

〈論 文〉

시간지연 제어기법을 이용한 DC서보모터 강인제어 및 관측기/제어기 안정화에 관한 연구

이정원* · 장평훈** · 김승호***

(1992년 5월 8일 접수)

A Study on Robust Control of DC Servo Motor Using Time Delay Control and Observer/Controller Stabilization

Jeong Wan Lee, Pyung Hun Chang and Seung Ho Kim

Key Words : Robust Control(강인 제어), Observer(관측기), Sensor Noise(센서잡음), Uncertainty(불확실성), Time Delay Control(시간지연 제어)

Abstract

Recently the Time Delay Control (TDC) method has been proposed as a promising technique in the robust control area, where the plants have nonlinear dynamics with parameter variations and substantial disturbances are present. TDC method, however, requires the measurements of all the state variables, together with their derivatives. This requirement imposes a severe limitation on the applications to most real systems. In order to solve this measurement problem, we proposed an observer design method that can stably reconstruct the state variables and their derivatives. the stability of the overall system has been analyzed and proved. Then, for a simulation study, the controller/observer based on our design method has been applied to a nonlinear plant, the result of which confirmed that the controller/observer performs satisfactorily as predicted, Finally we made experimentations on a DC servo motor that is subject to substantial amount of inertia variations and external disturbances. the results showed that the controller/observer performs quite robustly under those variations and disturbances, and is much less sensitive to sensor noise than the controller using numerical differentiations.

1. 서 론

강인제어의 주된 목적은 플랜트의 자체의 불확실성이나 외란에 대하여 영향을 적게 받으며 정확한 제어를 하는데 있다고 볼 수 있다. 여기서 플랜트의 불확실성은 예측하지 못한 플랜트 매개 변수의

변동, 외부로부터 플랜트에 작용하는 외란, 모델링 되지 못하는 플랜트의 비선형 동역학을 포함하며, 이러한 불확실성은 공칭 플랜트모델(nominal plant model)에 가해지는 외란력으로 간주할 수 있으며, 예측하는 응답으로 부터 벗어나게 만든다.

지금까지 강인제어의 연구는 여러가지로 시도되었다.⁽³⁾ 그중 주된 방법의 하나로 고정된 제어기의 설계에 의한 강인제어⁽⁴⁾로 이 기법은 피드백 루프에 큰 이득을 사용하여 플랜트의 변화를 관심있는 주파수 영역밖으로 제거하는 것으로서 제어기의 설

*정회원, 한국과학기술원 정밀공학과 대학원

**정회원, 한국과학기술원 정밀공학과

***정회원, 한국원자력연구소 핵전자실

계가 단일 입출력계에서는 명확하나 다입출력계에서는 계산이 어렵다는 난점때문에 선형 시불변 시스템에 국한되어 사용되고 있다. 적응이나 자기조절에 의한 강인제어⁽²⁾는 강인제어의 또 다른 접근 방법으로 플랜트가 원하는 응답을 따라가게 하기 위하여, 플랜트의 매개변수추정(parameter identification)을 한 다음 연속적으로 피드백 루프의 이득을 조절하는 알고리즘으로, 비교적 많은 계산량이 요구되며 작은 매개변수의 변화나 한정(bounded)된 불확실성에 대하여는 잘 거동하나 큰 외란이란 플랜트의 변동에는 잘 거동하지 못하는 경향이 있다. 그리고 슬라이딩 모드 제어기법(sliding mode control)은 비교적 강력한 강인제어 방법으로, 리아프노프(Lyapunov)방법을 기초로하여 불연속적인 제어 입력으로 일정 순간마다 시스템의 구조를 적절히 변화시키는 제어기의 구조를 갖으며, 한정된 매개변수 변동이나 외란에 강인하나 불연속적인 제어 입력에 의하여 진동(chattering)이 생기고, 그 진동이 모델링에 포함되지 않은 고주파 영역의 동적 특성을 자극하게 되는 단점을 지니고 있다.

최근에 제안된 시간지연 제어기법(TDC: Time Delay Control)^(6,7,13~17)은 불확실성을 제거하기 위하여, 피드백 루프에 큰 이득을 사용한다거나 또는 매개변수를 추정하여 이득을 조절하는 대신, 부가적인 루프를 사용하여 불확실성의 제거를 전담하게 하는 구조를 갖고 있다. 상술한다면, TDC제어기는 플랜트의 예측 못한 외란과 잘 모르는 비선형 동역학의 항들을 망라해서 공칭 플랜트 모델에 첨가되는 불확실성의 항으로 치환한 다음, 그 불확실성의 전체적인 항을 직접적으로 추정하고 피드백하여 상쇄하는 부가적 루프를 갖고 있다. 따라서 이 제어기법은 이득조절이나 매개변수 추정을 필요로 하지 않고, 슬라이딩 모드 제어기법에서 흔히 요구되는 비선형 동역학 모델의 실시간 계산을 필요로 하지 않으므로, 위의 제어 알고리즘에 비하여 매우 단순하고 효율적인 구조를 갖는다. 또한 비선형 플랜트의 정확한 모델이 없더라도 제어기의 설계가 가능하며, 모델 오차가 제어기의 성능에 거의 영향을 주지 않는다는 장점도 갖고 있으며, 상기한 진동 등의 부작용도 없다. 이러한 장점은, 이 제어기법을 로봇에의 적용^(13,17)과 자기 베어링에의 적용⁽¹⁶⁾ 등 여러 플랜트에 적용한 결과로부터 확인되고 있다.

그런데 TDC알고리즘을 구현하기 위해서는 전체 상태변수 벡터가 측정 가능하고 전체 상태변수 벡터의 미분치를 알아야 한다는 조건이 요구되고 있다. 그러나 많은 경우에 있어서 전체의 상태변수를 측정하는 것이 가능하지 않으므로 이런 경우에는 TDC알고리즘의 적용이 불가능하게 된다. 또한 전체 상태 변수를 측정할 수 있다라도, 그 미분치를 구하기 위해서는, 미분치를 측정하는 센서를 추가로 사용하거나, 수치미분을 해야 한다. 그런데 상태변수의 미분치를 측정하는 센서를 사용하는 경우, 제어 시스템의 구조가 더욱 복잡하게 되며, 부수적인 장비비용이 요구된다. 한편, 수치미분을 할 경우 센서 잡음을 증폭하는 단점을 갖게 된다. 이러한 문제점에 대한 하나의 해결책으로서 관측기의 사용을 고려할 수 있다.

이 논문에서는 잘 모르는 플랜트에 대하여 TDC를 위한 관측기를 설계하고, 이 관측기와 TDC제어기가 연결된 전체 계의 안정화에 대하여 해석한다. 그리고 이 관측기와 TDC제어기를 DC서보 모터 시스템에 적용하여, 모터에 가해지는 외란과 내부의 매개변수 변동에 강인한 제어기를 설계하고 그 성능을 실험한다.

2. 시간지연 제어법칙(TDC Law)

TDC알고리즘을 요약하면 다음과 같다.^(6,14) 모든 상태변수와 상태변수의 미분량은 측정 가능하다고 가정하고 아래와 같은 비선형 동역학 모델을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + B(x, t)u + d(t) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 x 는 $(n \times 1)$ 상태벡터, u 는 $(r \times 1)$ 입력 벡터, y 는 $(m \times 1)$ 출력 벡터, $f(x, t)$ 는 $(n \times 1)$ 모르는 비선형 동역학, $d(t)$ 는 $(n \times 1)$ 모르는 외란, $B(x, t)$ 는 정확한 값은 모르지만 범위를 알고 있는 $(n \times r)$ 제어 영향 행렬, C 는 알려진 $(m \times n)$ 출력 영향 행렬이다. 여기서 식(1)은 광범위한 비선형 플랜트들의 동역학적 거동을 표현할 수 있는 일반적인 표현이 된다. 한편, 불확실성을 나타내는 항들을 추출해서 함께 모으고, 나머지의 확실한 항들과 분리해서 식(1)을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + \hat{B}u \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $(n \times n)$ 행렬 B 는 변수행렬 $\hat{B}(x, t)$ 중 범위에 해당되는 상수 부분이며, 나머지 $f(x, t)$ 는 불확실성의 항들을 집결시킨 $(n \times 1)$ 비선형 시변 벡터로 다음과 같다.

$$\hat{f}(x, t) = f(x, t) + (B(x, t) - \hat{B})u + d(t) \quad (3)$$

2.1 TDC의 원리

TDC제어기의 목적은 플랜트가 식(3)의 불확실성의 영향 가운데서 원하는 제어성능을 얻도록 제어기를 설계하는데 있는데, 원하는 제어성능은 다음 선형 시불변 기준모델(reference model)의 궤적으로 정의한다.

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \quad (4)$$

여기에서 $(n \times 1)$ 벡터 x_m 은 기준모델의 상태벡터, $(n \times n)$ 행렬 A_m 은 안정한 상수 시스템 행렬, $(n \times r)$ 행렬 B_m 은 상수 명령 분포 행렬, 그리고 $(r \times 1)$ 벡터 r 은 제어 명령이다. 우리가 원하는 제어 목적은 식(2)의 플랜트가 식(4)의 기준 모델의 동역학을 갖게 하는 것으로 기준모델의 상태 벡터와 플랜트의 상태벡터의 차로 $e = x_m - x$ 로 정의하면 식(3)과 식(4)로부터 오차 동역학은 다음과 같다.

$$\dot{e} = A_m e + [-\hat{f}(x, t) + A_m x + B_m r - \hat{B}u] \quad (5)$$

만약 제어 입력 u 를

$$-\hat{f}(x, t) + A_m x + B_m r - \hat{B}u = Ke \quad (6)$$

의 식을 만족하도록 u 를 결정하면 오차 동역학은 다음과 같아진다.

$$\dot{e} = (A_m + K)e \quad (7)$$

이때 $K=0$ 인 경우는 하나의 특수한 경우로 기준 모델과 플랜트의 오차 동역학 계 행렬이 A_m 이 된다. 그런데, 식 (6)을 만족하는 u 가 항상 존재하는 것이 아니기 때문에 u 의 최적 근사해를 구하면 다음과 같다.

$$u = \hat{B}^+ [-f(x, t) + A_m x + B_m r - Ke] \quad (8)$$

여기서, \hat{B}^+ 는 \hat{B} 의 의사 역행렬(pseudo inverse)으로서 다음의 관계를 만족시킨다.⁽¹²⁾

$$\hat{B}\hat{B}^+\hat{B} = \hat{B} \quad (9)$$

이상과 같이 결정된 식(8)이 TDC제어기의 기본 알고리즘이 된다. 식(8)로 결정된 u 가 식(7)과 같은 오차 동역학을 만족하는지 알아보기 위해 식(8)을 식(5)에 대입하고 정리하면 오차 동역학은 식(10)과 같고 이로 부터 부가적으로 식(11)의 구속 방정식이 생긴다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A_m + K)e + (I - \hat{B}\hat{B}^+) [-f(x, t) \\ &\quad + A_m x + B_m r - Ke] \quad (10) \\ (I - \hat{B}\hat{B}^+) [-\hat{f}(x, t) + A_m x + B_m r - Ke] &= 0 \quad (11) \end{aligned}$$

식(11)의 구속 방정식을 만족하고 $(A_m + K)$ 의 고유치가 좌평면에 위치하면, 시간이 흐름에 따라 무한대로 갈때 오차가 0으로 수렴하게 된다. 만약 \hat{B} 가 $(n \times n)$ 행렬이면 $(I - \hat{B}\hat{B}^+)$ 가 영행렬이 되어 저절로 식(11)를 만족하게 되나, 그렇지 않다면 \hat{B} 와 $\hat{f}(x, t)$ 의 형태에 따라 우리가 선정할 수 있는 기준모델의 동역학과 오차이득 A_m, B_m, K 가 구속을 받게된다. 선형 시스템의 경우에는 \hat{B} 와 $\hat{f}(x, t)$ 가 제어가능(controlable)한 쌍이라면 시스템을 안정화시킬 수 있는 임의의 A_m, B_m, K 를 선정할 수 있다. 결국 TDC를 적용하기 위하여는, \hat{B} 와 $\hat{f}(x, t)$ 에 따라 결정된 A_m, B_m, K 들이 시스템을 안정화할 수 있어야 한다. Youcef-Toumi⁽¹⁴⁾의 논문에 의하면 위상 변수 형태(phase variable form)로 변환 가능한 플랜트는 이 구속 방정식을 항상 만족한다.

2.2 시간지연 판단에 의한 제어기 설계

TDC의 기본 알고리즘, 식(8)을 구현하려면 먼저 불확실성을 대표하는 $\hat{f}(x, t)$ 를 알아야 한다. $\hat{f}(x, t)$ 가 연속함수라는데 착안하여 시간지연 L 이 충분히 작다면 $\hat{f}(x, t)$ 와 $\hat{f}(x, t-L)$ 은 거의 같은 양을 가질 것이다. 즉

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, t) &= \hat{x} - \hat{B}u \\ &\cong \hat{x}(t-L) - \hat{B}u(t-L) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, 시간지연 L 은 이산 제어 구현시 표본시간(sampling time)에 해당하며 충분히 작다고 말할 수 있다. 식(12)를 식(8)에 대입하면 시간지연을 이용한 최종적인 제어 법칙이 다음과 같이 이루어지게 된다.

$$u = \hat{B}^+ [-\hat{x}(t-L) + \hat{B}u(t-L) + A_m x + B_m r - Ke] \quad (13)$$

식(13)의 제어 법칙에서 보듯이 TDC제어기법은 상태변수 $x(t)$ 와 그 미분치, $\dot{x}(t)$ 가 측정 가능하여야 한다.

3. 관측기 설계

전 절에서 언급하였듯이 TDC제어기에서 모든 상태변수가 측정 가능하다고 가정하였으나 실제의 피드백에서 모든 상태변수가 측정 가능한 것은 아니다. 결국 측정 불가능한 상태변수를 관측할 수 있는 TDC에 연결된 관측기를 설계하여야 한다. 알려진 관측 가능한 시스템에서는 루엔버거(Luenberger) 관측기로 상태변수를 잘 관측할 수 있다.^(9,11) 그러나 모르는 비선형 시스템의 경우에는 모르는 불확실성의 양과 상태변수를 동시에 추정하여야 하므로 관측기의 구조가 복잡하고,^(8,10) 그 안정성에 대한 해석은 용이하지 않다.

식(2)와 같은 모르는 시스템의 상태변수를 추정하기 위해 다음과 같은 선형 관측기를 제안한다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_m z + B_m r + F(\hat{y} - y) \\ &= A_m z + B_m r + FC(z - x) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, z 는 관측기의 상태변수, \hat{y} 는 관측기에 의한 출력이다. 위의 관측기는 기준 모델의 동역학을 사용하고 있는데, 그 이유는 식(2)의 플랜트 동역학이 TDC에 의해 기준 모델의 동역학을 추종하게 되기 때문이다. 이러한 관측기를 사용할 때, 식(13)에서 제어 피드백되는 상태변수 x 대신 관측기로 관측된 z 가 사용되고 모르는 비선형 동역학의 양 $\hat{f}(x, t)$ 의 시간지연 추정은 z 에 의해 추정된다. 따라서 제어입력 u 는 다음과 같이 결정된다.

$$u = \hat{B}[-\hat{f}(z, t) + A_m z + B_m r - K(x_m - z)] \quad (15)$$

$$\hat{f}(z, t) = \dot{z}(t-L) - \hat{B}u(t-L) \quad (16)$$

식(14)의 관측기와 식(15)와 식(16)의 TDC제어기

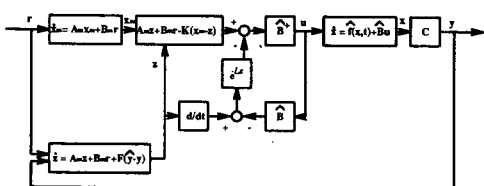


Fig. 1 Block diagram of TDC system with proposed observer

가 연결된 전체 계의 블록 선도는 Fig. 1과 같다.

4. 관측기와 제어기가 연결된 전체 계의 안정성

이 절에서는 식(14)의 관측기와 식(15)의 TDC 제어기가 연결된 전체 계의 안정성을 해석하고자 한다. 제어기와 관측기가 연결된 전체 폐루프 시스템의 안정성의 해석을 통하여 안정하기 위한 충분조건을 구한 다음, 기준 모델과 전체 시스템의 오차 $e(t)$ 의 수렴성에 관하여 해석한다.

4.1 안정성의 충분조건

관측기와 TDC제어기가 연결된 전체 계의 안정성에 관한 충분 조건은 다음과 같은 정리로 요약될 수 있다.

정리 1

시간 지연 $L > 0$ 인 제어기와 관측기가 연결된 전체 연속계는 만약 불확실성의 전체 양인 $\hat{f}(x, t)$ 가 연속 함수이고, 식(11)의 조건을 만족하며, 식(17)의 특성 방정식의 고유치인 λ 가 좌평면에 있으면 내부적⁽⁵⁾으로 안정하다.

$$\begin{aligned} \det\{(\lambda I - A_e) - \hat{B}\hat{B}^+(e^{-L\lambda} I - A_e) \\ (\lambda I - A_o)^{-1}(\lambda I - A_m)\} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$A_e = (A_m + K), \quad A_o = (A_m + FC) \quad (18)$$

증명 :

먼저 식(15)의 u 와 식(16)을 플랜트의 동역학(2)에 대입한 다음, 정리하면 관측기와 제어기가 연결된 전체 계의 동역학은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{f}(x, t) + \hat{B}\hat{B}^+[-\dot{x}(t-L) \\ &\quad + \hat{B}u(t-L) + A_m x + B_m r - Ke] \\ &\quad + \hat{B}\hat{B}^+[-\dot{z}(t-L) + \dot{x}(t-L) \\ &\quad + (A_m + K)(z - x)] \end{aligned} \quad (19)$$

전체 계는 TDC의 구축 방정식인 식(11)을 만족하기 때문에, 식(19)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_m + K)x + B_m r - Kx_m \\ &\quad + \hat{f}(x, t) - \hat{f}(x, t-L) + \hat{B}\hat{B}^+[-\dot{z}(t-L) \\ &\quad + \dot{x}(t-L) + (A_m + K)(z - x)] \end{aligned} \quad (20)$$

초기값 $z(0)$ 를 0로 놓고, 관측기의 식을 라플라스 변환하여 정리하면 다음과 같고,

$$Z(s) = -(sI - A_o)^{-1}FCX(s) + (sI - A_o)^{-1}B_nR(s) \quad (21)$$

식(21)와 식(18)를 이용하여, 각각의 초기값 $x(0)$, $z(0)$ 로 놓고, 식(20)을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$\{(sI - A_e) - \hat{B}\hat{B}^+(e^{-Ls}sI - A_e)(sI - A_o)^{-1}(sI - A_m)\}X(s) = [I - \hat{B}\hat{B}^+(e^{-Ls}sI - A_e)(sI - A_o)^{-1}]B_mR(s) - KX_m(s) + (1 - e^{-Ls})\hat{F}(s) \quad (22)$$

여기서, $\hat{F}(s)$ 는 $\hat{f}(x, t)$ 의 라플라스 변환한 값이다. 기준 모델은 초기치를 $x_m(0) = 0$ 로 놓고, 라플라스 변환하면 다음과 같고,

$$X_m(s) = (sI - A_m)^{-1}B_mR(s) \quad (23)$$

식(23)을 이용하여 식(22)를 정리하면 다음과 같다.

$$\Phi(s)X(s) = \Phi(s)(sI - A_m)^{-1}B_mR(s) + (1 - e^{-Ls})\hat{F}(s) \quad (24)$$

여기서,

$$\Phi(s) = \{(sI - A_e) - \hat{B}\hat{B}^+(e^{-Ls}sI - A_e)(sI - A_o)^{-1}(sI - A_m)\} \quad (25)$$

위의 결과로부터, 전체 계의 특성 방정식은 다음과 같다.

$$\det\{(\lambda I - A_e) - \hat{B}\hat{B}^+(e^{-L\lambda}\lambda I - A_e)(\lambda I - A_o)^{-1}(\lambda I - A_m)\} = 0 \quad (26)$$

결국 제어기와 관측기가 연결된 시간 지연 $L > 0$ 인 전체 계는 $\hat{f}(x, t)$ 가 연속 함수이고, 식(11)을 만족하며, 특성 방정식인 식(26)의 고유치 λ 가 좌평면에 있으면 내부적⁽⁶⁾으로 안정하다. (Q. E. D.)

4.2 오차의 수렴성

제어기와 관측기가 연결된 전체 계가 내부적으로 안정할때, 전체 계와 기준 모델의 오차($e = x_m - x$)가 0으로 수렴하는지의 여부에 관한 검토가 필요하다. 그 결과는 다음과 같은 정리로 요약될 수 있다.

정리 2

만약 제어기와 관측기가 연결된 전체 계가 내부적으로 안정하고, 불확실성의 전체 양인 $f(x, t)$ 가 연속 함수이고 정상 상태에서는 상수 값을 가진다면, 전체 계와 기준 모델의 오차가 0으로 수렴한

다.

증명 :

만약 전체 계가 안정하다면, 오차의 정상 상태의 값은 최종값 정리(Final value theorem)에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (27)$$

$e = x_m - x$ 의 관계식과 기준 모델로 부터 나온 다음의 관계식을 고려하면,

$$sX_m(s) = A_mX_m(s) + B_mR(s) \quad (28)$$

식(22)은 다음과 같이 정리된다.

$$\{(sI - A_e) - \hat{B}\hat{B}^+(e^{-Ls}sI - A_e)(sI - A_o)^{-1}(sI - A_m)\}E(s) = \hat{B}\hat{B}^+(e^{-Ls}sI - A_e)(sI - A_o)^{-1}B_mR(s) - (1 - e^{-Ls})\hat{F}(s) - \hat{B}\hat{B}^+(e^{-Ls}sI - A_e)(sI - A_o)^{-1}(sI - A_m)X_m(s) \quad (29)$$

여기서, 제어기와 관측기가 연결된 전체 계가 내부적으로 안정하다는 가정과, 기준 모델을 라플라스 변환한 식(23)을 이용하면, 식(29)는 다음과 같이 정리된다.

$$\{(sI - A_o) - \hat{B}\hat{B}^+(e^{-Ls}sI - A_e)(sI - A_o)^{-1}(sI - A_m)\}E(s) = -(1 - e^{-Ls})\hat{F}(s) \quad (30)$$

전체 계와 기준 모델의 오차의 최종값은 최종값 정리에 의하여 다음과 같다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\Gamma^{-1} \lim_{s \rightarrow 0} [(1 - e^{-Ls})s\hat{F}(s)] \quad (31)$$

여기서,

$$\Gamma = -A_e + \hat{B}\hat{B}^+A_eA_o^{-1}A_m \quad (32)$$

Γ 가 nonsingular하다고 가정하고, 불확실성의 전체적인 양인 $\hat{F}(x, t)$ 가 다음과 같다면,

$$\Gamma^{-1} \lim_{s \rightarrow \infty} [(1 - e^{-Ls})s\hat{F}(s)] = 0 \quad (33)$$

기준모델과 전체 계의 오차는 0으로 수렴하게 된다.

식(33)을 만족하는 불확실성의 전체적인 양의 예로는, 스텝 함수를 포함한 정상 상태에서 상수 값을 갖는 여러 가지 연속적인 함수 형태의 불확실성, 어떠한 주파수의 정현파나 정현파의 조합의 함수 형태의 불확실성, 그리고 주기 L 을 갖는 주기 함수 등이 있다. (Q. D. E.)

5. 모의실험 (Simulation)

이 절에서는 제안한 관측기의 성능을 시험하기 위하여 모의 실험을 수행한다. 이 모의 실험에서는 모르는 비선형 동역학을 갖는 플랜트에 대하여 제안된 관측기를 설계하고, 이 관측기가 TDC 제어기와 함께 사용되었을 때 상태변수와 그 미분치를 잘 관측하는지의 여부와 그 응답을 관찰한다. 그리고 상태변수 미분치를 구하는 상황에서, 관측기를 사용하는 것과 수치미분하는 경우에 대해서, 각각의 센서 잡음에 대한 민감성과 제어성능을 비교한다. 플랜트는 다음과 같은 모르는 비선형 단일 입출력계이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{b} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0]x \end{aligned} \quad (34)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv 2 * y * \sin(y) / (2/3 + \cos(y)) \\ \beta &\equiv \cos(y) / (2/3 + \cos(y)) \\ \hat{b} &\equiv 2/3 \\ b &\equiv \cos(y) \end{aligned}$$

5.1 관측기 및 제어가 설계

제어기의 기준모델은 2차 시스템으로서, 식(4)의 기준 모델 동역학의 시스템 행렬이 다음과 같은 모델을 선정하였으며,

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

관측기는 위의 기준 모델을 근거로 하여 다음과 같이 선정하였다.

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} r + F(\hat{y} - y) \quad (36)$$

여기서, $F = [f_1 \ f_2]^T$ 이다 제어 변수들의 값을 각각 $\xi=1$, $\omega_n=10$, $K=0$ 로 선정하면, 관측기가 사용된 TDC제어 법칙은 식(15)로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t-L) + \frac{1}{b} [-\dot{z}_2(t-L) - \omega_n^2 z_1 \\ &\quad - 2\xi\omega_n z_2 + \omega_n^2 r] \end{aligned} \quad (37)$$

식(37)에서 $\dot{z}_2(t-L)$ 은 관측기에 의한 피드백에서 식(14)의 우변의 관계에 의하여 결정된 z_2 를 사

용한다.

이 모의 실험에서는 시간 지연 L 은 표본시간과 같은 0.02초로 선정하였고, 관측기의 이득 F 의 값은 $[-230 \ -7600]^T$ 로 선정 되었는데, 그 선정 방법은 다음과 같다. 먼저 관측기의 정상 상태 도달 속도가 제어 플랜트보다 훨씬 빨라야 한다는 요구 조건을 만족시키기 위해, $(A_m + FC)$ 의 고유치를 A_m 의 고유치 -10 , -10 보다 약 7배 이상 s -평면의 왼쪽에 위치하는 -67 , -180 으로 선정하였다. 그 다음, 선정된 각각의 제어 변수에 대하여, 식(17)으로부터 전체 계의 특성 방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & (1 - e^{-L\lambda})\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_n^2 & (e^{-L\lambda} + 2\xi\omega_n) \end{bmatrix} G(\lambda) \right\} = 0 \quad (38)$$

여기서,

$$G(\lambda) = (\lambda I - A_o)^{-1} FC \quad (39)$$

이 특성 방정식의 해에 대한 해석을 Youcef-Toumi⁽¹⁵⁾의 정리를 근거로 해석해 보았다. 이 정리는 $e^{-L\lambda}$ 가 포함된 복잡한 식의 해를 해석하는데 있어서, 보다 단순한 식의 근에 대한 해석을 통하여 원래의 식의 해가 수렴하는 값을 알수 있게 하는 정리이다.

만약 $\lambda \neq 0$ 인 경우, 식(38)은 다음과 정리된다.

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1/\lambda \\ 0 & (1 - e^{-L\lambda}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_n^2 & (e^{-L\lambda} + 2\xi\omega_n/\lambda) \end{bmatrix} G(\lambda) \right\} = 0 \quad (40)$$

우선, λ 의 실수부가 무한대가 될때, 식(40)의 우변이 0으로 수렴하지 않기 때문에 $Re(\lambda) < \alpha$ 인 α 가 존재한다. λ 의 절댓값이 무한대로 가게 되면, 식(40)는 다음과 같이 정리된다.

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - e^{-L\lambda}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-L\lambda} \end{bmatrix} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} G(\lambda) \right\} = 0 \quad (41)$$

그런데 $G(\lambda)$ 는 A_o 가 안정한 시스템 행렬이므로, 다음의 관계가 성립하고,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} G(\lambda) = 0 \quad (42)$$

따라서, 식(41)으로부터 다음 관계가 얻어진다.

$$\Rightarrow 1 - e^{-L\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{2\pi k}{L}i, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (43)$$

결국, $j \rightarrow \infty$ 일 때, $|\lambda| \rightarrow \infty$ 인 다음과 같은 $\{\lambda_j\}$ 의 sequence가 존재하게 된다.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j - \frac{2\pi j}{L}i| = 0 \quad (44)$$

이 결과는 거의 무한대로 큰 주파수에서 허수축에 고유치가 존재함을 나타내고, 제어기와 관측기가 연결된 전체 계는 경계 안정(marginally stable)하다.

그러나 이 결과는 TDC제어기를 연속 시간 구현한 경우에는 그러하나, TDC제어기를 이산 제어 구현시에는 다르다. TDC제어기를 이산 제어 구현하게 되면 표본화의 과정에서 anti-aliasing filter 등에 의하여 매우 큰 주파수 성분은 제한이 생기게 되고, ⁽¹⁵⁾ e^{-Ls} 에 의한 연속계의 무한 차원 계가 이산계에서는 유한 차원 계로 되기 때문에, 이산 제어 구현 계에서는 지수 안정(exponentially stable)하게 된다. 이러한 연속계에서의 경계 안정과 이산

계에서의 지수 안정의 관계는 repetitive control의 연속 계 구현과 이산 계 구현의 결과와 유사하다. ^(1,5)

5.2 모의실험 결과

제안된 관측기의 성능을 두가지 관점에서 모의실험하였다. 첫째는, 제안된 관측기가 상태 변수와 그 미분치를 잘 추정하는지의 여부를 시험하였고, 둘째는, 센서 잡음의 영향에 대하여 관측기와 수치 미분을 사용한 경우의 성능을 비교하였다.

첫번째 모의 실험의 결과는 Fig. 2으로 스텝 입력에 대한 전체 계의 응답을 나타낸다. 이 그림에서 보듯이, 모르는 비선형 동역학을 갖는 플랜트에 대하여 제안된 관측기가 상태변수와 상태변수의 미분치를 잘 추정하면서, 원하는 응답을 매우 잘 추적함을 볼 수 있다.

두번째 모의 실험에서는 센서 잡음에 대한 영향을 보기 위하여, 피드백이 이루어지는 x 의 센서에, 명령(1 rad)에 대한 표준 편차 0.002와 0.02의 가우시안 잡음이 존재할 때 각각의 단위 스텝 응답

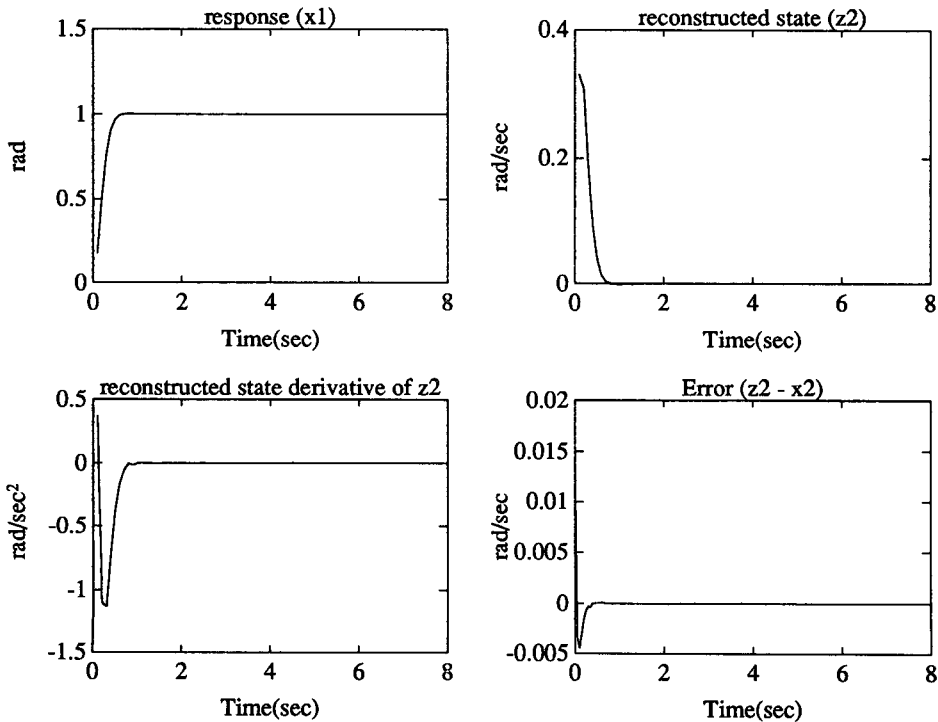


Fig. 2 Step response of reconstructed states of TDC with observer, with no sensor noise

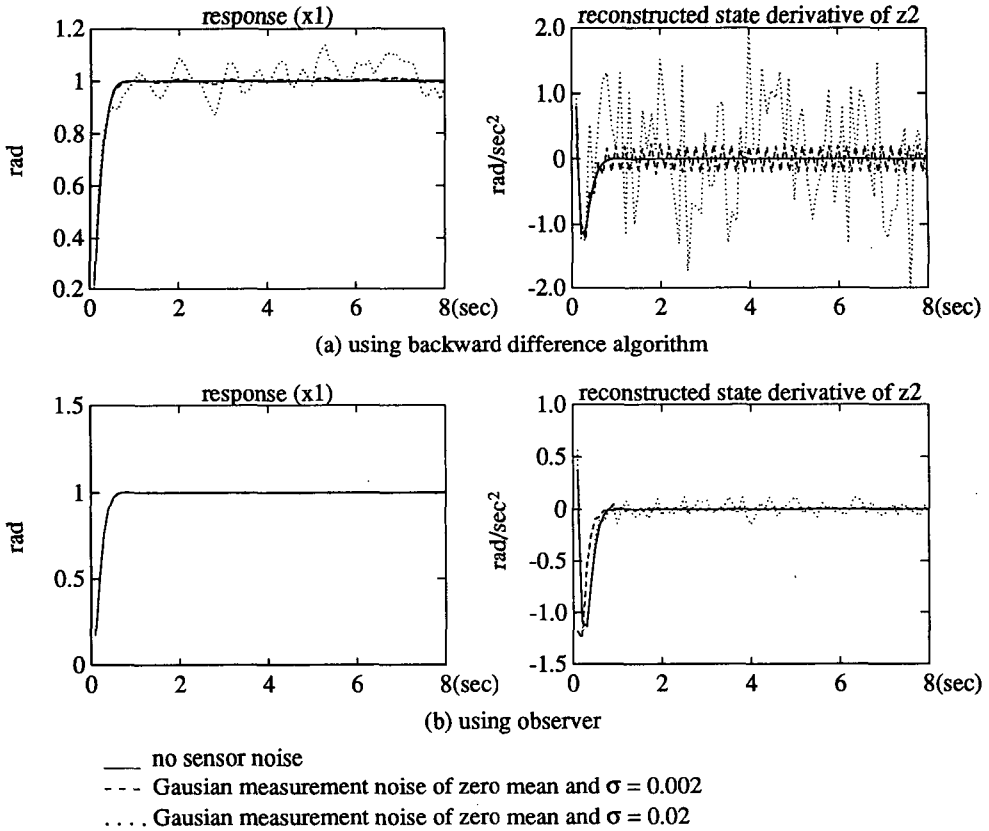


Fig. 3 Noise corrupted step response with Gaussian Measurement noise

을 보았다. 수치 미분을 사용한 경우에는 Fig. 3(a)에서 보듯이, 수치미분에 의해 추정된 \dot{z}_2 가 센서 잡음의 편차에 대하여 증폭된 편차를 지니게 되어 응답이 원하는 응답으로부터 벗어남을 볼 수 있다. 이 결과로부터 수치 미분을 사용한 TDC계가 센서 잡음에 매우 민감함을 볼 수 있다. 그런데 관측기를 사용한 경우에는 Fig. 3(b)에서 보듯이, 응답이 센서 잡음의 영향을 필터링하는 효과를 주어, 응답의 편차가 수치 미분을 사용한 경우의 응답 편차보다 약 1/10정도로 작아짐을 볼 수 있다. 즉 관측기를 사용한 TDC계가 센서 잡음에 덜 민감한 향상된 성능을 보임을 알 수 있으며, 센서 잡음에 관한 문제에 대한 하나의 해결책이 됨을 알 수 있다.

6. DC모터 실험

일반적으로 모터의 동역학은 다음과 같은 2차 모

델을 고려할 수 있다.⁽⁷⁾

$$M\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + d(\theta, \dot{\theta}, t) = r \tag{45}$$

여기서, M 은 모터의 등가 회전 관성, B 는 모터의 등가 점성 마찰 계수, $d(\theta, \dot{\theta}, t)$ 는 정확한 모델을 구하기 어려운 비선형성과 예측할 수 없는 외란, 그리고 r 는 모터의 입력이다. M 은 범위안에 해당하는 상수 등가 회전 관성 \hat{M} 을 도입하여 식 (45)

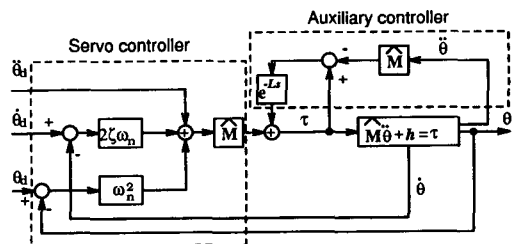


Fig. 4 Block diagram of servo motor control system using TDC

를 상태 방정식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ h/\hat{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\hat{M} \end{bmatrix} r \quad (46)$$

여기서, $h = (\hat{M} - M)\ddot{\theta} - B\dot{\theta} - d(\theta, \dot{\theta}, t)$ 로서 알려지지 않은 시변 함수이다. TDC를 적용하기 위하여 식(35)의 기준모델을 선정하면, 식(37)과 식

(36)과 같은 형태의 TDC제어기와 관측기가 설계되며, 블록 선도는 Fig. 4와 같다.

본 실험에서의 실험 장치의 구성 Fig. 5에 나타나 있고, 무부하 상태의 M 은 공칭값 \hat{M} 은 0.065 kg-cm²이다. 이 때의 과도 응답의 시정수를 0.1초로 하는 PD제어기와 수치 미분을 사용한 TDC제어기와 PID제어기를 구현하였다. 그런데 PID제어기는 점성 마찰력과 외란의 영향에는 안정하게 제어하는 거동을 보이나, 회전 관성의 변동에 대하여는 급격히 불안정하여져서, 회전 관성의 변화가 존재하는 상황에서는 제어 알고리즘으로 부적절함을 볼 수 있었고, 따라서 이 절에서는 PID제어기는 제외하였다. 첫번째 모의 실험에서는 모터의 회전 관성의 변동이나, 외란이 전혀 없는 상황에서의 각각의 제어기의 응답을 보았다. 이 때 PD제어기는 Fig. 6(a)에서 보듯이 정상 상태에서 모델링되지 못한 모터의 마찰력에 의한 영향으로 정상 상태 오차

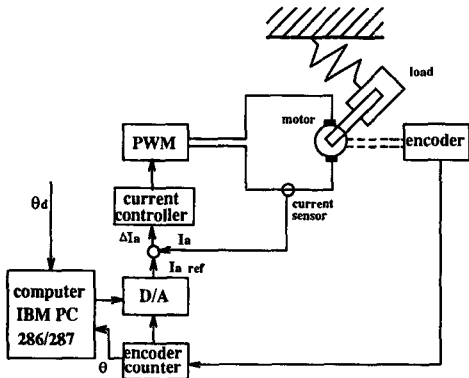


Fig. 5 Experimental set-up DC servo motor control system

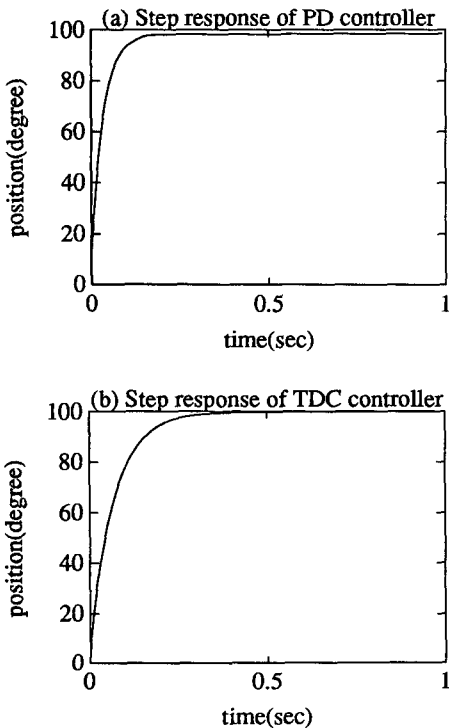


Fig. 6 Experimental results without uncertainty for PD and TDC control system

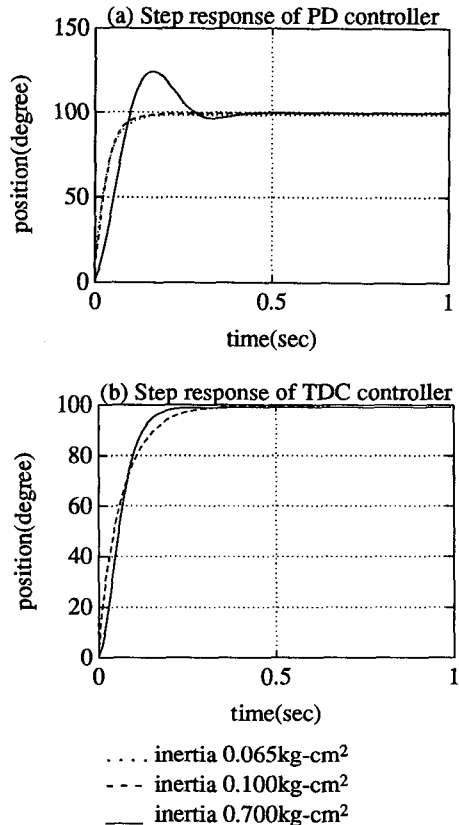


Fig. 7 Experimental results with inertia variations: (a) PD control case; (b) TDC control case

가 미세하게 잔류함을 볼 수 있으나, TDC제어기는 Fig. 6(b)에서 보듯이 모델링되지 못한 모터의 마찰력의 영향을 잘 상쇄하여 정상 상태 오차없이 원하는 응답을 볼 수 있다.

두 번째의 실험에서는 모델링되지 못한 플랜트의 매개 변수 변동으로 모터에 회전 관성을 0.1 kg-cm^2 (초기 회전 관성의 1.7배)와 0.7 kg-cm^2 (초기 회전 관성의 12배)로 변화를 주었을 때의 응답을 보았다. PD제어기는 Fig. 7(a)에서 보듯이 회전 관성이 증가함에 따라 페루프의 극점의 위치가 변화하므로 오버슈트가 생김을 볼 수 있으나, TDC제어기는 Fig. 7(b)에서 보듯이 회전 관성이 큰 폭으로 증가함에도 불구하고 원하는 응답을 잘 추적하는 것을 관찰할 수 있다.

세 번째의 실험에서는 각각의 제어기의 외란에 대한 제어 성능을 알아보기 위하여 모터에 다음의 두

가지의 스프링 강성을 갖는 스프링 외란력이 작용하였을 때의 응답을 보았다. 첫 번째의 스프링 외란력은 $-k(0.5 - \sin(\theta))$ ($k=1.2 \text{ kgf-cm}$)으로 여기서, k 의 값은 모터 스톨 토크의 30% 정도에 해당하며, 두 번째의 스프링 외란력은 $-k\sin(\theta)$ ($k=1.8 \text{ kgf-cm}$)으로 여기서, k 의 값은 모토 스톨 토

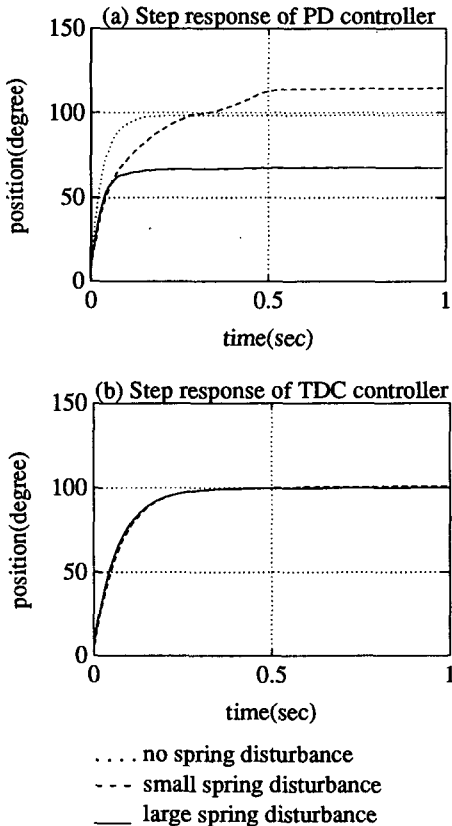


Fig. 8 Experimental results with external spring disturbance: (a) PD control case; (b) TDC control case

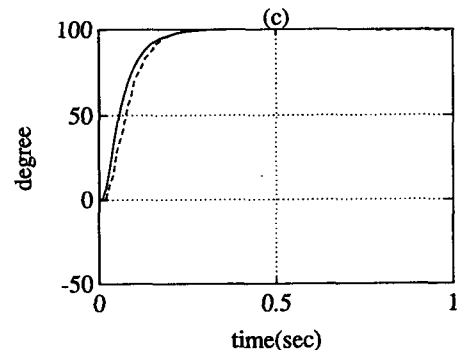
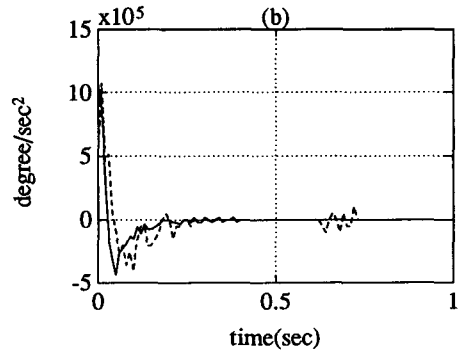
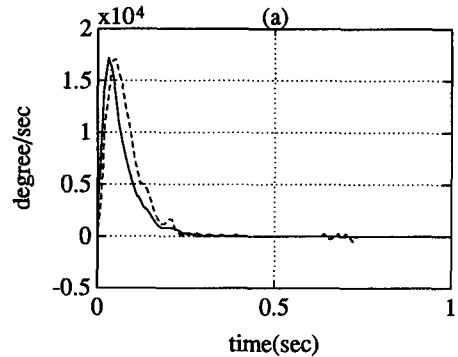


Fig. 9 Experimental results when numerical differentiator and the proposed observer are compared

크의 45%정도에 해당한다. 이 때의 응답은 Fig. 8에 나타나 있다. Fig. 8(a)에서 보듯이 PD제어기에서는 예측하지 못한 스프링 외란력에 대하여, 그 크기에 비례하여 정상 상태에서도 잔류 오차를 가짐을 볼 수 있으나, TDC제어기는 Fig. 8(b)에서 보듯이 예측하지 못한 외란에도 불구하고 원하는 제어 응답으로 부터 벗어남이 없이 잘 따라감을 볼 수 있다.

그리고 제안한 관측기의 효용성을 알아 보기 위하여 수치 미분을 사용한 경우와 관측기를 사용한 경우에 대하여 각각 세번째와 같은 실험을 했다. Fig. 9(a)의 실선과 Fig. 9(b)의 실선에서 보듯이 제안된 관측기가 모터의 매개 변수변동과 외란이 작용하는 상태에서도 모터의 상태변수인 각속도와 상태변수의 미분치인 각 가속도를 잘 관측함으로써 볼 수 있으며 수치 미분을 사용한 경우 (Fig. 9(a)의 점선과 Fig. 9(b)의 점선)보다 잡음에 의한 영향이 적음을 볼 수 있다. 그리고 Fig. 9(c)에서 보듯이 관측기에 의한 상태변수 피드백 TDC제어기가 원하는 응답을 잘 따라감을 볼 수 있다.

7. 결 론

본 논문에서는 시간지연 제어기와 연결된 관측기를 제안하고 그 안정성에 대하여 해석하였다. 이 관측기는 기준모델을 이용하여 플랜트의 출력만으로 상태변수를 추정하며, 관측기로 부터 추정된 상태변수와 상태변수의 미분치를 피드백하여 구성된 전체계의 안정성에 관한 충분 조건을 구하고, 오차의 수렴성에 관한 경향을 해석하였다. 제안된 관측기는 플랜트의 비선형 동역학이나 불확실성의 정확한 수학적 모델을 필요로 하지 않기 때문에 구조적으로 매우 간단하다. 그리고 모의 실험 결과 제안된 관측기가 모르는 동역학을 가진 플랜트에 대하여 상태변수를 잘 관측함을 볼 수 있으며, 또한 센서 잡음에 대하여 미분기를 사용한 경우보다 더 강한 성능을 볼 수 있었다.

그리고 제안한 관측기와 TDC제어기를 이용하여 DC서보 모터 시스템의 강인 제어를 구현하여 실험한 결과 TDC가 예측하지 못한 외란과 모델링되지 못한 플랜트 매개변수 변동에 매우 강한 제어 성능을 보임을 볼 수 있었으며 제안한 관측기가 TDC제어기와 연결되어 안정하게 상태변수를 관측할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Chew, K. K. and Tomizuka, M., 1990, "Steady State and Stochastic Performance of A Modified Discrete-Time Prototype Repetitive Controller," ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol. 112, pp. 35~41.
- (2) Craig, J. J. and et al., 1986, "Adaptive Control of Robot Manipulator," Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation., pp. 7~10.
- (3) Dorato, P., 1987, "A Historical Review of Robust Control," IEEE Control System Magazine., Vol. CSM-7, No. 2, pp. 44~47.
- (4) Doyle, J. C. and Stein, G., 1981, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical / Modern Synthesis," IEEE Trans. on Automatic Control., Vol. AC-26, No. 2, pp. 4~16.
- (5) Hara, S. and et al., 1988, "Repetitive Control System :A New Type Servo System for Periodic Exogenous System," IEEE Trans. on Automatic Control., Vol. AC-33, No. 7. pp. 659~668.
- (6) Hsia, T. C. and Gao, L. S., 1990, "Robot Manipulator Control using Decentralized Time-Invariant Time-Delayed Controller," Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation., pp. 2070~2075.
- (7) Hsia, T. C., 1989, "A New Technique for Robust Control of Servo System. IEEE Trans. on Industrial Electronics., Vol. IE-36, pp. 1~7.
- (8) Koehne, M., 1982, "Modeling and Simulation of Nonlinear and Adaptive Observer," 10th IMACS World Congress on System Simulation and Scientific Computation. pp. 436~441.
- (9) Luenberger, D. G., 1966, "Observers for Multivariable Systems." IEEE Trans. on Automatic Control., Vol. AC-11, pp. 190~197.
- (10) Mielczarski, W., 1987, "Observing the State of a Synchronous generator Part I," Int. Journal of Control., Vol. 45, No. 3, pp. 987~1000.
- (11) O'Reilly., 1983, "Observer for Linear System," London:Academic Press.
- (12) Rao, C. R., 1971, "Generalized Inverse of Matrix and its Application," New York: Wiely.

- (13) Youcef Toumi, K. and Fuhlbrigge, T., 1989, "Application of Decentralized Time Delay Controller to Robot Manipulator," Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. pp. 1786 ~1791.
- (14) Youcef-Toumi, K. and Ito, O., 1990, "Controller Design for Systems with Unknown Dynamics," ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control., Vol. 112, No. 1, pp. 133~142.
- (15) Youcef-Toumi, K. and Reddy, S., 1992, "Analysis of Linear Time Invariant Systems with Time Delay." Proc. of American Control Conference., pp. 1940~1944.
- (16) Youcef-Toumi, K. and Bobbett, J., 1991, "Stability Analysis of Uncertain Linear System with Time Delay," ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control., Vol. 113, pp. 558 ~567.
- (17) Youcef-Toumi, K. and Shortlidge, C. C., 1991, "Control of Robot Manipulator Using Time Delay," Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation., pp. 2391~2395.