

〈論 文〉

부분구조의 모드를 이용한 구조계의 효율적 응답해석

김형근* · 박윤식**

(1992년 10월 5일 접수)

An Efficient Response Analysis Method for a Structural System Using Substructure Modes

Hyeong Keun Kim and Youn-sik Park

Key Words : Mode Synthesis Method(모드 합성법), Substructure Mode(부분구조 모드), Geometric Compatibility(기하학적 적합조건), State Equation(상태방정식), Lagrange Multiplier(라그랑지 승수)

Abstract

An efficient method for determining forced responses of a general linear structural system in time domain using substructure modes and Lagrange multipliers is presented. Compared with the conventional mode synthesis methods, the suggested method does not construct the equations of motion of the combined whole structure and thus the modal parameters of the whole structure are not required. Only modal parameters of each substructure and geometric compatibility conditions are needed. Both the loaded interface free-free modes and free interface modes can be employed as the modal bases of each substructure. Recurrence discrete-time state equations based upon state transition matrix are formulated for the transient response analysis. The suggested approach is particularly effective for transient analysis of a parameter-changing system. It is shown from numerical examples that the suggested method is very accurate and efficient to calculate transient responses compared with the direct numerical integration method.

1. 서 론

복잡한 대형 구조물의 수학적 모델은 주로 유한요소법(finite element method)을 이용하여 수립한다. 유한요소법을 이용하면 대형 구조계의 해석적 모델을 효율적으로 수립할 수 있는 장점이 있으나 구조계의 동적해석시 필요한 자유도의 수가 많아지면 수치해석상 여러가지 어려움이 따른다. 따라서 해석모델의 유효 자유도의 수를 감소시키고 모델수립 및 수치해석시의 효율성을 증가시키기 위해 모

드합성법(mode synthesis method)^(1~5)이 개발되어 널리 사용되고 있다.

모드합성법은 주로 전체 구조물의 저차모드(lower modes)를 구하기 위해 사용되며 이를 통한 구조물의 강제진동해석법은 먼저 각 부분구조의 모드특성을 구하고 기하학적 적합조건(geometric compatibility)을 이용하여 전체 구조물의 축약된 행렬을 구성한다. 전체계에 대한 축약된 행렬의 고유치해석을 통하여 전체 구조물의 모드 매개변수를 구하며 이를 이용하여 전체 구조물의 동적응답을 예측하게 된다. 위의 동적해석과정은 체계적이거나 미사일 발사체계 등과 같이 동적거동을 하는 도중에 구조계의 동특성이 변하는 경우에는 변화된 부

*정회원, 삼성중공업(주)

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

분구조의 고유치해석, 부분구조의 합성 그리고 합성된 구조물의 고유치해석을 동특성이 변할 때마다 반복하여야 하므로 다소 번거로우며 효율성이 감소한다. 따라서 기존의 모드합성법과는 달리 전체계에 대한 축약된 운동방정식을 구성하지 않고 동적해석을 수행할 수 있다면 시간영역에서 동특성이 변하는 구조계의 응답해석을 위해 특히 효율적으로 활용될 수 있다.

이제까지 모드합성법을 이용하여 수행된 고유치 해석에 관한 연구에 비하면 응답해석에 관한 연구는 극히 미비한 실정이다. Kukreti와 Feng⁽⁶⁾은 부분구조간의 연결부에서의 동적응답을 기본운동(base motion)이라 정의한 후 이를 합성된 구조물에 대한 외력으로 가정하여 동적해석을 수행하였다. 구조물에 설계변화가 있는 경우에는 원래계의 응답을 이용하여 변화된 구조물의 새로운 응답을 예측하였으나 이 방법은 시간에 따라 변하는 구조계의 동적 해석에는 적용하기 곤란하다. Kubomura⁽⁷⁾는 자유경계모드(free interface mode)를 이용하여 주어진 기하학적 적합조건하에서 연결부에 작용하는 반력을 구하기 위해 동적축약(dynamic condensation)을 이용한 유한 차분방정식(finite difference equation)을 제시하였다. Yee와 Tsuei^(8,9)는 각 부분구조의 자유경계모드, 변위 및 속도의 연속성, 힘 평형식 등을 이용하여 선형 구조물의 과도응답을 구하는 방법을 제시하였으며 이를 일반적인 연결부를 갖는 구조물의 동적해석에도 적용하였다. Kubomura⁽⁷⁾ 그리고 Yee와 Tsuei^(8,9)는 선형 부분구조에서 콘볼루션(convolution)을 이용하여 응답해석에 대한 모델을 수립하였으나 이 방법은 수식전개가 복잡한 단점이 있다.

본 연구에서는 모드합성법에 관한 연구를 발전시켜 특히 시간영역에서 동특성이 변하는 일반적인 구조계의 강제진동해석을 수행할 수 있는 효율적인 방법을 제시한다. 각 부분구조의 운동방정식은 라그랑지 방정식을 이용하여 유도하며 부분구조 간의 연결부에서 만족해야 하는 기하학적 적합조건은 라그랑지 승수를 이용하여 처리한다. 각 부분구조를 나타내기 위하여는 자유경계 또는 하중경계모드(loaded interface mode)를 사용하며 시간영역 응답해석을 위해서는 이산형태(discrete form)의 상태방정식(state equation)이 사용된다. 제시한 방법은 기존의 모드합성법과는 달리 전체계를 나타내는 운동방정식을 구성하지 않으므로 전체계의 모두

드 매개변수를 구할 필요가 없는 장점이 있다. 시간영역에서 전체 구조계를 합성하지 않고 직접 응답을 구하므로 미사일 발사체계 등과 같이 시간에 따라 동특성이 변하는 구조계의 동적해석을 위해 효과적으로 활용될 수 있다. 제시한 방법을 간단한 집중질량계와 동특성이 일정하지 않은 복잡한 구조물의 시간영역 응답해석에 적용하여 그 결과를 직접적분법으로 구한 엄밀해(exact solution)와 비교하며 제시한 타당성을 검증하였다.

2. 부분구조의 모드를 이용한 응답해석

2.1 부분구조의 운동방정식

Fig. 1과 같이 N개의 선형 부분구조로 구성되는 일반적인 구조계를 생각한다. 각 부분구조는 연속체모델(distributed parameter model) 또는 이산요소모델(discrete parameter model)로 모형화할 수 있으며 해석의 편의를 위해 감쇠는 없다고 가정하였다.

임의의 선형 부분구조 s의 운동에너지(kinetic energy) T_s , 탄성에너지(potential energy) V_s 는 일반화된 좌표에 대한 2차형태(quadratic form)로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_s = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}_s^T [m]_s \{\dot{x}\}_s, \quad V_s = \frac{1}{2} \{x\}_s^T [k]_s \{x\}_s \quad (1)$$

여기서 $\{x\}_s$ 는 부분구조 s의 일반화된 좌표(generalized coordinates)이며 $[m]_s$ 와 $[k]_s$ 는 각각 부분구조 s의 질량 및 강성행렬로 경계자유도(interface coordinates)와 내부자유도(interior coordinates)에 따라 분리되어 구성되는 행렬들이다.

각 부분구조의 일반화된 좌표 $\{x\}_s$ 는 각각의 부분구조에서는 서로 독립이나 인접한 부분구조와의

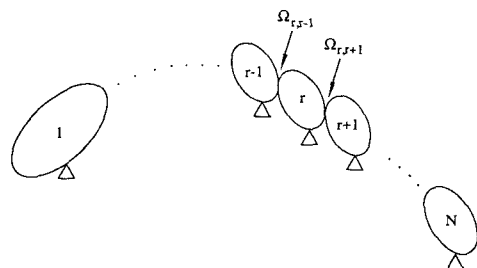


Fig. 1 Substructures of a linear structural system

경계면에서는 기하학적 적합조건을 만족해야 한다. 즉 부분구조 r 과 $(r-1)$ 의 경계면에서 만족해야 하는 경계면 기하학적 적합조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{x_b\}_r = \{x_b\}_{r-1} \text{ on } \Omega_{r,r-1} \quad (2)$$

여기서 하첨자 b 는 경계좌표계를 나타내며 $\Omega_{r,r-1}$ 은 부분구조 r 과 $(r-1)$ 의 경계영역(interface domain)을 의미한다.

따라서 모든 부분구조의 경계영역에서 정의되는 식(2)와 같은 형태의 기하학적 적합조건을 모든 부분구조의 일반화된 좌표에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [\beta]_i^T \{x\}_i &= \{0\} \\ (N_i^r \times N_i^r) & (N_i^r \times 1) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\{x\}_i = \{\{x\}_1^T, \{x\}_2^T, \dots, \{x\}_n^T\}^T$$

는 각 부분구조의 독립적인 일반화된 좌표를 순서대로 나열한 벡터이며 $[\beta]_i$ 는 전체 부분구조의 연결상태를 나타내는 행렬이다. N_i^r 은 각 부분구조의 독립된 자유도 수의 총합이며 N_i^r 은 기하학적 적합조건을 갖는 수이다. 벡터 $\{x\}_i$ 의 모든 성분은 서로 독립이 아니며 식(3)과 같은 구속조건에 따라 부분적으로 종속적인 관계에 있다. $N_i^r > N_i^r$ 이므로 $\{x\}_i$ 에는 N_i^r 개의 종속좌표와 $(N_i^r - N_i^r)$ 개의 독립좌표가 존재한다. 기존의 모드합성법에서는 N_i^r 개의 종속좌표를 소거하여 $(N_i^r - N_i^r)$ 개의 독립좌표만으로 전체계의 운동방정식을 구성하나 본 연구에서는 경계영역에서 정의되는 경계좌표계만을 사용한다.

식(3)의 $[\beta]_i$ 는 각각의 부분구조에 대한 일반화된 좌표에 따라 다음과 같이 분리되므로

$$[\beta]_i^T = \left[[\beta]_1^T, [\beta]_2^T, \dots, [\beta]_n^T \right] \quad (4)$$

전체계에 대한 구속조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T \{x\}_s = \{0\} \quad (5)$$

여기서 $[\beta]_s$ 는 차원이 $(N_s^r \times N_i^r)$ 인 행렬로써 N_s^r 은 부분구조 s 의 자유도 수이다.

전체계에 대한 라그랑지안(Lagrangian) L 은 다음과 같이 정의되며

$$L = \sum_{s=1}^N (T_s - V_s) + \{\lambda\}^T \left(\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T \{x\}_s \right) \quad (6)$$

다음과 같은 라그랑지 방정식(Lagrange equations)을 적용하면

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T = \{p\}_s \quad (7)$$

선형 부분구조에 대한 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[m]_s \{\ddot{x}\}_s + [k]_s \{x\}_s = [\beta]_s \{\lambda\} + \{p\}_s \quad (8)$$

여기서 $\{\lambda\}$ 는 미지의 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)를 의미하는 벡터로 모든 경계면에서 작용하는 반력(interface force)을 나타내며 $\{p\}_s$ 는 각 부분구조의 일반화된 좌표에 대응하는 일반화된 외력(generalized force)이다. 경계면에서 만족해야 하는 기하학적 적합조건은 식(5)로 주어진다.

식(8)을 살펴보면 라그랑지승수 벡터 $\{\lambda\}$ 만 정확히 구할 수만 있다면 전체계에 대한 방정식을 구성하지 않고도 각 부분구조에 대해 독립적으로 응답을 구할 수 있음을 알 수 있다. 따라서 본 연구는 $\{\lambda\}$ 를 구하는 문제로 귀착된다. 식(8)은 연성된 일반화된 좌표에 대한 식이므로 먼저 이를 비연성된 모드좌표계로 표현하면 보다 적은 자유도 수로 각 부분구조의 동적거동을 묘사할 수 있다. 모드좌표계로 표현되는 운동방정식은 2계의 미분방정식이며 기하학적 적합조건은 선형변환식(linear transformation)이므로 두가지 방법으로 $\{\lambda\}$ 및 그에 따른 응답 $\{x\}_s$ 를 구할 수 있다.

첫째로 주파수영역에서는 식(8)과 (5)를 각각 푸리에변환(Fourier transform)하면 대수방정식(algebraic equation)이 되므로 이로부터 $\{\lambda\}$ 및 응답 $\{x\}_s$ 의 주파수영역응답을 구할 수 있으며 시간영역에서의 응답은 주파수영역에서의 응답을 푸리에역변환(inverse Fourier transform)하면 얻을 수 있다. 그러나 이 방법은 구조계의 동특성 변화를 고려할 수 없으므로 본 연구에서는 생략한다. 둘째로 시간영역에서는 모드좌표계로 표현되는 운동방정식과 기하학적 적합조건을 유한차분방정식의 형태로 나타내면 매 시간에서의 $\{\lambda\}$ 를 기하학적 적합조건으로부터 구할 수 있으며 이를 이용하여 다음 시간에서의 응답을 구하므로 전체계에 대한 운동방정식을 구성하지 않으며 따라서 구조물의 동특성변화를 효율적으로 고려할 수 있는 장점이 있다.

2.2 모드변환식

강제진동식을 유도하기 위해서는 먼저 각 부분구조의 운동방정식과 기하학적 적합조건을 모드좌표계로 표현해야 하며 이를 위해 각 부분구조에서는 자유경계 또는 하중경계모드가 모두 사용될 수 있다. 하중경계모드는 충격하중 등과 같이 저차 및 고차모드가 모드 중요한 역할을 하는 구조계의 해석을 위해 효과적으로 사용할 수 있다.⁽⁶⁾

임의의 부분구조 s 에서 인접한 다른 부분구조가 경계면에 미치는 하중효과를 고려한 질량 및 강성행렬을 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 라고 가정하면 이 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 를 이용하여 구한 모드는 하중경계모드가 되며 이를 $[\tilde{\phi}]_s$ 라 하면 다음과 같은 좌표변환식이 성립한다.

$$\{x\}_s = [\tilde{\phi}]_s \{\eta\}_s \quad (9)$$

여기서 $\{\eta\}_s$ 는 하중경계모드에 대한 모드좌표계이며 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 를 구하는 과정은 부록에 주어져 있다.

식(9)를 이용하면 식(8)은 $\{\eta\}_s$ 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$[\tilde{m}]_s \{\ddot{\eta}\}_s + [\tilde{k}]_s \{\eta\}_s = [\tilde{\phi}]_s^T [\beta]_s \{\lambda\} + [\tilde{\phi}]_s^T \{p\}_s \quad (10)$$

여기서

$$[\tilde{m}]_s = [\tilde{\phi}]_s^T [m]_s [\tilde{\phi}]_s, [\tilde{k}]_s = [\tilde{\phi}]_s^T [k]_s [\tilde{\phi}]_s$$

이며 $[\tilde{\phi}]_s$ 는 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 를 이용하여 구한 모드행렬이므로 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 는 대각행렬(diagonal matrix)이 아닌 일반적인 대칭행렬이 된다.

따라서 고유치해석을 한번 더 수행해야 하며 (10)의 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 로 부터 구한 모드행렬을 $[\phi]_s$ 라 가정하면 $\{\eta\}_s$ 는 새로운 모드좌표계 $\{q\}_s$ 에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{\eta\}_s = [\phi]_s \{q\}_s \quad (11)$$

식(11)을 식(10)에 대입하면 비연성된 모드좌표계 $\{q\}_s$ 에 대한 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]_s \{\ddot{q}\}_s + [K]_s \{q\}_s = [\phi]_s^T [\beta]_s \{\lambda\} + [\phi]_s^T \{p\}_s \quad (12)$$

여기서

$$[\phi]_s = [\tilde{\phi}]_s [\tilde{\phi}]_s$$

이며 $[M]_s$ 와 $[K]_s$ 는 모드질량 및 강성행렬로 다음

과 같이 정규화된다.

$$[M]_s = [\tilde{\phi}]_s^T [\tilde{m}]_s [\tilde{\phi}]_s, [K]_s = [\tilde{\phi}]_s^T [\tilde{k}]_s [\tilde{\phi}]_s \quad (13)$$

식(9)와 (11)을 이용하면 연성된 물리좌표계 $\{x\}_s$ 는 비연성된 모드좌표계 $\{q\}_s$ 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{x\}_s = [\phi]_s \{q\}_s \quad (14)$$

자유경계모드는 식(8)의 $[m]_s$ 와 $[k]_s$ 로 부터 경계면을 자유상태로 두고 구한 모드이며 이를 $[\phi]_s$ 라 하면 식(14)와 같은 모드변환식을 얻을 수 있다. 따라서 이를 식(8)에 대입하면 식(12)와 같이 모드좌표계에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다. 그러나 이 경우 모드질량 및 강성행렬은 하중경계모드를 사용한 경우와는 달리 다음과 같이 정규화된다.

$$[M]_s = [\phi]_s^T [m]_s [\phi]_s, [K]_s = [\phi]_s^T [k]_s [\phi]_s \quad (15)$$

식(14)를 이용하면 식(5)의 기하학적 적합조건도 모드좌표계에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T [\phi]_s \{q\}_s = \{0\} \quad (16)$$

2.3 시간영역해석법

시간영역에서의 강제진동해석을 위해서는 상태천 이행렬(state transition matrix)의 개념을 이용한 상태방정식이 사용된다. 먼저 다음과 같이 각 부분의 모드변위 및 속도를 상태벡터(state vector)로 정의하면

$$\{y_1\}_s \equiv \{q\}_s, \{y_2\}_s \equiv \{\dot{q}\}_s \quad (17)$$

모드좌표계로 표현된 식(12)는 다음과 같이 1차의 연속상태방정식(state space continuous-time state equation)으로 변환된다.

$$\{\dot{y}\}_s = [A]_s \{y\}_s + [B]_s \{u\}_s \quad (18)$$

여기서 $\{y\}_s$ 는 상태벡터, $\{u\}_s$ 는 외력과 내력으로 구성되는 하중벡터이며 $[A]_s$ 와 $[B]_s$ 는 구조계의 동특성을 나타내는 계수행렬로써 다음과 같이 주어진다.

$$\{y\}_s = \begin{Bmatrix} \{y_1\}_s \\ \{y_2\}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q\}_s \\ \{\dot{q}\}_s \end{Bmatrix}, \{u\}_s = \begin{Bmatrix} \{\lambda\} \\ \{p\}_s \end{Bmatrix}$$

$$[A]_s = \begin{bmatrix} [0] & [I]_s \\ -[M]_s^{-1}[K]_s & [0] \end{bmatrix},$$

$$[B]_s = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [M]_s^{-1}[\Phi]_s^T[\beta]_s & [M]_s^{-1}[\Phi]_s^T \end{bmatrix}$$

수치해를 얻기 위해 $\{u(t)\}_s$ 의 모든 성분은 시간 $t_k (=k\Delta t)$ 와 t_{k+1} 사이에서 일정하다고 가정하면 수치적분을 위한 시간증분 Δt_k 가 주어진 경우 식 (18)은 다음과 같이 이산형태의 상태방정식(discrete-time state equation)으로 치환된다.

$$\{y(t_{k+1})\}_s = [G]_s \{y(t_k)\}_s + [H]_s \{u(t_k)\}_s \quad (19)$$

여기서 $\{y(t_k)\}_s \equiv \{y(k\Delta t)\}_s$ 이며 계수행렬 $[G]_s$ 와 $[H]_s$ 는 시간증분 Δt_k 가 Δt 로 일정하다고 가정하면 다음과 같이 주어진다.

$$[G]_s = e^{[A]_s \Delta t} = [I]_s [A]_s \Delta t + \frac{[A]_s^2}{2!} \Delta t^2 + \dots$$

$$[H]_s = \left(\int_0^{\Delta t} e^{[A]_s t} dt \right) [B]_s = \left([I]_s \Delta t + \frac{[A]_s}{2!} \Delta t^2 + \frac{[A]_s^2}{3!} \Delta t^3 + \dots \right) [B]_s$$

식(19)를 각각의 상태벡터에 대해 분리하여 나타내면 다음과 같으며

$$\begin{Bmatrix} \{q(t_{k+1})\}_s \\ \{\dot{q}(t_{k+1})\}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \\ [G_{21}] & [G_{22}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \{q(t_k)\}_s \\ \{\dot{q}(t_k)\}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \{\lambda(t_k)\}_s \\ \{p(t_k)\}_s \end{Bmatrix} \quad (20)$$

기하학적 적합조건도 이산형태(discrete form)로 다음과 같이 표현되므로

$$\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T [\Phi]_s \{q(t_{k+1})\}_s = 0 \quad (21)$$

식(20)의 $\{q(t_{k+1})\}_s$ 를 식(21)에 대입하여 정리하면 경계면에 작용하는 내력($k=0, 1, 2, \dots$ 에 대해)을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\lambda(t_k)\}_s = - \left(\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T [\Phi]_s [H_{11}]_s \right)^{-1} \left(\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T [\Phi]_s ([G_{11}]_s \{q(t_k)\}_s + [G_{12}]_s \{\dot{q}(t_k)\}_s + [H_{12}]_s \{p(t_k)\}_s) \right) \quad (22)$$

즉 선형 부분구조로만 구성되는 구조계에서는 기하학적 적합조건을 각 부분구조의 모드좌표계로 나타낼 수 있으며 모드좌표계로 표현된 운동방정식을

이용하면 연결부에 작용하는 내력을 기하학적 적합 조건으로부터 유도할 수 있다. 식(22)에서 역행렬이 존재하기 위해서는 각 부분구조에서 고려하는 모드 수의 합이 전체 구속조건 수보다 많아야 한다. 이는 Goldman⁽³⁾의 자유경계합성법에서 부가되는 제한조건과 같으며 모드축약시 고려해야 하는 조건이다.

시간 t_k 에서의 상태벡터 및 외력으로부터 기하학적 적합조건을 이용하여 $\{\lambda(t_k)\}$ 를 식(22)로부터 구한 후 이를 다시 식(20)에 대입하면 다음 시간 t_{k+1} 에서의 모드변위 및 속도를 구할 수 있으며 이로부터 일반화된 좌표의 시간응답은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{x(t_k)\}_s = [\Phi]_s \{q(t_k)\}_s \quad (23)$$

시간영역 해석법은 고려하는 시간영역 내에서 구조계의 동특성이 변하지 않는 경우에는 위에 언급한 과정을 반복하면 시간영역 응답을 연속적으로 구할 수 있다. 그러나 특정시간 δt_0 를 기준으로 그 이후에 구조계의 동특성이 변하는 경우에는 변화된 부분구조의 고유치해석을 새로 해야 한다. 즉 임의의 부분구조 r 의 동특성 변화량을 $[\Delta m]_r$ 과 $[\Delta k]_r$ 이라하면 다음과 같은 새로운 질량 및 강성행렬이 구성된다.

$$\begin{aligned} [m]_r' &= [m]_r + [\Delta m]_r \\ [k]_r' &= [k]_r + [\Delta k]_r \end{aligned} \quad (24)$$

자유경계모드를 사용한 경우에는 식(24)의 새로운 질량 및 강성행렬로부터 구한 모드 매개변수를 이용하여 δt_0 이후에도 연속적으로 응답을 구할 수 있다. 그러나 하중경계모드를 사용한 경우에는 동특성변화로 인해 인접한 부분구조에 미치는 하중효과가 바뀌므로 하중효과를 새로 산출한 후 각 부분구조의 고유치해석을 수행해야 한다. 새로운 질량 및 강성행렬을 구성하여 고유치해석을 수행하지 않고 구조물동특성변경법(SDM: structural dynamics modification) 등을 이용하여 변화된 부분구조의 모드 매개변수를 근사적으로 예측할 수도 있다. 그러나 미사일 발사체계 등과 같이 미사일의 연속적인 발사로 인해 동특성변화를 여러번 고려해야 하는 경우에는 오차가 누적되는 단점이 있다. 따라서 본 연구에서는 동특성변화가 있는 경우 식(24)의 새로운 질량 및 강성행렬로부터 모드 매개변수를 새로 추출하였다. Fig. 2는 동특성변화를 고려한

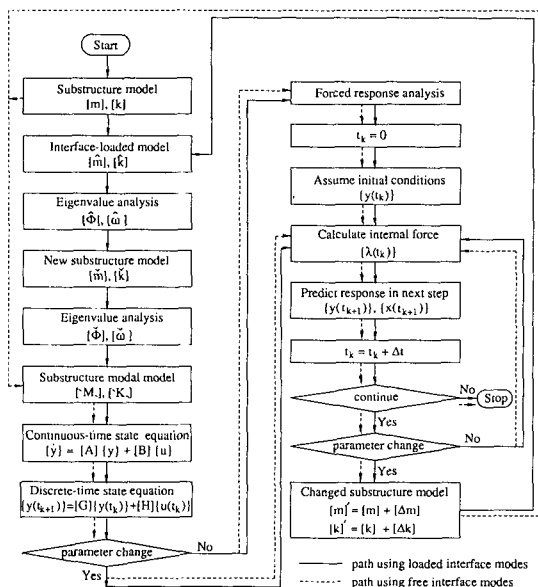


Fig. 2 Flowchart for transient response analysis

시간영역 응답해석법의 전체적인 흐름도를 나타낸다.

3. 수치예제

본 연구에서 제시한 부분구조의 모드를 이용한 응답해석법에서 해의 정확성은 다음의 세가지 요소에 의해 결정된다: (1) 각 부분구조에서 고려하는 모드의 수, (2) 상태천이행렬에서 고려하는 항의 수, (3) 시간증분 Δt .

기존의 모드축첩법으로 전체 구조물을 한꺼번에 해석하는 경우에는 구조물에서 고려해야 하는 모드의 수는 가진력의 형태 및 작용점, 관심있는 구조물의 고유치특성 그리고 관심있는 응답의 형태, 즉 변위, 속도, 가속도, 응력 등을 고려하여 결정한다. 따라서 이들 요소로부터 전체 구조물에서 고려해야 하는 모드의 수를 결정할 수 있다. 그러나 본 연구에서와 같이 부분구조의 모드만을 사용하는 경우에는 각 부분구조의 고유치가 전체 구조물의 고유치에 미치는 영향을 정량적으로 파악하기가 어려우므로 각 부분구조에서 고려해야 하는 모드의 수를 쉽게 결정하기가 어렵다.

각 부분구조에서 고려하는 모드의 수가 결정되면 상태천이행렬을 구할 때 사용하는 항의 수에 따라

결과에 차이가 난다. 만약 식 (19)에서 무한개의 항을 모두 사용한다면 그 해는 엄밀해로 간주할 수 있다. 그러나 실제로는 몇개의 항만을 고려하며 수치해석 결과 충분히 작은 시간증분에 대해서는 7~8개의 항이면 정확한 결과를 얻을 수 있다.

시간응답의 간격적인 시간증분은 전체 구조물에서 고려하는 최고차의 고유진동수를 기준으로 결정하나 본 연구에서는 부분구조의 모드를 사용하므로 각 부분구조에서 고려하는 모드의 최고차의 고유진동수를 기준으로 시간증분을 결정한다.

위에 언급한 여러가지 요소를 고려하여 제시한 시간영역해석법의 수치해석시 해의 정확도와 계산 효율성 그리고 각 부분구조에서 고려하는 모드의 수를 달리했을 때 응답에 미치는 영향 등을 고찰하기 위하여 간단한 집중질량계에 대해 수치해석을 실시하였다. 각 부분구조에서는 하중경계 또는 자유경계모드를 사용하였으며 모드축약을 고려하였다. 제시한 방법으로 구한 해는 직접적분법(direct numerical integration, runge-Kutta method)으로 구한 엄밀해와 비교하여 그 정확성을 검증하였다. 또한 본 방법을 실제 대형구조물의 유한요소모델에 적용하여 응답을 구하였다.

3.1 집중질량계

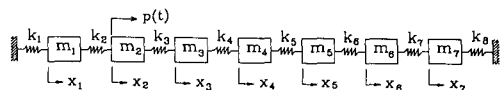
Fig. 3은 수치해석을 위한 7 자유도의 집중질량계로 전체모델을 세개의 부분구조로 나눈 후(경우 (i)), 특정 자유도에서 질량변화를 고려하여(경우 (ii)) 시간응답을 구하였다.

외력은 자유도 2에 다음과 같은 형태로 작용한다고 가정하였다.

$$p(t) = \begin{cases} P_0 t / \delta t_0 & \text{if } 0 \leq t \leq \delta t_0 \\ 0 & \text{if } t > \delta t_0 \end{cases} \quad (25)$$

여기서 $P_0 = 10N$ 그리고 $\delta t_0 = 0.25 \text{ sec}$ 이다.

엄밀해를 위해서는 IMSL의 배정도 루틴(routine)인 DIVPRK(runge kutta method)를 사용하였으며 정확한 응답을 위해 허용오차(tolerance)는



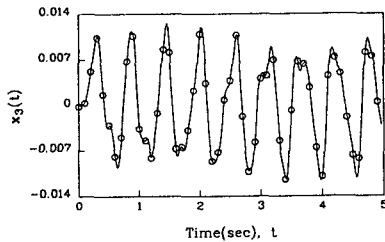
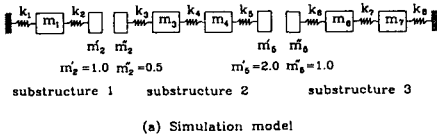
$m_1 = 1.0$ $m_2 = 1.5$ $m_3 = 2.0$ $m_4 = 1.2$ $m_5 = 3.0$ $m_6 = 0.8$ $m_7 = 1.8$
 $k_1 = 1200$ $k_2 = 1400$ $k_3 = 1000$ $k_4 = 2000$ $k_5 = 800$ $k_6 = 2000$ $k_7 = 1500$ $k_8 = 1800$

Fig. 3 Seven degrees of freedom mass-spring model

$\epsilon=10^{-7}$ 으로 가정하였다.

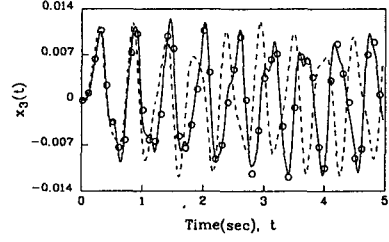
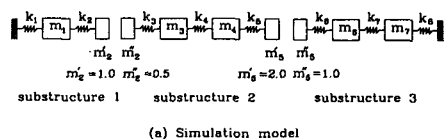
Fig. 4와 5는 각각 경우 (i)와 (ii)에 대해 각 부분구조에서 모든 모드를 고려하여 얻은 시간응답이며 Fig. 6과 7은 각각 모드축약을 고려하여 얻은 시간응답이다. Fig. 4는 각 부분구조에서 모든 하중경계 또는 자유경계모드를 사용하여 자유도 3에서의 응답을 구한 것으로 원(circle)은 부분구조의

모든 모드를 사용하여 얻은 결과로 이는 엄밀해(실선)와 일치하는 것을 볼 수 있다. 다른 자유도에서도 같은 결과를 얻을 수 있다. Fig. 5는 모델의 동특성변화를 고려하여 동적응답을 구한 것으로 동특성변화는 시간 δt_0 이후에 자유도 4에서 집중질량의 변화로 가정하였다. 즉 Fig. 5는 m_4 가 1.2 kg에서 0.2 kg으로 변한다고 가정하여 자유도 3에서의



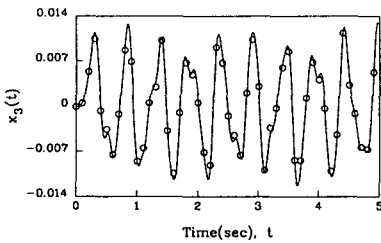
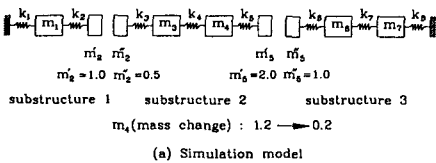
(b) Time history

Fig. 4 An example of forced responses: _____, direct numerical integration method; ○, substructure technique with full substructure modes



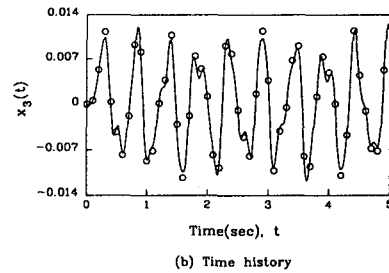
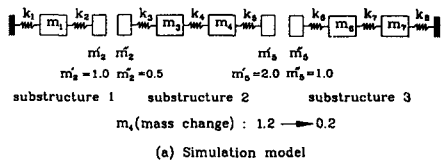
(b) Time history

Fig. 6 An example of forced responses: _____, direct numerical integration method; ○, substructure technique with truncated loaded interface modes; ·····, substructure technique with truncated free interface modes



(b) Time history

Fig. 5 An example of forced responses when the substructure 2 is subjected to mass change from $m_4=1.2$ kg to $m_4=0.2$ kg: _____, direct numerical integration method; ○, substructure technique with full substructure modes



(b) Time history

Fig. 7 An example of forced responses when the substructure 2 is subjected to mass change from $m_4=1.2$ kg to $m_4=0.2$ kg: _____, direct numerical integration method; ○, substructure technique with truncated free interface modes

응답을 구한 것으로 원과 실선은 각각 제시한 방법으로 구한 해와 엄밀해를 나타내며 이 경우에도 시간 응답은 엄밀해와 매우 잘 일치함을 볼 수 있다.

Fig. 6은 축약된 하중경계 및 자유경계모드를 사용하여 자유도 3에서의 응답을 구한 것이다. Fig. 6에서 실선은 직접적분법으로 구한 엄밀해이며 점선을 각 부분구조에서 2개의 자유경계모드를 사용하여 얻은 결과이고 원은 2개의 하중경계모드를 사용하여 구한 결과이다. Fig. 6에서 보듯이 사용한 모드의 종류에 따라 응답은 현저히 달라지며 하중경계모드를 사용한 결과가 자유경계모드를 사용해 얻은 결과보다 엄밀해에 근접함을 볼 수 있다. Fig. 7은 Fig. 5의 경우와 마찬가지로 동특성변화를 고려하여 축약된 모드를 이용하여 자유도 3에서의 응답을 구한 것이다. 부분구조 1과 3에서는 2개의 자유경계모드를 그리고 부분구조 2에서는 3개의 자유경계모드를 고려하였다. Fig. 6와 비교하면 부분구조 2에서 1개의 모드만 더 고려하면 자유경계모드를 사용한 결과는 실제 엄밀해에 근접함을 볼 수 있다. Fig. 7에서 보듯이 동특성변화와 모드축약을 고려하여 얻은 결과도 엄밀해에 근접함을 볼 수 있다.

본 연구에서 제시한 응답해석법의 수치해석시의 효율성과 해의 정확성을 검토하기 위하여 그 결과를 직접적분법으로 구한 엄밀해와 비교하였다. Table 1은 제시한 방법과 직접적분법으로 구한 해의 정확성과 소요되는 계산시간을 비교한 것이다. 제시한 방법에서는 각 부분구조의 모든 모드를 고려하였으며 자유 또는 하중경계모드를 사용하여 해를 구하였고 상태천이행렬에서는 7개의 항을 고려하였다. 직접적분법에서는 허용오차 ϵ 을 10^{-3} , 10^{-5} , 10^{-7} 등으로 달리하며 해를 구하였다. 허용오차 ϵ 을 10^{-7} 으로 가정하여 구한 해를 엄밀해로 간주하

여 제시한 방법으로 구한 해의 정확성을 비교하였다. 해의 정확성은 관심있는 시간영역내에서 최대 응답 차의 상대적인 비로 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{Error}(\%) = \frac{\max_k |x_3(t_k)_{ex}| - \max_k |x_3(t_k)_{app}|}{\max_k |x_3(t_k)_{ex}|} \times 100 \quad (26)$$

여기서 $x_3(t_k)_{ex}$ 는 $\epsilon=10^{-7}$ 인 경우 직접적분법으로 구한 엄밀해이며 $x_3(t_k)_{app}$ 는 10^{-3} , 10^{-5} 으로 가정하여 직접적분법으로 구한 해 및 제시한 방법으로 구한 해이다.

시간증분 Δt 는 0.01 sec로 가정하였으며 총 10 sec까지의 응답을 구하였다. Table 1에서 보듯이 각 부분구조에서 모든 모드를 고려하였으므로 자유 또는 하중경계모드를 사용하여 구한 해의 결과는 같다. 그러나 하중효과를 산출하는 과정으로 인해 하중경계모드를 사용하면 계산시간이 조금 더 소요된다. 각 부분구조에서 모든 모드를 사용하므로 제시한 방법과 직접적분법으로 구한 해는 서로 같아야 하나 여기서 다소 차이가 나는 것은 서로 다른 가정 및 알고리즘을 사용한 때문이다.

제시한 방법으로 구한 해는 직접적분법($\epsilon=10^{-3}$)으로 구한 해와 정확도는 거의 비슷하나 계산시간은 각각의 경우에 대해서 약 40% 정도에 불과하며 엄밀해와 비교하면 경우 (i)에 대해서는 21% 그리고 경우 (ii)에 대해서는 약 14% 정도에 불과하다. 따라서 계의 동특성이 변하는 경우에 본 방법은 직접적분법에 비해 수치해석시의 효율이 현저히 좋을 수 있다.

Table 1에서는 각 부분구조에서 모든 모드를 고려하였으나 만약 각 부분구조에서 축약된 모드를 사용한다면 수치해석시의 효율은 더욱 향상될 것으

Table 1 Comparisons of computation time and solution accuracy

	Case	State-space method		Runge-Kutta method		
		Free	Loaded	$\epsilon=10^{-3}$	$\epsilon=10^{-5}$	$\epsilon=10^{-7}$
Computation time(sec)	(i)	12.3	12.5	28.8	29.2	57.8
	(ii)	12.5	12.8	28.9	54.4	89.8
Error(%)	(i)	0.28	0.28	0.34	0.02	0.
	(ii)	0.59	0.59	0.35	0.02	0.

Note : case (i), when the mass-spring model is divided into 3 substructures
 case (ii), case (i)+when the model is subjected to mass change.

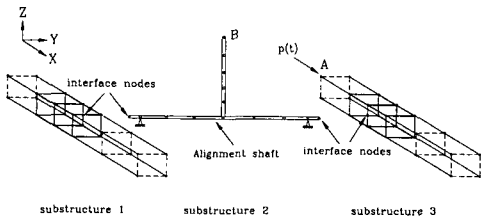


Fig. 8 A structural system subjected to parameter changes

로 예상된다. 결론적으로, 제시한 방법은 직접적분법으로 구한 해와 거의 비슷한 정확도를 유지하며 계산시간은 현저히 단축함을 알 수 있다. 본 연구에서는 7자유도의 집중질량계에 본 방법을 적용하여 그 우수성을 보였으나 유한요소모델 등과 같이 자유도가 많은 경우에 그 계산효율은 더 증대될 것으로 기대된다.

3.2 동특성이 변하는 구조계

본 연구에서 제시한 방법의 해의 정확도와 수치

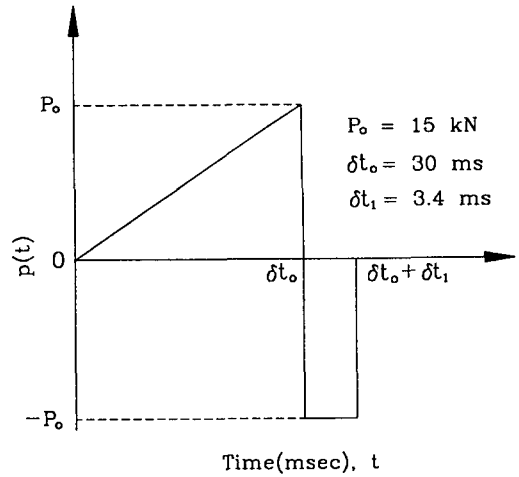
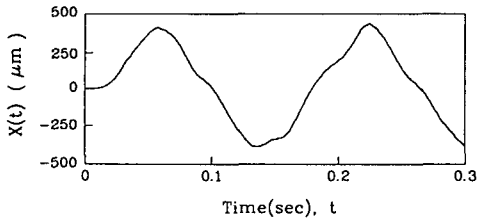
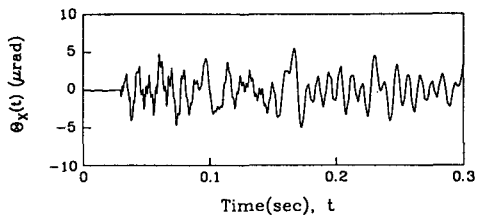


Fig. 9 An excitation force acting on the missile launcher

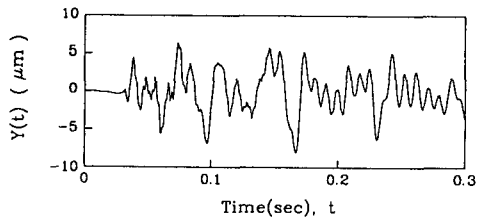
해석시의 효율성은 앞절에서 충분히 검토하였으므로 본 절에서는 이를 동특성이 변하는 실제 대형 구조물의 동적해석을 위해 적용하며 그 결과만을



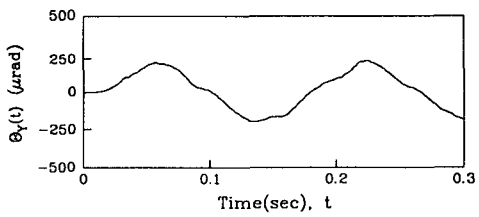
(a)



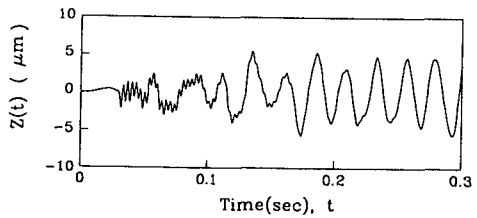
(d)



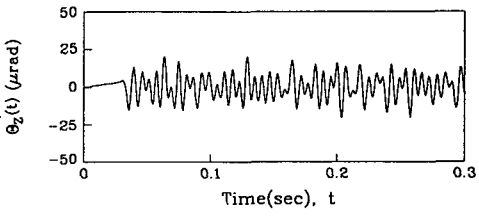
(b)



(e)



(c)



(f)

Fig. 10 Calculated responses at node B

Table 2 Natural frequencies of each substructure of the mass changing system

Mode	Natural frequency (Hz)	
	Substructure 1, 3	Substructure 2
1	25.49	47.66
2	26.80	54.89
3	34.32	81.37
4	43.84	166.4
5	48.27	471.2
6	48.45	549.1
7	73.05	726.3
8	77.66	799.1

간단히 제시한다.

Fig. 8은 미사일이 하나씩 발사될 때마다 계의 동특성이 변하는 미사일 발사체계의 유산요소모델을 나타낸 것이다. 미사일은 집중질량과 관성모멘트를 갖는 집중질량계로 모형화하여 계의 동특성변화는 구조물의 질량행렬의 변화에 기인하는 것으로 가정하였다.

전체 유한요소모델은 세개의 부분구조로 구성되며 부분구조 1과 3은 Fig. 8의 경계절점(interface nodes)을 통해 부분구조 2에 결합된다. 미사일발사로 인해 체계에 작용하는 외력은 Fig. 9와 같은 형태로 절점 A에 X-방향의 응답이 다른 자유도의 응답보다도 매우 큰 것을 볼 수 있다.

각 부분구조에 대한 고유치해석 결과는 Table 2에 주어져 있으며 부분구조 2의 고유치는 부분구조 1과 3의 고유치에 비해 상대적으로 매우 높은 것을 볼 수 있다. Fig. 10은 절점 B의 각 자유도에 대한 응답을 나타낸 것으로 부분구조 1과 3에서는 20개의 모드를 그리고 부분구조 2에서는 10개의 자유경계모드를 고려하였다. Fig. 10에서 보듯이 미사일의 발사방향인 X-방향의 응답이 다른 자유도의 응답보다도 매우 큰 것을 볼 수 있다.

4. 결 론

각 부분구조의 자유진동모드와 기하학적 적합조건만을 이용하여 전체계를 나타내는 축약된 운동방정식을 구성하지 않고 시간영역에서 강제진동해석을 효율적으로 수행할 수 있는 방법을 제시하였다. 제시한 방법은, 기존의 모드합성법과는 달리 전체

계를 나타내는 운동방정식을 구성하지 않으며 따라서 전체계의 모드 매개변수를 필요로 하지 않는다. 각 부분구조를 나타내기 위하여 자유경계 또는 하중경계모드를 모두 사용할 수 있으며 이는 특히 미사일 발사체계 등과 같이 계의 동특성이 변하는 구조계의 과도응답해석에 효과적으로 활용할 수 있다. 상태방정식을 이용한 시간영역해석법을 간단한 집중질량계 및 동특성이 일정하지 않은 선형연속체의 응답해석에 적용하여 제시한 방법이 해의 정확도 뿐만 아니라 수치해석시의 효율면에서도 매우 우수함을 보였다. 본 연구에서 제시한 방법은 각 부분구조의 모드만을 이용하여 응답을 구하므로 국부적으로 비선형성을 갖는 구조물의 동적해석에도 적용이 가능하며 이는 현재 연구가 진행중이다.

후 기

본 연구의 일부는 국방과학연구소의 기초연구비(과제번호 ADD-90-5-010) 지원에 의한 결과임

참고문헌

- (1) Hurty, W. C., 1965, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," AIAA Journal, Vol. 3, No. 4, pp. 678~685.
- (2) Craig, R. R. and Bampton, M. C. C., 1968, "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis," AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, pp. 1313~1319.
- (3) Goldman, R. L., 1969, "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning," AIAA Journal, Vol. 7, No. 6, pp. 1152~1154.
- (4) Benfield, W. A. and Hrudu, R. F., 1971, "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution," AIAA Journal, Vol. 9, No. 7, pp. 1255~1261.
- (5) Curnier, A., 1983, "On Three Modal Synthesis Variants," Journal of Sound and Vibration, Vol. 90, No. 4, pp. 527~540.
- (6) Kukreti, A. R. and Feng, C. C., 1984, "Dynamic Response Analysis of Linear Structural Systems Subject to Component Changes," Computers and Structures, Vol. 18, No. 6, pp. 963~976.
- (7) Kubomural, K., 1985, "Transient Loads Analysis by Dynamic Condensation," Journal of Ap-

plied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 52, pp. 559 ~564.

- (8) Yee, Eric K. L. and Tsuei, Y. G., 1990, "Transient Response by Component Modal Synthesis Method," Journal of Vibration and Acoustics, Trans. ASME, Vol. 112, pp. 21~25.
- (9) Yee, Eric K. L. and Tsuei, Y. G., 1989, "Transient Responses Via Modal Synthesis Technique," 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, pp. 22~28.

부 록

본 부록에서는 인접한 부분구조와 하중효과를 고려한 각 부분구조의 질량 및 강성행렬인 $[\bar{m}]_s$ 와 $[\bar{k}]_s$ 를 유도한다. 해석의 편의를 위해 구조계는 2개의 부분구조로 구성되는 것으로 가정하며 먼저 부분구조 2가 부분구조 1에 미치는 하중효과를 고려한 부분구조 1의 질량 및 강성행렬을 유도한다.

부분구조 2의 정적평형식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} [k_{bb}] & [k_{ba}] \\ [k_{ab}] & [k_{aa}] \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} \{x_b\} \\ \{x_a\} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} \{p_b\} \\ \{p_a\} \end{Bmatrix}_2 \quad (A1)$$

여기서 $\{x_b\}$ 는 주좌표(master coordinates)로써 인접한 부분구조와의 연결부에서의 경계자유도를 나타내며 $\{x_a\}$ 는 종속좌표(slave coordinates)로 내부자유도를 나타낸다.

정적축약(static condensation)에 의해 내부자유도를 경계자유도로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{x_a\}_2 = [T_c]_2 \{x_b\}_2 \quad (A2)$$

여기서

$$[T_c]_2 = -[k_{aa}]_2^{-1} [k_{ab}]_2$$

따라서 부분구조 2의 일반화된 좌표를 경계자유도로 나타내면 다음과 같다.

$$\{x\}_2 = [T_r]_2 \{x_b\}_2 \quad (A3)$$

여기서

$$[T_r]_2 = \begin{bmatrix} [I] \\ [T_c]_2 \end{bmatrix}$$

이며 $[I]$ 는 단위행렬(identity matrix)이다.

부분구조 2의 운동 및 탄성에너지는 다음과 같이 표현되므로

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{x}^T [m]_2 \dot{x}_2,$$

$$V_2 = \frac{1}{2} x^T [k]_2 x_2 \quad (A4)$$

식(A3)을 식(A4)에 대입하면 부분구조 2의 경계자유도에 대해 축약된 질량 및 강성행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[\bar{m}]_2 = [T_r]_2^T [m]_2 [T_r]_2,$$

$$[\bar{k}]_2 = [T_r]_2^T [k]_2 [T_r]_2 \quad (A5)$$

부분구조 1과 2의 연결부에서 만족해야 하는 기하학적 적합조건은 다음과 같이 표현되며

$$\{x_b\}_1 = \{x_b\}_2 \quad (A6)$$

식(A6)을 이용하면 부분구조 2의 경계자유도는 부분구조 1의 일반화된 좌표에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{x_b\}_2 = [T_L]_1 \{x\}_1 \quad (A7)$$

여기서

$$[T_L]_1 = [[I] [0]]$$

는 좌표 변환 행렬(coordinate transformation matrix)이다.

따라서 식(A3)과 (A7)을 이용하면 부분구조 2의 일반화된 좌표는 부분구조 1의 일반화된 좌표에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{x\}_2 = [T_r]_2 [T_L]_1 \{x\}_1 \quad (A8)$$

구조계의 총 운동 및 탄성에너지는 각 부분구조의 해석에서 보존되어야 하므로 전체 부분구조의 에너지를 고려하면 부분구조 2가 연결부에 미치는 하중효과를 근사적으로 고려한 부분구조 1의 질량 및 강성행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[\bar{m}]_1 = [m]_1 + [T_L]_1^T [\bar{m}]_2 [T_L]_1,$$

$$[\bar{k}]_1 = [k]_1 + [T_L]_1^T [\bar{k}]_2 [T_L]_1 \quad (A9)$$

마찬가지 방법으로 하면 부분구조 1의 하중효과를 고려한 부분구조 2의 질량 및 강성행렬을 구할 수 있다.