

〈論 文〉

이차원 무한요소 형성에 관한 연구

신용태* · 임장근**

(1992년 9월 4일 접수)

Study on the Formulation of Two Dimensional Infinite Elements

Yong-Tae Shin and Jang-Keun Lim

Key Words : Infinite Element(무한요소), Mapping Function(사상함수), Decay Function(감쇄함수), Decay Length(감쇄길이)

Abstract

Using regular finite elements and infinite elements simultaneously, elastic boundary value problems with infinite domain can be analyzed more effectively and accurately. In this paper, two dimensional infinite elements have been formulated by means of applying the derived mapping function to the coordinates and multiplying the regular displacement shape functions by a decay function. Orders(m,n) of the mapping and decay functions are found for the purpose of obtaining the convergent solutions without respect to the various decay lengths. As a result of numerical tests for an infinite plate with a hole under internal pressure, two sets of function orders are obtained as follows. (a) $n=0, m=1.5$ (b) $n=m=0.65$

1. 서 론

무한영역(infinite domain)을 갖는 구조물에 대한 유한요소 해석의 경우에 일반적인 해는 적절한 유한경계(finite boundary)의 영역으로 근사화하여 구하여 왔다. 그러나 이러한 방법은 적절한 유한경계와 그에 따르는 조건을 선택하는데 어려움이 따르기 때문에 해석자의 경험과 직관을 필요로 하고 정확한 해를 구하기 위해서는 계의 자유도 수가 크게 증가하게 된다. 따라서 이와 같은 문제를 해결하기 위해서는 어느 일정영역까지는 유한요소를 사용하고 나머지 영역은 무한요소(infinite element)를 도입하면 그해의 정확성과 경제성을 크게 향상시킬 수 있다.

무한요소의 구성은 두가지 방향으로 연구되었는

데 첫째는 기존 유한요소의 형상함수(shape function)에 감쇄함수(decay function)를 도입하여 무한방향(Infinite direction)으로 변위분포를 감쇄시켜주는 방법과 둘째는 무한영역에 부합하도록 좌표계를 사상(mapping)시키고 변위분포에 대해서는 일반 형상함수를 도입하는 방법이다. 첫번째 방법에 대해서는 1977년 P.Bettess^(1,2)가 지수함수(exponential function) 형태의 감쇄함수(decay function)를 도입하여 무한경계치문제를 해석하였으며 1981년 Y.k. Chow, I.M. Smith⁽³⁾는 이 방법을 보다 일반화시켜 비선형 문제에 적용하였다. 그러나 이들 지수함수형태의 감쇄함수에는 적절한 감쇄길이(decay length)를 선정하여야하고 이 값이 해에 영향을 주기때문에 이 길이를 합리적으로 택할 수 있는 기준이 제시되어야 한다. 1981년 P.P. Lynn⁽⁴⁾, J.L. Meek⁽⁵⁾등은 $1/r^n$ 형태의 감쇄함수를 도입하고 감쇄길이를 계의 원점(decay origion)에서 무한요소가 시작되는 점까지의 거리로 취하여

*정회원, 한양대학교 기계설계학과 대학원

**정회원, 한양대학교 기계공학과

반무한체 (semi-infinite medium)를 해석하였다. 그러나 $1/r^n$ 형태의 감쇄함수는 강성행렬이 매우 복잡한 형태의 함수가 되어 수치적분의 차수에 매우 민감하게 되므로 적분방법에 특별한 배려가 요구된다. 두번째 방법으로는 1983년 O.C. Zienkiewicz⁽⁶⁾ 등이 무한경계를 잘 표현할 수 있도록 좌표계를 사상(mapping)시킨 사상요소(mapped element)를 제시하였으며 이 방법은 1987년 L. Simoni, B.A. Schrefler,⁽⁷⁾ 1989년 G. Beer, J.O. Watson⁽⁸⁾에 의하여 일반화 되어 널리 사용하게 되었고 1990년 T. A. Angelov⁽⁹⁾에 의해 보다 간단한 형태의 요소가 제시되었다. 그러나 이 방법도 무한요소가 갖고 있는 근본적인 문제는 해결하지 못하고 있다. 즉 무한 경계치 문제에서 유한요소로 해석하여야 할 영역과 무한요소를 사용할 위치선정이 해에 영향을 주며 감쇄함수의 형태와 사상함수의 선정에 따라 유한, 무한요소의 연결위치는 변할 수 있어서 이에 대한 타당성 연구가 요구된다.

본 논문에서는 무한요소에 관한 합리성을 찾기 위하여 무한영역에 관한 사상함수와 변위감소를 위한 감쇄함수를 동시에 도입하고 유한, 무한요소의 연결위치까지의 거리를 감쇄길이로 취할때 이들 함수의 차수와 감쇄길이가 해에 미치는 영향을 명확히 규명하므로써 무한요소를 보다 편리하게 사용하여 해의 정확도와 안정성을 향상시키고자 한다.

2. 무한요소의 정식화

무한요소는 유한요소로 분할된 영역을 제외한 나

머지 무한영역을 해석하기 위한 요소로써 좌표계와 변위분포가 이와같은 특성을 잘 표현할 수 있도록 구성되어야 한다.

2.1 좌표계의 사상함수 (coordinate mapping function)

Fig. 1(a)와 같이 영역이 무한한 ($r=\infty$) 사각형 요소를 갖고있는 좌표계를 Fig. 1(b)와 같이 유한한 영역의 요소를 갖는 $\xi-\eta$ 좌표계로 사상(mapping) 하였을 때 좌표계간의 관계를 식 (1)과 같이 정의한다.

$$\xi = a_1 + \frac{a_2}{r^m}, \quad \eta = \beta_1 + \beta_2 \cdot \theta \tag{1}$$

$a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$ 는 다음조건을 만족하도록 결정되는 미정계수이다.

$$\begin{aligned} r = r_1, \theta = \theta_1 \text{ at } \xi = -1, \eta = -1 \\ r = r_2, \theta = \theta_2 \text{ at } \xi = -1, \eta = 1 \\ r = \infty \text{ at } \xi = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

식 (1), (2)에서 극 좌표계와 사상된 좌표계간에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} r = \frac{r_1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^{\frac{1}{m}} - \eta \right\} + \frac{r^2}{2} \left\{ \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^{\frac{1}{m}} + \eta \right\} \\ \theta = \frac{1}{2} (1-\eta) \theta_1 + \frac{1}{2} (1+\eta) \theta_2 \end{aligned} \tag{3}$$

식 (3)의 극좌표계 r, θ 를 x, y 좌표계로 바꾸고 등매개변수 요소 (isoparametric element)를 사용하기 위한 좌표계의 형상함수형태로 표현하면 다음과

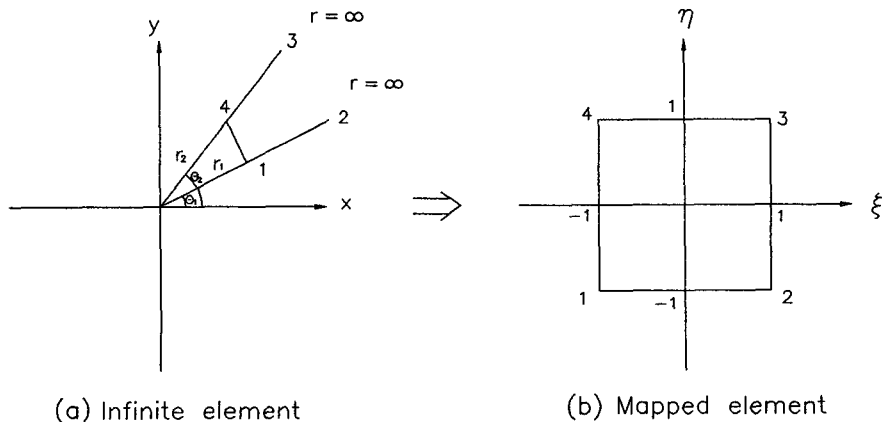


Fig. 1 Coordinate transformation of two dimensional infinite element

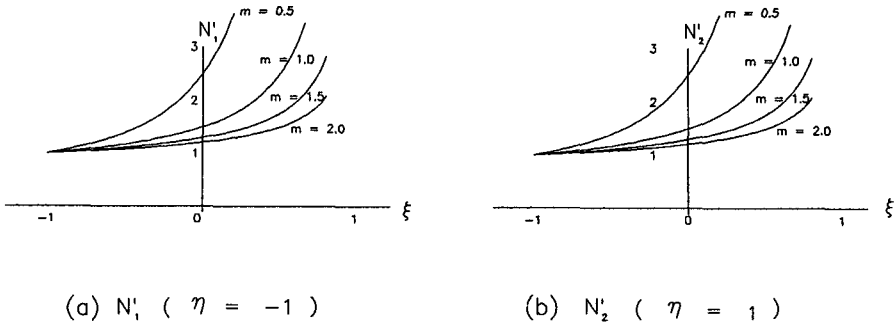


Fig. 2 Characteristic curves of coordinate mapping functions

같이 정리할 수 있다.

$$x = \sum_{i=1}^2 N'_i \bar{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^2 N'_i \bar{y}_i \quad (4)$$

$$N'_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^{\frac{1}{m}} - \eta \right\}$$

$$N'_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{1-\xi} \right)^{\frac{1}{m}} + \eta \right\} \quad (5)$$

식(4)는 Fig. 2에서 알수 있듯이 좌표형상함수가 차수 m 에 따라 무한영역의 유효크기를 결정하게 되어 m 이 작아질수록 ξ 의 작은 값이 넓은 영역을 사상한다고 볼 수 있다.

2.2 변위 형상함수 (displacement shape function)

변위분포에 대한 무한요소 형상함수는 기존 유한요소의 형상함수에 감쇄함수(decay function)를 곱하여 형성할 수 있다. 따라서 무한요소 형상함수 M_i 는 일반 유한요소의 형상함수 N_i 를 이용하여 식(6)과 같이 정의할 수 있다.

$$M_i = f \cdot N_i \quad (6)$$

$$f = e^{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^n} \quad (7)$$

식(7)의 f 는 무한영역에서 변위분포를 감쇄시키기 위한 감쇄함수로서 차수 n 에 따라서 감쇄형태가 결정된다. Bettess⁽²⁾는 감쇄함수를 식(8)과 같이 정의하여 무한요소를 구하였으나 이 식에서는 감쇄길이 L 를 적절히 선정하여야 하는 과제가 남는다.

$$f = e^{\frac{\xi_i - \xi}{L}} \quad (8)$$

Beer, Meek⁽⁵⁾등은 이러한 불편함을 없애기 위하여 $(\bar{r}/r)^n$ 형태의 감쇄함수를 제외하여 2차원 문

제에서는 $n=1$, 3차원 문제에서는 $n=2$ 로 하여 무한요소를 구하였다. 이와같은 형태의 감쇄함수를 이용하면 원점으로부터 무한요소를 사용하는 위치까지의 거리로써 감쇄길이를 잡을 수 있으나 지수형태보다 감쇄되는 정도가 떨어진다. 식(7)은 이들 두 함수의 단점을 보완하여 수정한 형태로서 식(9)와 같이 감쇄길이 \bar{r} 를 정의하고 차수 n 을 변화시켜 이들 상호간의 관계를 규명하고자 한다.

$$\bar{r} = \frac{r_1}{2}(1-\eta) + \frac{r_2}{2}(1+\eta) \quad (9)$$

이상의 관계를 이용하여 변위 u, v 에 관한 무한요소의 감쇄 형상함수(decay shape function)는 다음식으로 표현할 수 있다.

$$u = \sum_{i=1}^2 M_i \bar{u}_i, \quad v = \sum_{i=1}^2 M_i \bar{v}_i \quad (10)$$

$$M_1 = e^{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^n} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$M_2 = e^{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^n} \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (11)$$

식(11)의 r 는 식(3)으로 표현되는 무한영역의 거리를 의미하므로 n/m 의 비에 따라서 Fig. 3과 같이 감쇄되는 특성이 달라지고 n/m 이 너무 크면 변위 감쇄가 매우 커짐을 알 수 있다.

2.3 무한요소의 강성행렬

일반적으로 유한요소의 강성행렬은 2차원 평면응력 또는 평면변형문제에서 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽¹¹⁾

$$[K]^{(e)} = k \iint_{\Omega^{(e)}} [B]^T [D] [B] dx dy \quad (12)$$

무한요소에서는 식(12)의 적분영역 $\Omega^{(e)}$ 가 무한

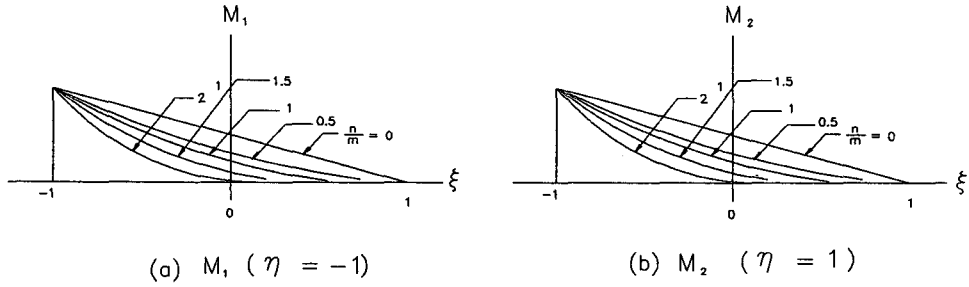


Fig. 3 Characteristic curves of displacement shape functions

영역이기 때문에 식(3)의 사상좌표계 ξ, η 를 도입하여 이 영역을 $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ 의 정사각형으로 사상시켜 Gauss-Legendre 수치적분을 수행한다.

$$[K]^{(e)} = h \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^Q W_i W_j [B]^T [D] [B] \det[J] \quad (13)$$

식(13)에서 h 는 판두께이고 Q 는 Gauss 적분점의 개수, W_i, W_j 는 가중계수이다. $[B]$ 행렬은 변형율 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 와 절점변위 벡터사이의 관계로써 2절점 무한요소인 경우에 다음과 같이 표시된다.

$$[B] = [L] [M] \quad (14)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

식(16)에서 M_1, M_2 는 식(11)로 표현된 변위의 감쇄형상함수이고 식(15)의 미분연산행렬은 사상좌표계 ξ, η 와 다음관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= J_{11}^* \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= J_{21}^* \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} J_{11}^* &= \frac{2m}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{\frac{1+m}{m}} (y_2 - y_1) \\ J_{12}^* &= -\frac{y_1 + y_2}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \\ J_{21}^* &= -\frac{2m}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{\frac{1+m}{m}} (x_2 - x_1) \\ J_{22}^* &= \frac{x_1 + x_2}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \end{aligned} \quad (18)$$

또한, 식(13)의 $[D]$ 는 응력($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)과 변형율($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$) 사이의 구성행렬(constitutive matrix)⁽¹¹⁾이고 $\det[J]$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\det[J] = \frac{1}{4m} \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^{-\frac{1+m}{m}} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (19)$$

3. 수치계산 및 검토

4절점 선형 등매개변수요소(isoparametric element)로써 무한요소를 구성하고 사상함수의 차수(m)과 변위 형상함수의 차수, n 을 변화시켜 해의 수렴성을 검토하였다. 감쇄길이 \bar{r} 를 유한요소와 무한요소의 연결 위치로 취하고 차수 m, n 이 너무 크거나 작은 것은 Fig. 2, 3에서 알 수 있듯이 무한요소내에서 변위분포에 급격한 변화를 주기 때문에 좋지 않은 결과가 예상되므로 $0 \leq \frac{n}{m} \leq 2$ 의 범위로 제한하고 편리상 $n=0, n=m$ 의 2가지 경우로 구분하여 검토하였다.

3.1 원공이 있는 무한평판

Fig. 4는 반경 a 인 원공에 내압 P 가 작용하는 무한평판 문제를 유한요소와 무한요소로 해석하기 위한 전형적인 모델을 보인다. Fig. 4는 감쇄길이 $\bar{r} = 5a$ 인 경우를 보이나 이 영향을 검토하기 위하여 $\bar{r} = 2a, 3a, 4a, 5a$ 로 취하여 계산하였다.

(1) 사상함수만 고려한 경우($n=0$)

무한영역을 m 의 차수로 사상시키고 변위에 대해서는 기존의 유한요소의 형상함수를 사용한 경우로서 그 결과를 Fig. 5에 도시하였다. 변위는 다음과 같이 무차원화 한 값이다.

$$u^* = \frac{Et}{Pa^2} u \quad (20)$$

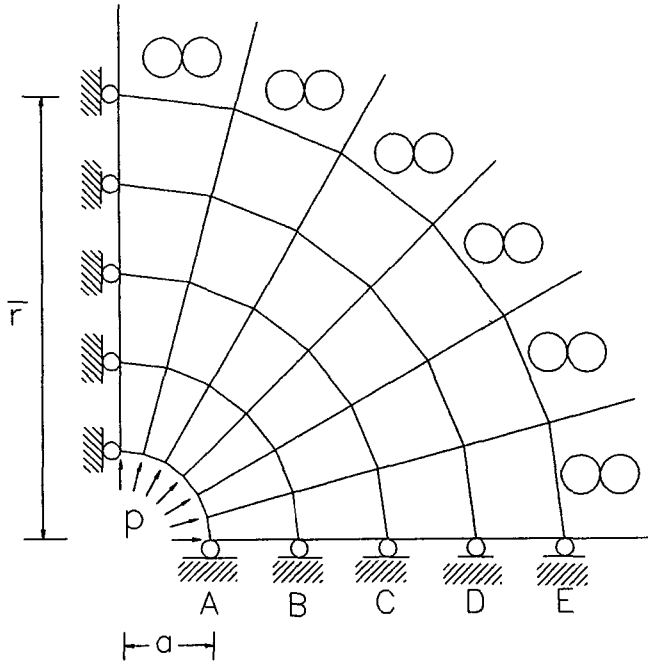


Fig. 4 Finite & infinite model for infinite plate with a hole under internal pressure ($\bar{r}=5a$)

E 는 탄성계수이고 Fig. 5에서 알 수 있듯이 감쇄길이에 관계없이 사상함수의 차수 $m=1.5$ 근처에서 변위는 거의 일정한 최대값으로 수렴함을 보인다. 이와같은 현상은 차수 m 을 잘못 선정하면 감쇄길이의 영향을 크게 받기 때문에 유한요소와

무한요소 연결위치가 매우 중요하게 됨을 의미한다.

(2) 감쇄함수와 사상함수의 차수가 같은 경우 ($n=m$)

무한 영역의 사상함수의 차수(m)와 변위의 감쇄

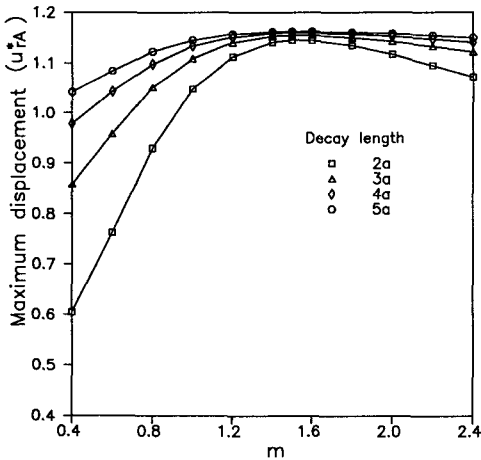


Fig. 5 Maximum displacement variation with respect to the mapping function order and decay length ($n=0, m \neq 0$)

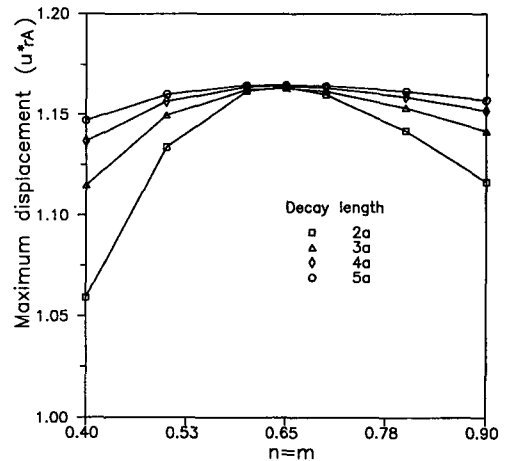


Fig. 6 Maximum displacement variation with respect to the mapping function order and decay length ($n=m$)

함수 차수(n)을 동일하게 선정하여 그 계산결과를 Fig. 6에 도시하였다. 변위값은 식(20)과 같이 무차원화 시킨 값이고 지수 n, m 에 따라서 변화양상은 Fig. 5와 동일하지만 $n=m=0.65$ 근처에서 변위는 감쇄길이에 관계없이 최대값으로 일정하게 수렴함을 보인다. Fig. 7은 $n=m=0.65$ 일 때 Fig. 4에 표시한 A, B, C, D, E 점의 반경방향의 변위를 식(20)과 같이 무차원화시켜 도시한 것이다. 이 결과는 지수 n 과 m 을 0.65로 동일하게 취하면 유한요소와 무한요소의 연결위치에 관계없이 항상 일정한 해를 얻을 수 있음을 의미한다.

이상의 결과를 검토해 보면 무한요소의 형성시에 무한영역을 유한영역으로 사상시키는 사상함수의 차수(m)과 이 영역에서 변위의 감쇄함수 차수(n)을 알맞게 선정하면 감쇄길이 즉 유한요소와 무한요소를 연결하는 위치에 거의 무관하게 비교적 정확한 해석결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 본예제에서 m, n 의 가장 적합한 값은 $n=0, m=n=0.65$ 일 때이고 특히 $m=n=0.65$ 일 때는 Fig. 8에서 알 수 있는 바와 같이 감쇄길이에 거의 영향을 받지 않기 때문에 유한요소 영역을 작게 잡아도 비교적 정확한 값을 얻을 수 있음을 보인다. Fig. 9는 해의 정확성을 검토하기 위하여 엄밀해⁽¹⁰⁾와 유한요소만의 해 및 $n=0, m=1.5$ 를 사용한 무한요소의 해, $n=m=0.65$ 를 사용한 무한요소의 해를 비교한 것이다. 무한요소의 해는 두가지 경우에 모두 감쇄길이를 $\bar{r}/a=5$ 로 동일하게 사용하였으며

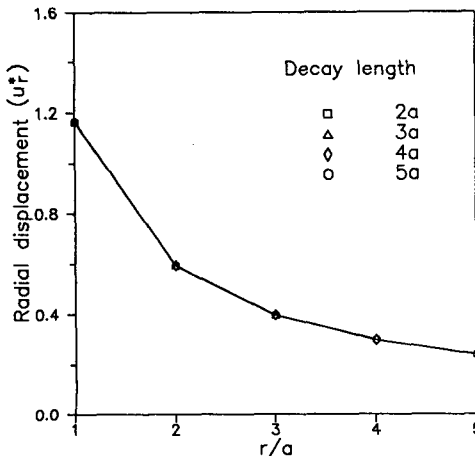


Fig. 7 Radial displacement distribution with respect to the variations of decay length ($n=m=0.65$)

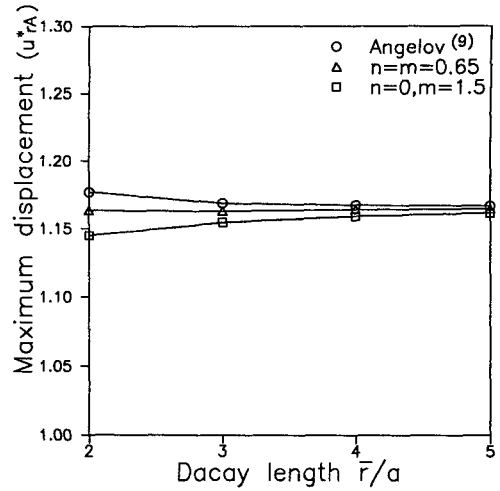


Fig. 8 Maximum displacement variations according to decay lengths

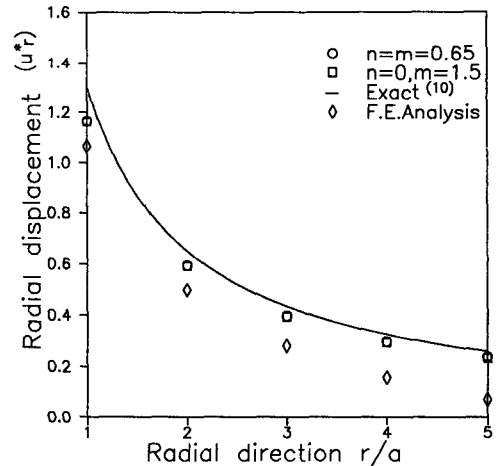


Fig. 9 Comparison of radial displacement with other solutions (decay length $\bar{r}/a=5$)

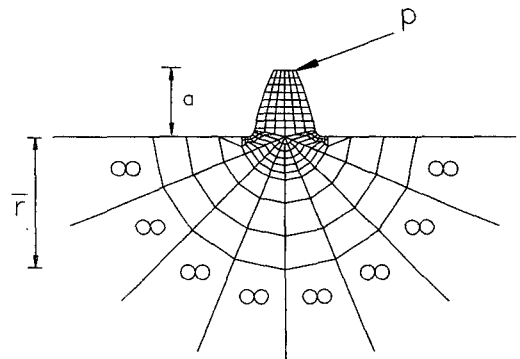


Fig. 10 Finite & infinite element model for gear tooth ($\bar{r}=2a$)

Table 1 Comparison of loading point displacements calculated by finite and infinite element methods

$\frac{r}{a}$	Finite element method	Infinite elements	
		$n=0, m=1.5$	$n=m=0.65$
2	—	0.771535552E+00	0.776350237E+00
3	0.728082494E+00	0.777227301E+00	0.781774329E+00
4	0.737938258E+00	—	—
5	0.745123338E+00	—	—

Table 2 Comparison of maximum tensile stresses calculated by finite and infinite element methods

$\frac{r}{a}$	Finite element method	Infinite elements	
		$n=0, m=1.5$	$n=m=0.65$
2	—	0.192904567E+00	0.192808260E+00
3	0.193804755E+00	0.192878645E+00	0.192797147E+00
4	0.193764004E+00	—	— ⁶
5	0.193704733E+00	—	—

그 결과는 큰 차이가 없다. 유한요소만의 해는 $r=6a$ 되는 영역의 해이기 때문에 엄밀해와 다소 큰 차이를 보인다. 무한요소의 해는 동일한 수준의 유한요소만의 해에 비하여 매우 정확한 값을 보이거나 다소 오차가 있는 이유는 Fig. 4에 보인 바와 같이 요소분할이 너무 크기 때문인 것으로 사료된다.

3.2 기어의 응력해석

Fig. 10과 같이 하나의 치를 완전한 치형으로 생각하여 필렛부분에 최대굽힘모멘트가 발생하도록 이끝에 치형곡선의 법선방향으로 선밀도 하중 P 를 가한다. 치형의 중심선과 이뿌리원이 만나는 점을 중심으로 하여 반경 r 가 이높이 a 의 3, 4, 5배 되는 부분을 고정시켜 해석한 유한요소만의 해석결과와 감쇄길이를 $\bar{r}=2a, 3a$ 로 하고 $n=0, m=1.5$ 및 $n=m=0.65$ 의 두가지 형태의 무한요소를 사용한 해석결과를 비교하여 Table 1, 2에 수록하였다.

Table 1은 하중점의 최대변위 u , Table 2는 필렛부분에 생기는 최대인장응력 σ 를 다음과 같이 무차원화 시켜 비교한 것이다.

$$\sigma^* = \frac{t^2}{6Pa} \sigma, \quad u^* = \frac{Et^3}{4Pa^3} u \quad (21)$$

다만, E 는 탄성계수이고 t 는 이뿌리 두께를 의미한다.

무한요소를 사용한 해석결과는 유한요소만의 해석결과보다 비교적 정확한 값을 알 수 있고 특히 이들 무한요소는 감쇄길이에 크게 영향을 받지 않음을 보인다.

4. 결 론

이차원 무한 경계치 문제의 탄성해를 보다 정확하고 효과적으로 얻기위한 방법으로 무한요소를 정식화하였으며 수치실험을 통하여 제시한 무한요소의 정확도와 해의 안정성을 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 무한요소를 사용함으로써 유한요소만의 해석에 비하여 해의 정확도를 향상시키고 계의 자유도를 크게 줄일 수 있어 훨씬 효과적이다.

(2) 무한영역을 유한영역으로 사상시키는 사상함수의 차수 m 과 이 영역에서 변위의 감쇄함수 차수 n 는 다음 두가지 조합을 택하므로써 유한요소와 무한요소의 연결위치에 관계없이 비교적 안정된 해를 얻을 수 있었다.

$$(a) n=0, m=1.5 \quad (b) n=m=0.65$$

참고문헌

- (1) Bettess, P., 1977, "Infinite Elements," Interna-

- tional Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 53~64.
- (2) Bettess, P., 1980, "More on Infinite Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 1613~1626.
- (3) Chow, Y. K. and Smith, I. M., 1981, "Static and Periodic Infinite Solid Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 503~526.
- (4) Lynn, P. P., 1981, "Infinite Elements with $1/r$ Type Decay," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 347~353.
- (5) Beer, G. and Meek, J. L., 1981, "Infinite Domain Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 43~52.
- (6) Zienkiewicz, O. C., Emson, C. and Bettess, P., 1983, "A Novel Boundary Infinite Element," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 393~404.
- (7) Simoni, L. and Schrefler, B.A., 1987, "Mapped Infinite Elements in Soil Consolidation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 513~527.
- (8) Beer, G. and Watson, J. O., 1989, "Infinite Boundary Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 1233~1247.
- (9) Angelov, T. A., 1991, "Infinite Elements Theory and Applications," Computers & Structures, Vol. 41, No. 5, pp. 959~962.
- (10) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill
- (11) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, The Finite Element Method, 4th ed., McGraw-Hill