*) &= -c(x) \rho^*(x) + \int_r \rho^*(x_o) F(x_o, x) R ds_o \\ &\quad + \int_\Omega Q^*(x_o) F(x_o, x) R dx_o, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $\rho^*$ 는 경계  $\Gamma$ 에 분포된 근원밀도(source density)이며,  $Q^*$ 는 영역  $\Omega$ 내에 분포된 단위체적당의 열발생률과 일치한다. 열전도 평형방정식(2)는  $T, q, Q$ 를 각각  $T^*, q^*, Q^*$ 로 대체해도 성립하게 된다. 이제 식(9)를(8)에 대입하고  $x_o \in \Omega$ 일 경우의 식(4)를 이용하면 최종적으로 다음과 같은 축대칭 열전도 문제의 적분항등식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \int_r \{Tq^*(T^*) - q(T) T^*\} R ds \\ = \int_\Omega (TQ^* - QT^*) R dx \end{aligned} \quad (10)$$

이 항등식은 온도, 열속, 열발생률이 각각  $T, q, Q$ 인 하나의 평형상태와  $T^*, q^*, Q^*$ 인 다른 평형상태 사이에 성립되는 Green의 제 2항등식과 일치한다는 것을 쉽게 증명할 수 있다.

### 3. 형상설계민감도 해석 방법

열전도 고체의 형상최적설계 문제는 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \Phi_o(T, q; \Omega) \\ & \text{Subject to } \Phi_i(T, q; \Omega) \leq 0, \quad i=1, \dots, n \\ & \quad n: \text{number of constraints} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 최소화하기 위한 목적함수  $\Phi_o$ 와 제한조건 함수  $\Phi_i$ 는 형상  $\Omega$ 에 의해 결정되는 상태변수  $T$ 와  $q$ 의 함수로 표현된다. 수치적으로 이러한 문제의 최적해(optimal solution)를 구하기 위해서는 일반적으로 수학적계획법(mathematical programming)을 이용한 최적화과정을 사용하게 된다. 최적화과정을 수행하려면 매 반복과정마다 성능 범함수인  $\Phi_o$ 와  $\Phi_i$ 의 형상에 관한 민감도의 계산이 반드시 필요하게 된다. 본 절에서는 축대칭 열전도 고체의 형상최적설계를 위하여 필요한 일반적인 민감도 공식을 유도하고자 한다.

축대칭 열전도 고체의 형상최적화 문제에서 발생하는 일반적인 성능 범함수로서 다음과 같이 영역 적분과 경계적분으로 이루어진 임의의 범함수를 정의한다.

$$\Phi = \int_{\Omega} \xi(T, q; (T)) R dx + \int_{\Gamma} \Psi(T, q(T)) R ds \quad (12)$$

여기서  $\xi$ 와  $\Psi$ 는 각각의 변수들에 대해 연속 미분 가능한 매끄러운 함수들이다. 축대칭 문제의 특성을 고려하여 적분 항 내에 반경좌표  $R$ 을 첨가하였다. 이제 영역  $\Omega$ 의 형상변화, 즉 경계  $\Gamma$ 의 미소 변화에 따른 범함수  $\Phi$ 의 변분공식을 유도하고자 한다.

식(12)에 대하여 전미분<sup>(6)</sup>을 취하면 설계 속도장  $V$ 를 이용하여 다음과 같은 표현식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \Phi' = & \int_{\Omega} (\dot{\xi}R + \xi\dot{R} + \xi R V_{k,k}) dx \\ & + \int_{\Gamma} \{\dot{\Psi}R + \Psi\dot{R} + \Psi R (V_{k,k} - V_{i,j}n_i n_j)\} ds \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 경계에서의 설계속도 항과 반경좌표  $R$ 의 전미분 항은 다음과 같이 접선 및 수직방향성분  $V_n$ 과  $V_s$ 를 이용하여 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} V_i &= V_n n_i + V_s s_i, \quad V_{k,k} - V_{i,j} n_i n_j = V_n H + V_s s_s \\ \dot{R} &= V_n n_R - V_s n_Z \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $H$ 는 축대칭 단면의 경계의 곡률이고,  $s_i$ 는 경계를 따른 단위접선벡터를 나타내며, 하첨자 ( $s$ )는 경계의 접선방향으로의 미분을 나타낸다. 이제 식(13)에 나타난  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\Psi}$ 를 각각의 변수로 전개한 후, 부분 적분을 이용하여 정리하면  $\Phi$ 의 전미분 식은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \Phi' = & \int_{\Omega} (\xi_T - q_{i,i}^o - q_R^o/R) \dot{T} R dx \\ & - \int_{\Omega} \{\xi_T T_{,j} V_j + \xi_{q_i} q_i (T_{,j} V_j)\} R dx \\ & + \int_{\Gamma} \{(\Psi_T + q^o) \dot{T} + \Psi_q \dot{q}\} R ds \\ & + \int_{\Gamma} \{[\xi + \Psi(H + n_R/R)] V_n - \Psi_{,s} V_s\} R ds \\ & + \Sigma < \Psi V_s R > \end{aligned} \quad (15)$$

이 식에서  $\xi$ 와  $\Psi$ 의 하첨자는 그에 관한 편미분을 나타내며, 다음과 같은 간단한 표현식을 도입하였다.

$$q_i^o \equiv -k \xi_{,i}, \quad q^o \equiv q_i^o n_i \quad (16)$$

식(14)에서 나타났던  $V_{s,s}$ 는 부분 적분에 의하여 제거되어 식(15)에는 나타나지 않고, 그 대신 2차원 문제<sup>(15)</sup>에서처럼 경계를 따른 불연속 항  $\Sigma < \cdot >$ 가 남게 된다. 식(15)에는  $T$ 와  $q$ 의 전미분 항이 포함되어 있으므로 이들을 속도장  $V$ 에 관한 직접적인 함수로 나타내기 위하여, 앞 절에서 유도되었던 적분항등식(10)을 이용한다. 식(10)에 전미분을 취한 후, 부분 적분하고 다소 복잡한 과정을 통하여 정리하면 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} Q^* \dot{T} R dx + \int_{\Gamma} (\dot{q} T^* - \dot{T} q^*) R ds \\ & = \int_{\Omega} Q^* T_{,j} V_j R dx \\ & + \int_{\Gamma} \{[Q T^* - k T_{,s} T_{,s}^* \\ & + q q^*/k - q T^* (H + n_R/R)] V_n \\ & + (q_{,s} T^* - T_{,s} q^*) V_s\} R ds \\ & + \Sigma < -T^* q V_s R > \end{aligned} \quad (17)$$

이 식에서도 설계속도의 접선방향미분은 부분 적분으로 제거되고 대신에 불연속항이 남게 됨을 알 수 있다. 이제 식(15)에 나타난  $T$ 와  $q$ 의 전미분 항을 식(17)을 이용하여 소거하기 위하여 보조 시스

템을 다음과 같이 정의한다.

보조 시스템은 간접 경계적분방정식 (9)에 의해 정의되며, 내부 열발생률과 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} Q^* &= \xi_r - (q_{r,i}^o + q_{r}^k/R) && \text{in } \Omega \\ T^* &= \Psi_q && \text{on } \Gamma_T \\ q^* &= -(\Psi_r + q^o) && \text{on } \Gamma_q \\ q^* &= h(T^* - \Psi_q) - (\Psi_r + q^o) && \text{on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (18)$$

이제 주 시스템과 보조 시스템의 경계조건식 (3)과 (18)을 식(15)와 (17)에 대입한 후, 남은 영역 적분을 경계적분으로 변환하여 정리하면 최종적으로 축대칭 열전도 고체문제의 형상설계민감도 공식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Phi' &= \int_{\Gamma_T} (\Psi_r + q^o + q^*) \dot{T}_o R ds \\ &+ \int_{\Gamma_q} (\Psi_q - T^*) \dot{q}_o R ds \\ &+ \int_{\Gamma} [(\xi + \Psi(H + n_R/R) \\ &- q(H + n_R/R)) T^* \\ &+ QT^* + q(q^* + q^o)/k - kT_{,s}T_{,s}^*] V_n \\ &+ (q_{,s}T^* - T_{,s}(q^* + q^o) - \Psi_{,s}) V_s] R ds \\ &+ \sum \langle -T^*q + \Psi \rangle V_s R \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

수치적으로 형상설계민감도를 구하려면 경계요소를 사용하여 해석하고자 하는 영역의 경계를 분할하여 주 시스템과 보조 시스템의 해를 구한 후, 유도된 민감도 공식에 대입하여 계산하면 된다. 여기서 주 시스템과 보조 시스템은 직접 및 간접 경계적분방정식으로 정의되었으므로 각각 직접 및 간접 경계요소법을 사용해야 한다. 그러나 직접 및 간접 경계적분방정식은 서로 동등하며 이론적으로 같은 해가 얻어진다는 사실이 증명되어 있으므로,<sup>(16)</sup> 보조 시스템의 수치적 해를 효율적으로 구하기 위해 주 시스템에서 사용되는 직접 경계요소법을 사용할 수 있다.

#### 4. 온도 및 열속 제한조건의 민감도해석

본 절에서는 앞 절에서 설명된 민감도해석 방법의 응용 예로서, 온도 및 열속 제한조건을 정의하는 범함수의 민감도 공식을 제시한다. 여기서는 온도 및 열속 제한조건으로서 다음과 같이 축대칭 단

면상의 경계의 국소구간  $\Gamma_i$ 에서 정의된 범함수를 고려한다.

$$\Phi_T = \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} \left( \frac{T}{T_c} - 1 \right) R ds \leq 0 \quad (20)$$

$$\Phi_q = \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} \left( \frac{q}{q_c} - 1 \right) R ds \leq 0 \quad (21)$$

여기서  $T_c$ 와  $q_c$ 는 각각 제한조건이 부과된 경계에서 규정된 온도 및 열속의 한계치를 나타낸다. 그리고  $L_i$ 는 국소 경계  $\Gamma_i$ 로 정의되는 링의 표면적으로서 다음과 같이 표현된다.

$$L_i = 2\pi \int_{\Gamma_i} R ds \quad (22)$$

앞 절에서 설명된 것과 동일한 과정을 거쳐서 민감도 공식을 유도한 결과를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi'_T &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} \left( \frac{T}{T_c} - 1 - \Phi_T \right) (V_n H + V_{s,s} \\ &+ \frac{V_n n_R - V_s n_z}{R}) R ds + A(V) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Phi'_q &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} \left( \frac{q}{q_c} - 1 - \Phi_q \right) (V_n H + V_{s,s} \\ &+ \frac{V_n n_R - V_s n_z}{R}) R ds + A(V) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서  $A(V)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} A(V) &= \int_{\Gamma_T} q^* \dot{T}_o R ds - \int_{\Gamma_q} T^* \dot{q}_o R ds \\ &+ \int_{\Gamma} [QT^* - q(H + n_R/R) T^* \\ &+ qq^*/k - kT_{,s}T_{,s}^*] V_n \\ &+ (q_{,s}T^* - T_{,s}q^*) V_s] R ds + \sum \langle -T^*q V_s R \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

보조 시스템의 내부 열발생률  $Q^*$ 는 존재하지 않게 되며, 보조 시스템의 경계조건은 제한조건의 종류와  $\Gamma_i$ 에 정의된 주 시스템의 경계조건의 종류에 따라 다음과 같이 구분된다.

(i) 열속 경계조건이 지정된 경계에 부과된 온도 제한조건일 때 ( $\Phi = \Phi_T, \Gamma_i \subset \Gamma_q$ )

$$\begin{aligned} T^* &= 0 && \text{on } \Gamma_T \\ q^* &= -\frac{2\pi}{L_i T_c} && \text{on } \Gamma_i \\ q^* &= 0 && \text{on } \Gamma_q \setminus \Gamma_i \\ q^* &= hT^* && \text{on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (26)$$

(ii) 대류 경계조건이 지정된 경계에 부과된 온도

제한조건일 때 ( $\Phi = \Phi_T, \Gamma_i \subset \Gamma_c$ )

$$\begin{aligned} T^* &= 0 && \text{on } \Gamma_T \\ q^* &= 0 && \text{on } \Gamma_q \\ q^* &= h\left(T^* - \frac{2\pi}{hL_i T_c}\right) && \text{on } \Gamma_i \\ q^* &= hT^* && \text{on } \Gamma_c \setminus \Gamma_i \end{aligned} \quad (27)$$

(iii) 온도 경계조건이 지정된 경계에 부과된 열속 제한조건일 때 ( $\Phi = \Phi_q, \Gamma_i \subset \Gamma_T$ )

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{2\pi}{L_i q_c} && \text{on } \Gamma_i \\ T^* &= 0 && \text{on } \Gamma_T \setminus \Gamma_i \\ q^* &= 0 && \text{on } \Gamma_q \\ q^* &= hT^* && \text{on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (28)$$

(iv) 대류 경계조건이 지정된 경계에 부과된 열속 제한조건일 때 ( $\Phi = \Phi_q, \Gamma_i \subset \Gamma_c$ )

$$\begin{aligned} T^* &= 0 && \text{on } \Gamma_T \\ q^* &= 0 && \text{on } \Gamma_q \\ q^* &= h\left(T^* - \frac{2\pi}{L_i q_c}\right) && \text{on } \Gamma_i \\ q^* &= hT^* && \text{on } \Gamma_c \setminus \Gamma_i \end{aligned} \quad (29)$$

### 5. 수치 예제

제안된 민감도해석 방법의 정확성을 검증하기 위하여 세가지 예제를 다루었다. 먼저 해석적 해를 갖는 원통 문제와 구 문제를 다루었는데, 이 두 예제에서는 민감도 공식을 사용하여 계산된 민감도를 해석적으로 유도한 민감도와 비교하였다. 세번째 예제는 해석적 해를 구할 수 없는 냉각핀 문제로서, 민감도 공식에 의한 민감도를 유한차분에 의해 수치미분으로 구한 민감도와 비교하였다. 세 예제에서 공히 2차(quadratic) 경계요소법으로 주 시스템과 보조 시스템의 수치 해를 구하였다.

#### 5.1 원통 문제

이 예제는 Fig. 2에 설명된 중공(hollow) 원통 문제로서, 원통의 내면은 일정한 온도  $T_i$ 로 유지되며 외면에는 온도  $T_\infty$ 와 열전달 계수  $h$ 로 정의되는 대류 경계조건이 주어져 있다. 참고문헌<sup>(19)</sup>에 정확한 온도 해가 수록되어 있다. 원통 축 방향의 온도변화가 없으므로 원통 단면에서의 2차원 문제로도 고려할 수 있으므로, 문헌<sup>(15)</sup>에서는 이 예제

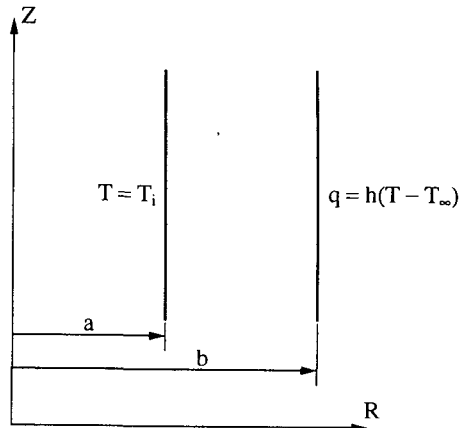


Fig. 2 A cylinder problem

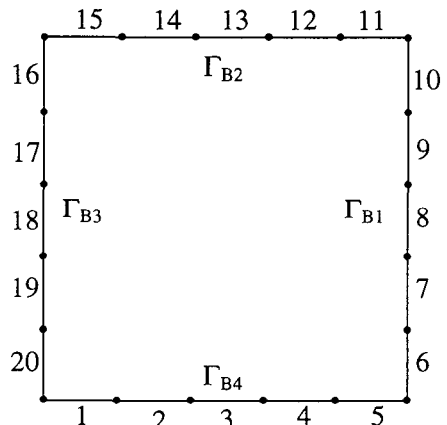


Fig. 3 Quadratic boundary element model and element numbers for the cylinder problem

를 2차원 문제로 다루었으며 외경  $b$ 를 설계변수로 정했을 때의 해석적 민감도를 유도하였다.

형상설계민감도를 계산하고자 하는 온도와 열속 범함수는 다음과 같이 Fig. 3에 표시된 요소 번호  $i$ 로 정의되는 국소경계  $\Gamma_i$ 에서의 평균온도와 열속으로 정하였다.

$$\begin{aligned} \Phi_T &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} T R ds \\ \Phi_q &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} q R ds \end{aligned} \quad (30)$$

온도 범함수는 열속과 대류조건이 지정된 경계에서 고려하였고, 열속 범함수는 온도와 대류 조건이 지정된 경계에서 고려하였다. 설계변수가 외경  $b$ 이

므로 원통의 경계에서의 설계 속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 V_n &= \delta b \text{ and } V_s = 0, & \text{on } \Gamma_{B1} \\
 V_n &= 0 \text{ and } V_s = \frac{R-a}{b-a} \delta b, & \text{on } \Gamma_{B4} \\
 V_n &= 0 \text{ and } V_s = -\frac{R-a}{b-a} \delta b, & \text{on } \Gamma_{B2}
 \end{aligned} \quad (31)$$

전미분 공식  $\Phi' = \frac{d\Phi}{db} \delta b$ 를 사용하면 민감도 공식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi_T}{db} &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} (T - \Phi_T) \left( H + \frac{n_R}{R} \right) R ds + C \\
 \frac{d\Phi_q}{db} &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} (q - \Phi_q) \left( H + \frac{n_R}{R} \right) R ds + C,
 \end{aligned}$$

**Table 1** Temperature sensitivities for the cylinder problem

Element number	Analytic sensitivity	SDSA result	Ratio(%)
1	-5.58956	-5.69981	101.97
2	-14.58143	-14.66438	100.57
3	-21.57130	-21.62618	100.25
4	-27.21890	-27.25627	100.14
5	-31.91611	-31.94856	100.10
6	-33.98974	-33.99187	100.01
7	-33.98974	-33.98803	99.99
8	-33.98974	-33.98901	100.00
9	-33.98974	-33.98803	99.99
10	-33.98874	-33.99187	100.01

**Table 2** Heat flux sensitivities for the cylinder problem

Element number	Analytic sensitivity	SDSA result	Ratio(%)
6	-339.897	-339.919	100.01
7	-339.897	-339.880	99.99
8	-339.897	-339.890	100.00
9	-339.897	-339.880	99.99
10	-339.897	-339.919	100.01
16	-9033.700	-9035.390	100.02
17	-9033.700	-9030.970	99.97
18	-9033.700	-9035.774	100.02
19	-9033.700	-9030.970	99.97
20	-9033.700	-9035.390	100.02

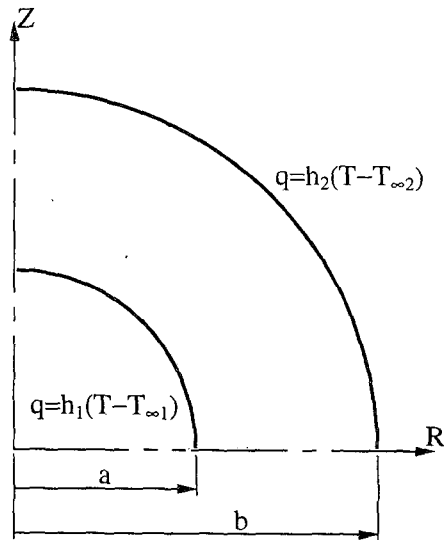
$$\begin{aligned}
 & \text{if } \Gamma_i \subset \Gamma_{B1} \\
 \frac{d\Phi_T}{db} &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} (T - \Phi_T) \left\{ 1 - n_z \left( 1 - \frac{a}{R} \right) \right\} R ds + C, \\
 & \text{if } \Gamma_i \subset \Gamma_{B4} \\
 \frac{d\Phi_q}{db} &= C, \quad \text{if } \Gamma_i \subset \Gamma_{B3}
 \end{aligned} \quad (32)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 C &= \int_{\Gamma_{B1}} \left\{ -k T_{,s} T_{,s}^* + \frac{qq^*}{k} \right. \\
 & \quad \left. - q T^* \left( H + \frac{n_R}{R} \right) \right\} R ds \\
 & \quad - \int_{\Gamma_{B1}} (q_{,s} T^* - T_{,s} q^*) \frac{R-a}{b-a} R ds \\
 & \quad + \int_{\Gamma_{B4}} (q_{,s} T^* - T_{,s} q^*) \frac{R-a}{b-a} R ds
 \end{aligned} \quad (33)$$

보조 시스템은 식(26)~(29)에서  $T_c$ 와  $q_c$ 를 1로 대체하면 된다.

실제적인 수치계산을 위해  $a, b, T_i, T_\infty, h, k$ 는 각각 0.1 m, 0.2 m, 100°C, 0°C, 10 W/m<sup>2</sup>°C, 47 W/m°C로 정하였다. 각 경계요소  $\Gamma_i$ 의 평균온도와 열속의 민감도를 민감도 공식(32)로 계산하여 각각 Table 1과 2에 수록하였으며,  $\Gamma_i$ 의 중간점에서 계산한 해석적 민감도와 비교하였다. Table 1과 2에서의 비율(ratio)은 민감도 공식으로 계산한 민감도를 해석적 민감도로 나누어 계산된 값이다. Table 1과 2에 수록하지 않은 요소의 민감도는 대칭성때문에 생략하였다. 온도 민감도 및 열속 민감



**Fig. 4** A sphere problem

도의 최대 백분율 오차는 각각 1.97과 0.03으로 매우 정확한 결과를 얻을 수 있었음을 알 수 있다.

5.2 구 문제

여기서 다루는 예제도 역시 참고문헌<sup>(19)</sup>에 정확한 온도 해가 수록되어 있으며, Fig. 4에 설명된 것과 같은 중공 구 문제이다. 구의 내경과 외경은 각각  $a$ 와  $b$ 로 나타내었다. 중공 구의 내면과 외면에서는 대류 경계조건을 지정하였는데, 열전달계수와 주위 온도는 내면과 외면에서 각각  $h_1, T_{\infty 1}$  및  $h_2, T_{\infty 2}$ 로 정의하였다. 설계변수를 외경  $b$ 로 정하고 온도분포식을 미분하여 해석적 민감도를 유도하였으며, 부록에 이를 수록하였다. 온도와 열속 범함수는 원통문제와 동일하게 식 (30)으로 정의하였다. 온도 범함수는 열속과 경계조건이 지정된 경계에서, 그리고 열속 범함수는 대류 조건이 지정된 경계에서만 고려하였다.

Fig. 5와 같이 구의 단면을 15개의 2차 경계요소로 분할하였다. 외경  $b$ 가 설계변수이므로 경계에서의 설계속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 V_n &= \delta b \text{ and } V_s = 0, & \text{on } \Gamma_{B1} \\
 V_n &= 0 \text{ and } V_s = \frac{\rho - a}{b - a} \delta b, & \text{on } \Gamma_{B4} \quad (34) \\
 V_n &= 0 \text{ and } V_s = -\frac{\rho - a}{b - a} \delta b, & \text{on } \Gamma_{B2}
 \end{aligned}$$

여기서  $\rho$ 는 구의 중심에서 경계상의 점까지의 반경위치를 나타낸다. 설계변수인 외경  $b$ 에 관한 민

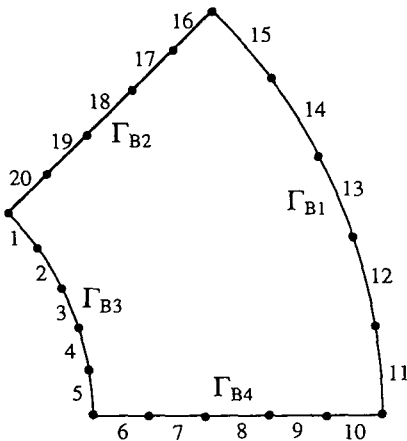


Fig. 5 Quadratic boundary element model and element numbers for the sphere problem

감도 공식은 원통 문제와 유사하게 다음과 같이 유도되며, 보조 시스템은 원통 문제와 동일하게 정의된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi_T}{db} &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} (T - \Phi_T) \left( H + \frac{n_R}{R} \right) R ds + C \\
 \frac{d\Phi_q}{db} &= \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} (q - \Phi_q) \left( H + \frac{n_R}{R} \right) R ds + C, \\
 &\text{if } \Gamma_i \subset \Gamma_{B1}
 \end{aligned}$$

Table 3 Temperature sensitivities for the sphere problem

Element number	Analytic sensitivity	SDSA result	Ratio(%)
1	-211.4529	-211.4531	100.00
2	-211.4529	-211.4525	100.00
3	-211.4629	-211.4522	100.00
4	-211.4529	-211.4487	100.00
5	-211.4529	-211.4609	100.00
6	-214.5826	-214.5818	100.00
7	-218.4948	-218.4908	100.00
8	-220.6682	-220.6620	100.00
9	-221.9332	-221.9039	99.99
10	-222.6887	-222.7505	100.03
11	-222.9449	-222.9664	100.01
12	-222.9449	-222.9296	99.99
13	-222.9449	-222.9419	100.00
14	-222.9449	-222.9361	100.00
15	-222.9449	-222.9515	100.00

Table 4 Heat flux sensitivities for the sphere problem

Element number	Analytic sensitivity	SDSA result	Ratio(%)
1	-4229.058	-4229.061	100.00
2	-4229.058	-4229.051	100.00
3	-4229.058	-4229.043	100.00
4	-4229.058	-4228.973	100.00
5	-4229.058	-4229.217	100.00
11	-2229.449	-2229.664	100.00
12	-2229.449	-2229.296	99.99
13	-2229.449	-2229.419	100.00
14	-2229.449	-2229.361	100.00
15	-2229.449	-2229.515	100.00



$$\frac{d\Phi_T}{db} = \frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_i} \frac{T - \Phi_T}{b-a} \left\{ \rho - a + \frac{n_z}{R} \right\} R ds + C,$$

if  $\Gamma_i \subset \Gamma_{B4}$

$$\frac{d\Phi_T}{db} = C, \quad \frac{d\Phi_q}{db} = C, \quad \text{if } \Gamma_i \subset \Gamma_{B3} \quad (35)$$

여기서

$$C = \int_{\Gamma_{B1}} \left\{ -k T_{,s} T^*_{,s} + \frac{qq^*}{k} - q T^* \left( H + \frac{n_R}{R} \right) \right\} R ds$$

$$- \int_{\Gamma_{B2}} (q_{,s} T^* - T_{,s} q^*) \frac{\rho - a}{b - a} R ds$$

$$+ \int_{\Gamma_{B4}} (q_{,s} T^* - T_{,s} q^*) \frac{\rho - a}{b - a} R ds \quad (36)$$

수치적 계산을 위해  $a, b, T_{\infty 1}, T_{\infty 2}, h_1, h_2, k$ 는 각각 0.1 m, 0.2 m, 100°C, 0°C, 20 W/m<sup>2</sup>C, 10 W/m<sup>2</sup>C, 47 W/m<sup>2</sup>C로 정하였다. 온도 및 열속의 민감도를 Table 3과 4에 수록하여 원통 문제와 동일한 방법으로 해석적 민감도와 비교하였는데, 매우 정확한 결과를 보여준다. Table 3과 4에 수록하지 않은 요소의 민감도는 대칭성때문에 생략하였다. 온도 민감도 및 열속 민감도의 최대 백분율 오차는 각각 0.03과 0.01이다.

### 5.3 냉각핀 문제

여기서는 Fig. 6에 주어진, 해석적 해를 구할 수 없는 복잡한 형상의 냉각핀 문제를 다루었다. 고온의 유체가 흐르는 관(pipe)의 내면은 열전달계수  $h_1$ 과 유체온도  $T_{\infty 1}$ , 그리고 관의 외벽 및 외벽을 따라 등간격으로 부착된 냉각핀의 표면에서는  $h_2, T_{\infty 2}$ 의 대류 경계조건이 지정되어 있다. 핀의 측면 형상을 정의하는 경계  $\Gamma_d$ 를 설계 경계로 정하였으며, 양 끝점  $P_1$ 과  $P_2$ 는 고정시켰다. 설계변수는  $\Gamma_d$ 를 16등분하는 절점의  $Z$  좌표로 하여 수직방향으로만 변화할 수 있도록 하였다.  $\Gamma_d$ 는 설계변수인 15개의 절점 및  $P_1$ 과  $P_2$ 로 정의되는 3차 스플라인(cubic spline)으로 표현하였으며, 스플라인의 끝단조건은 곡률이 0인 이완 끝단조건(relaxed end condition)을 사용하였다.  $\Gamma_d$ 에서의 설계 속도장은 다음과 같이 표현된다.

$$V_n = n_z \delta Z, \quad V_s = n_R \delta Z$$

$$V_n H + V_{s,s} = n_R \delta Z_{,s}, \quad V_n n_R - V_s n_z = 0 \quad (37)$$

식(20)과 (21)로 온도 및 열속 제한조건 범함수를 정의하였다.  $\Gamma_i$ 는 경계  $\Gamma_d$ 상의 각 경계요소와 일치하도록 하였다. 온도 및 열속 범함수의 민감도

공식은 다음과 같이 정리된다.

$$\Phi'_T = -\frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_1} \left( \frac{T}{T_c} - \Phi_T - 1 \right) n_R R \delta Z_{,s} ds$$

$$+ B(\delta Z)$$

$$\Phi'_q = -\frac{2\pi}{L_i} \int_{\Gamma_1} \left( \frac{q}{q_c} - \Phi_q - 1 \right) n_R R \delta Z_{,s} ds + B(\delta Z) \quad (38)$$

여기서

$$B(\delta Z) = \int_{\Gamma_d} [ \{-k T_{,s} T^*_{,s} + qq^*/k$$

$$- q T^* (H + n_R/R)\} n_z$$

$$+ (q_{,s} T^* - T_{,s} q^*) n_R ] R \delta Z ds \quad (39)$$

$\Gamma_d$ 에는 대류 경계조건이 지정되어 있으므로 온도 범함수일 경우의 보조 시스템은 식(27)에 의해, 그리고 열속 범함수일 경우의 보조 시스템은 식(29)에 의해 정의된다.

대칭성을 이용하여 Fig. 7과 같이 48개의 요소로

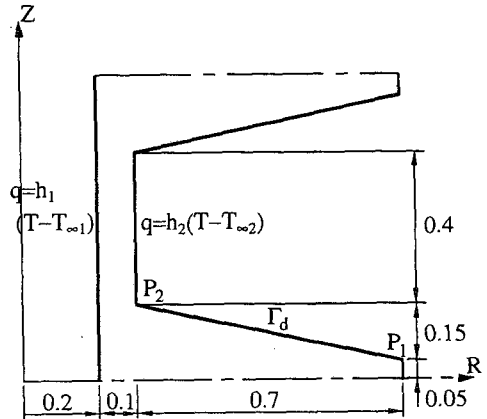


Fig. 6 A cooling fin problem

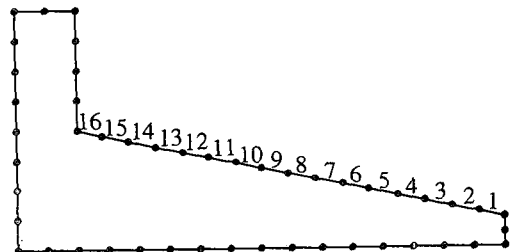


Fig. 7 Quadratic boundary element model and element numbers for the cooling fin problem

이루어진 2차 경계요소 모델을 사용하여 주 시스템과 보조 시스템의 해를 구하였다. 이 예제는 해석적 해를 구할 수 없는 문제이므로, Fig. 7과 같이

$\Gamma_d$ 가 직선일 경우에 제안된 방법으로 계산한 민감도를 유한차분방법으로 수치미분하여 계산한 민감도와 비교하였다. 유한차분방법에서 설계변수의 변

**Table 5** Temperature sensitivities for the cooling fin problem

Element number	$\Phi_f^{(i)}$	$\Phi_f^{(m)}$	$\Delta\Phi_T$	$\Phi_T$	$\Phi_T'/\Delta\Phi_T \times 100$
1	-0.4530	-0.4528	0.1367E-03	0.1369E-03	100.13
2	-0.4469	-0.4468	0.1339E-03	0.1341E-03	100.14
3	-0.4387	-0.4386	0.1278E-03	0.1280E-03	100.14
4	-0.4288	-0.4287	0.1208E-03	0.1210E-03	100.14
5	-0.4174	-0.4173	0.1139E-03	0.1141E-03	100.16
6	-0.4044	-0.4043	0.1062E-03	0.1063E-03	100.17
7	-0.3900	-0.3899	0.9699E-04	0.9716E-04	100.17
8	-0.3741	-0.3741	0.8688E-04	0.8704E-04	100.19
9	-0.3567	-0.3566	0.7569E-04	0.7585E-04	100.22
10	-0.3376	-0.3376	0.6260E-04	0.6276E-04	100.26
11	-0.3167	-0.3167	0.4854E-04	0.4865E-04	100.24
12	-0.2936	-0.2936	0.3758E-04	0.3590E-04	100.32
13	-0.2679	-0.2678	0.1802E-04	0.1830E-04	101.56
14	-0.2386	-0.2387	-0.2190E-04	-0.2163E-04	98.76
15	-0.2042	-0.2042	-0.8247E-04	-0.8280E-04	100.41
16	-0.1581	-0.1582	-0.1252E-03	-0.1244E-03	99.35

**Table 6** Heat flux sensitivities for the cooling fin problem

Element number	$\Phi_q^{(i)}$	$\Phi_q^{(m)}$	$\Delta\Phi_q$	$\Phi_T$	$\Phi_q'/\Delta\Phi_q \times 100$
1	0.2410	0.2415	0.4101E-03	0.4107E-03	100.13
2	0.2593	0.2597	0.4016E-03	0.4022E-03	100.14
3	0.2838	0.2842	0.3834E-03	0.3839E-03	100.14
4	0.3135	0.3139	0.3623E-03	0.3629E-03	100.14
5	0.3479	0.3483	0.3418E-03	0.3423E-03	100.16
6	0.3868	0.3871	0.3185E-03	0.3190E-03	100.17
7	0.4300	0.4303	0.2910E-03	0.2915E-03	100.17
8	0.4776	0.4779	0.2606E-03	0.2611E-03	100.19
9	0.5298	0.5301	0.2271E-03	0.2276E-03	100.22
10	0.5871	0.5873	0.1878E-03	0.1883E-03	100.26
11	0.6499	0.6501	0.1456E-03	0.1460E-03	100.24
12	0.7192	0.7193	0.1073E-03	0.1077E-03	100.32
13	0.7964	0.7965	0.5405E-04	0.5489E-04	101.56
14	0.8841	0.8840	-0.6570E-04	-0.6488E-04	98.76
15	0.9875	0.9873	-0.2474E-03	-0.2484E-03	100.41
16	1.1257	1.1253	-0.3756E-03	-0.3732E-03	99.35

분, 즉  $\delta Z$ 는 0.1%의 균일한 변화량, 즉  $\delta Z = 0.001Z$ 를 사용하였다.  $\delta Z$ 의 적절한 양을 정하기 위해 여러가지의 변화량에 대해 시험해 본 결과, 이 문제의 경우는 0.1%를 사용하면 충분히 정확한 민감도를 예측할 수 있는 것으로 판명되었다.

$\Gamma_d$ 에 있는 모든 경계요소의 온도 및 열속 범함수의 민감도를 계산하였다. Fig. 7의 초기 형상일 경우의 온도 및 열속 범함수 값을  $\Phi_T^{(i)}$ 와  $\Phi_q^{(i)}$ 로, 0.1% 수정 형상일 경우의 값을  $\Phi_T^{(m)}$ 와  $\Phi_q^{(m)}$ 로 정의한다. 그리고  $\Delta\Phi_T$ 와  $\Delta\Phi_q$ 를 각각  $\Phi_T^{(m)} - \Phi_T^{(i)}$ 와  $\Phi_q^{(m)} - \Phi_q^{(i)}$ 라 하고,  $\Phi_T$  및  $\Phi_q$ 를 민감도해석 방법에 의해 식(38)로 예측한 범함수의 변분이라 정의한다.  $h_1, T_{\infty 1}, h_2, T_{\infty 2}$ 를 각각  $100 \text{ W/m}^2\text{C}, 200\text{C}, 10 \text{ W/m}^2\text{C}, 20\text{C}$ 로 정하고 수치적 계산을 한 결과를 Table 5와 Table 6에 수록하였다. Table 5는  $\Gamma_d$ 의 각 경계요소들의 온도 범함수의 민감도해석 결과를, Table 6은  $\Gamma_d$ 의 각 경계요소들의 열속 범함수의 민감도해석 결과를 보여준다. 유한차분과 비교했을 때의 최대 백분율 오차는 1.56으로서 매우 정확하게 민감도를 예측했음을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 축대칭 형태로 표시된 열전도 문제의 직접 및 간접 경계적분방정식에서 출발하여, 전미분 개념과 보조변수방법을 사용하여 일반적인 형상설계 민감도해석 방법을 제안하였다. 제안된 민감도해석 방법은 온도, 열속 및 대류 경계조건이 지정된 축대칭 열전도 고체의 형상최적설계에 적용할 수 있다. 영역 및 경계적분으로 구성된 일반적인 성능 범함수의 민감도 공식을 유도하였으며, 구체적인 적용 예로서 경계의 국소 구간에 부과된 온도 및 열속 제한조건 범함수의 민감도 공식을 제시하였다. 유도된 민감도 공식은 경계적분의 형태로 표현되므로 민감도해석 방법의 근간인 경계적분방정식을 이산화시킨 경계요소법으로 주 시스템 및 보조 시스템의 수치 해를 구하도록 하였다. 실제적인 수치계산을 통하여 민감도해석 방법의 정확성을 검증하였다. 해석적 해를 갖는 원통 문제와 구 문제에서는 민감도 공식에 의한 결과를 해석적 민감도와 비교하였으며, 복잡한 냉각핀 문제에서는 유한차분으로 수치미분한 결과와 비교하여 그 정확성을 보였다. 본 연구에서 제안한 민감도해석 방법의 실제적인 응용을 위하여 축대칭 열전도 고체의 형

상최적화에 관한 연구가 현재 진행중에 있다.

## 참고문헌

- (1) Mota Soares, C.A., Leal, R.P. and Choi, K.K., 1987, "Boundary Elements in Shape Optimal Design of Structural Components," in C.A. Mota Soares(ed.), Computer Aided Optimal Design : Structural and Mechanical Systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 605~631.
- (2) 田中正隆, 松本敏郎, 中付正行, 1991, "境界要素法," 培風館.
- (3) Kwak, B.M. and Choi, J.H., 1987, "Shape Design Sensitivity Analysis Using Boundary Integral Equation for Potential Problem," in C. A. Mota Soares(ed.), Computer Aided Optimal Design : Structural and Mechanical Systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 633~642.
- (4) Choi, J.H. and Kwak, B.M., 1988, "Shape Design Sensitivity Analysis of Elliptic Problems in Boundary Integral Equation Formulation," Mech. Struct. Machines, Vol. 16, pp. 147~165.
- (5) Choi, J.H. and Kwak, B.M., 1988, "Boundary Integral Equation Method for Shape Optimization of Elastic Structures," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 26, pp. 1579~1595.
- (6) Haug, E.J., Choi, K.K. and Komkov, V., 1986, "Design Sensitivity Analysis of Structural Systems," Academic Press, New York.
- (7) Barone, M.R. and Yang, R.J., 1988, "Boundary Integral Equations for Recovery of Design Sensitivities in Shape Optimization," AIAA J., Vol. 26, pp. 589~594.
- (8) Barone, M.R. and Yang, R.J., 1989, "A Boundary Element Approach for Recovery of Shape Sensitivities in Three-Dimensional Elastic Solids," Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 74, pp. 69~82.
- (9) Rice, J.S. and Mukherjee, S., 1990, "Design Sensitivity Coefficients for Axisymmetric Elasticity Problems by Boundary Element Methods," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 7, pp. 13~20.

- (10) Choi, J.H. and Choi, K.K., 1990, "Direct Differentiation Method for Shape Design Sensitivity Analysis Using Boundary Integral Formulation," *Comp. Struct.*, Vol. 34, pp. 499~508.
- (11) Choi, J.H. and Kwak, B.M., 1990, "A Unified Approach for Adjoint and Direct method in Shape Design Sensitivity Analysis Using Boundary Integral Formulation," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 7, pp. 39~45.
- (12) Kwak, B.M. and Lee, B.Y., 1990, "Shape Design Sensitivity Analysis of Thermoelasticity Problem Using Boundary Integral Equation Formulation," in M. Tanaka et al. (eds.), *BEM XII Vol. 2 : Applications in Fluid Mechanics and Field Problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 215~224.
- (13) Lee, B.Y. and Kwak, B.M., 1991, "Shape Optimization of Two-Dimensional Thermoelastic Structures Using Boundary Integral Equation Formulation," *Comp. Struct.*, Vol. 41, pp. 709~722.
- (14) Lee, B.Y. and Kwak, B.M., 1992, "Axisymmetric Thermoelastic Shape Sensitivity Analysis and Its Application to Turbine Disc Design," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp. 2073~2089.
- (15) Lee, B.Y., Choi, J.H. and Kwak, B.M., 1992, "Shape Optimization of Two-Dimensional Thermal Conducting Solid Using Boundary Integral Equation Formulation," *KSME J.*, Vol. 6, pp. 114~121.
- (16) Banerjee, P.K. and Butterfield, R., 1981, "Boundary Element Methods in Engineering Science," McGraw-Hill, New York.
- (17) Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., 1984, "Boundary Element Techniques," Springer-Verlag, Berlin and New York.
- (18) Bakr, A.A., 1986, "The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems," Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- (19) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., 1959, "Conduction of Heat in Solids," Oxford University Press, London.

- (20) Arora, J.S., 1984, "An Algorithm for Optimum Structural Design without Line Search," in E. Atrek (ed.), *New Directions in Optimum Structural Design*, Wiley, New York, pp. 429~441.

## 부 록

여기서는 중공 구 문제의 온도 및 열속 민감도를 해석적으로 유도한 결과를 제시한다. 구의 중심에서의 반경을  $\rho$ 로 나타내면, 온도분포는 다음과 같다.<sup>(19)</sup>

$$T = \frac{T_{\infty 1} a^2 h_1 \{b^2 h_2 - \rho(bh_2 - 1)\} + T_{\infty 2} b^2 h_2 \{\rho(ah_1 + 1) - a^2 h_1\}}{\rho(b^2 h_2(ah_1 + 1) - a^2 h_1(bh_2 - 1))} \quad (A1)$$

여기서  $h_1$ 과  $h_2$ 는 각각  $h_1/k$ 와  $h_2/k$ 를 나타낸다. 수식의 간편화를 위해 이제부터 다음과 같은 표현식을 사용하기로 한다.

$$C_1 = b^2 h_2(ah_1 + 1) - a^2 h_1(bh_2 - 1), \quad C_2 = T_{\infty 1} a^2 h_1 \\ C_3 = T_{\infty 2} b^2 h_2, \quad C_4 = h_2^2(2ab - a^2)h_1 + 2b \quad (A2)$$

중공 구의 내면과 외면에서의 외부로 향한 열속은 다음과 같이 표현된다.

$$q|_{\rho=b} = kb^2 h_1 h_2 (T_{\infty 2} - T_{\infty 1}) / C_1 \\ q|_{\rho=b} = ka^2 h_1 h_2 (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) / C_1 \quad (A3)$$

온도 민감도를 반경  $\rho$ 의 함수로 나타내기 위해 식(A1)을  $b$ 로 미분하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dT}{db} = [C_1 \{C_2 h_2 (2b - \rho) + 2T_{\infty 2} h_2 b(ah_1 \rho + \rho - a^2 h_1)\} - C_4 \{C_2 (-bh_2 \rho + \rho + b^2 h_2) + C_3 (ah_1 \rho + \rho - a^2 h_1)\}] / (\rho C_1^2) \\ - (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) a^2 b^2 h_1 h_2 (\rho - a) / \{C_1 (b - a) \rho^2\} \quad (A4)$$

내면과 외면에서의 열속 민감도는 식(A3)을  $b$ 로 미분하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d(q|_{\rho=a})}{db} = kbh_1 h_2 (T_{\infty 2} - T_{\infty 1}) (2C_1 - bC_4) / C_1^2 \\ \frac{d(q|_{\rho=b})}{db} = ka^2 h_1 h_2 (T_{\infty 2} - T_{\infty 1}) C_4 / C_1^2 \quad (A5)$$