

〈論 文〉

혼합경계의 부분구조 모드를 이용한 구조물의 모드해석

김형근* · 박윤식**

(1992년 10월 13일 접수)

Structural Modal Analysis Using Substructure Hybrid Interface Modes

Hyeong Keun Kim and Youn-Sik Park

Key Words : Mode Synthesis Method(모드 합성법), Hybrid Interface Mode(혼합경계 모드), Geometric Compatibility(기하학적 적합조건), Lagrange Multiplier(라그랑지 승수), Substructure(부분구조)

Abstract

A new mode synthesis method using Lagrange multipliers and substructure hybrid interface modes is presented. Substructure governing equations of motion are derived using Lagrange equations and the constraints of geometric compatibility between the substructures are treated with Lagrange multipliers. Fixed, free, and loaded interface modes can be employed for the modal bases of each substructure. In cases of the fixed and loaded interface modes, two successive modal transformation relations are used. Compared with the conventional mode synthesis methods, the suggested method does not construct the equations of motion of the coupled structure and the final characteristic equation becomes a polynomial. Only modal parameters of each substructure and geometric compatibility conditions are needed. The suggested method is applied to a simple lumped mass model and parametric study is performed.

1. 서 론

복잡한 대형 구조물의 수학적 모델은 주로 유한 요소법(finite element method)을 이용하여 수립한다. 유한요소법을 이용하면 대형 구조계의 해석적 모델을 효율적으로 수립할 수 있는 장점이 있으나 구조계의 동적해석시 필요한 자유도의 수가 많아지면 수치해석상 여러가지 어려움이 따른다. 따라서 해석모델의 유효자유도의 수를 감소시키고 모델수립 및 수치해석시의 효율성을 증가시키기 위해 모드 합성법(component mode synthesis method)이 개발되었다.

모드합성법에서는 먼저 관심있는 구조물을 몇개의 부분구조로 분리한 후 각 부분구조의 독립된 고유치해석 결과와 연결부에서 만족해야 하는 기하학적 적합조건을 이용하여 전체 구조물의 진동모드를 합성한다. 각 부분구조에서는 구속모드(constraint mode) 또는 축약된 저차의 정규모드만을 사용하므로 최종적인 고유치해석시 유효자유도의 수가 현저히 줄어들어 수치해석시의 효율성을 향상시킬 수가 있다. 이제까지 제안된 모든 방법들은 모드축약(mode truncation)으로 고차모드의 영향을 무시하므로 근사적이나 각 부분구조의 해석에서 보다 많은 수의 모드를 고려함으로써 근사해의 정확도를 향상시킬 수 있다.

모드합성법은 각 부분구조를 나타내기 위해 사용하는 부분구조 모드의 형태와 이론전개에 따라

*정회원, 삼성중공업(주)

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

Hurty 그리고 Craig와 Bampton 등이 제시한 고정경계합성법(fixed interface method)⁽¹⁻²⁾ Hou와 Goldman의 자유경계합성법(free interface method)⁽³⁻⁴⁾ Benfield와 Hruda의 하중경계합성법(loaded interface method)⁽⁵⁾ 이들의 혼합형태인 혼합경계합성법(hybrid interface method)⁽⁶⁻⁷⁾ 그리고 잔류역강성(residual flexibility)과 자유경계모드를 사용하는 방법⁽⁸⁻¹⁰⁾ 등으로 구분된다.

고정경계합성법에서는 인접한 부분구조와의 연결부를 구속시킨 상태에서 구한 고정경계의 정규모드(fixed constraint normal mode)와 연결부의 임의의 한 자유도에 단위변위(unit displacement)를 부가하고 나머지 경계자유도는 구속시킨 상태에서 구하는 정적변형모드인 구속모드를 사용하여 구조물의 동적거동을 묘사한다. 고정경계합성법에서는 고차모드의 축약으로 인한 오차는 최소화되나 연결부의 질량 및 관성효과가 전체 구조물의 운동에 미치는 영향이 고려되지 않으며 구속모드로 인해 이론전개가 다소 복잡해지는 단점이 있다.

Hou와 Goldman의 자유경계합성법에서는 연결부를 자유상태(free-free)로 두고 구한 자유경계모드를 사용하며, 따라서 구속모드를 별도로 구할 필요가 없으며 이론전개가 매우 간단한 장점이 있으나 모드축약에 매우 민감한 단점이 있다. 고정 및 자유경계합성법에서는 연결부의 자유도가 많은 경우에는 구속모드의 수나 자유경계모드의 수가 연결부의 자유도의 수와 같거나 그 이상이어야 하므로 최종적인 고유치해석시 유효 자유도의 수는 매우 커질 수가 있다.

Benfield와 Hruda는 경계면에서 인접한 부분구조의 하중효과(interface loading)를 고려한 부분구조의 모드를 사용하여 저차모드의 특성을 향상시킬 수 있는 방법을 제시하였다. 이 방법은 자유 및 고정경계합성법과는 달리 연결부의 자유도 수에 무관하며 따라서 특히 쉘요소와 같이 연결부의 자유도가 많은 경우에 효과적이다.

모든 모드합성법에서는 각 부분구조에서 모드를 많이 고려할수록 더욱 정확한 결과를 얻을 수 있다. 극단적으로 자유도의 수와 같은 수의 모드를 고려하면 부분구조의 모드간에 의존성(dependency)이 없는 경우에 모든 방법에서 엄밀해(exact solution)를 얻을 수 있다. 그러나 가능한 적은 수의 부분구조 모드를 이용하는 것이 수치해석시 유리하므로 모드축약으로 인한 오차를 줄이

기 위한 연구가 많이 수행되었다.

Macneal은 축약되는 고차모드의 잔류효과(residual effect)를 고려하여 자유 및 고정경계모드를 함께 사용할 수 있는 혼합경계합성법을 제시하였으며 축약되는 고차 모드를 정적으로 보상하므로써 보다 정확한 결과를 얻을 수 있음을 보였다. 또한 Craig와 Chang,⁽⁸⁾ Bucher⁽⁹⁾ 그리고 Kuang과 Tsuei⁽¹⁰⁾에 의해 제안된 잔류역강성과 자유경계모드를 이용하는 모드합성법은 이론전개가 간단하고 해의 수렴성이 우수하여 보다 효과적인 한 방법으로 간주된다.

위에 언급한 모든 모드합성법에 공통적인 것은 최종적으로 축약된 전체계에 대한 운동방정식을 구성하는 것이며 이 과정은 매우 복잡한 행렬조작을 통해 이루어진다. 따라서 전체계의 운동방정식을 구성하지 않고도 고유치해석을 수행할 수 있다면 효과적이라 할 수 있다. Dowell⁽¹¹⁻¹³⁾ 그리고 Yee와 Tsuei⁽¹⁴⁾는 전체계의 운동방정식을 구성하지 않고 부분구조의 모드 매개변수와 기하학적 적합 조건만을 이용하여 전체계의 고유치해석을 수행할 수 있는 기법을 제시하였으나 그들은 부분구조의 자유경계모드만을 고려하였다.

본 연구에서는 임의 형태의 경계조건을 갖는 부분구조 모드를 이용하여 구조물의 고유치해석을 수행할 수 있는 새로운 혼합경계합성법을 제시한다. 각 부분구조의 모드특성으로는 기존의 고정, 자유, 그리고 하중경계모드가 모두 사용될 수 있으며 고정 및 하중경계모드를 사용한 경우에는 두번의 연속적인 모드변환식이 사용된다. 부분구조간의 연결부에서 정의되는 경계자유도만을 이용하여 고유치해석을 수행하며 고유치해석의 최종적인 특성방정식은 경계자유도의 개수와 같은 연립방정식에서 비롯되는 다항식이 된다. 제시한 방법은 유한요소법 뿐만 아니라 실험적 모드 해석을 통해 모형화된 부분구조를 쉽게 고려할 수 있는 장점이 있다. 제시한 방법을 간단한 집중질량계에 적용하여 부분구조 모드의 특성과 수렴성 및 최적의 부분구조 모드의 조합이 존재함을 보인다.

2. 수학적모델

2.1 부분구조의 운동방정식

Fig. 1과 같이 N개의 선형 부분구조로 구성되는 일반적인 구조계를 생각한다. 각 부분구조는 유한

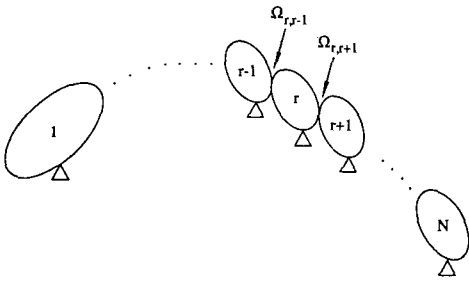


Fig. 1A structural system composed of N linear substructures

요소법 또는 실험적 모드해석 등을 통해 이산요소 모델로 모형화할 수 있으며 해석의 편의를 위해 감쇠는 무시하였다.

임의의 선형 부분구조 s의 운동에너지 T_s 와 탄성에너지 V_s 는 일반화된 좌표에 대한 2차형태 (quadratic form)로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_s = \frac{1}{2} \dot{x}_s^T [m]_s \dot{x}_s, \quad V_s = \frac{1}{2} x_s^T [k]_s x_s \quad (1)$$

여기서 $\{x\}_s$ 는 부분구조 s의 일반화된 좌표벡터이며 $[m]_s$ 와 $[k]_s$ 는 각각 부분구조 s의 질량 및 강성 행렬로 경계자유도 (interface coordinates)와 내부자유도 (interior coordinates)에 따라 분리되어 구성되는 행렬들이다.

각 부분구조의 일반화된 좌표 $\{x\}_s$ 는 각각의 부분구조에서는 서로 독립이나 인접한 부분구조와의 경계면에서는 기하학적 적합조건을 만족해야 한다. 즉 부분구조 r과 (r-1)의 경계면에서 만족해야 하는 경계면 기하학적 적합조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{x_b\}_{r,r-1} = \{x_b\}_{r-1,r} \text{ on } \Omega_{r,r-1} \quad (2)$$

여기서 하첨자 b는 경계좌표계를 나타내며 $\{x_b\}_{r,r-1}$ 은 부분구조 r의 경계좌표계 중에서 부분구조 r-1과 관련된 좌표를 의미한다. $\Omega_{r,r-1}$ 은 부분구조 r과 (r-1)의 경계영역을 의미한다.

따라서 모든 부분구조의 경계영역에서 정의되는 식 (2)와 같은 형태의 기하학적 적합조건을 모든 부분구조의 일반화된 좌표에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$[\beta]_i^T \{x\}_i = \{0\} \quad (N_i^r \times N_i^r) \quad (N_i^r \times 1) \quad (3)$$

여기서

$$\{x\}_i = \{\{x\}_1^T \{x\}_2^T \dots \{x\}_N^T\}^T$$

는 각 부분구조의 독립적인 일반화된 좌표를 순서대로 나열한 벡터이며 $[\beta]_i$ 는 전체 부분구조의 연결상태를 나타내는 행렬이다. N_i^r 은 각 부분구조의 독립된 자유도 수의 총합이며 N_i^r 은 기하학적 적합조건 개수이다. 벡터 $\{x\}_i$ 의 모든 성분은 서로 독립이 아니며 식 (3)과 같은 구속조건에 따라 부분적으로 종속적인 관계에 있다. $N_i^r > N_i^r$ 이므로 $\{x\}_i$ 에는 N_i^r 개의 종속좌표와 $(N_i^r - N_i^r)$ 개의 독립좌표가 존재한다. 기존의 모드합성법에서는 N_i^r 개의 종속좌표를 소거하여 $(N_i^r - N_i^r)$ 개의 독립좌표만으로 전체계의 운동방정식을 구성하나 본 연구에서는 경계영역에서 정의되는 $2N_i^r$ 개의 경계자유도만을 사용한다.

식 (3)의 $[\beta]_i$ 는 각각의 부분구조에 대한 일반화된 좌표에 따라 다음과 같이 분리되므로

$$[\beta]_i^T = [[\beta]_1^T \quad [\beta]_2^T \quad \dots \quad [\beta]_N^T] \quad (4)$$

전체계에 대한 구속조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T \{x\}_s = \{0\} \quad (5)$$

여기서 $[\beta]_s$ 는 차원이 $(N_s^r \times N_i^r)$ 인 행렬로써 N_s^r 은 부분구조 s의 자유도 수이다.

전체계에 대한 라그랑지안 (lagrangian) L은 다음과 같이 정의되며

$$L = \sum_{s=1}^N (T_s - V_s) + \{\lambda\}^T \left(\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T \{x\}_s \right) \quad (6)$$

다음과 같은 라그랑지 방정식을 적용하면

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial x_s} \right)^T = \{p\}_s \quad (7)$$

임의의 부분구조 s에 대한 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[m]_s \ddot{x}_s + [k]_s x_s = [\beta]_s \{\lambda\} + \{p\}_s \quad (8)$$

식 (5)의 기하학적 적합조건과 식 (8)의 운동방정식은 자유진동해석을 위한 기본식들이다. 전체계의 고유치해석시 유효자유도의 수를 줄이기 위하여 각 부분 구조에서는 축약된 모드좌표계를 사용하여 각 부분구조의 모드특성으로는 자유, 고정 및 하중경계모드가 모두 사용된다.

2.2 모드변환식

고유치해석을 위한 특성방정식을 유도하기 위해서는 먼저 각 부분구조의 운동방정식과 기하학적 적합조건을 모드좌표계로 표현해야 하며 자유경계 모드를 사용하는 경우에는 한번의 모드변환으로 비연성된 운동방정식을 얻을 수 있으나 고정 및 하중 경계모드를 사용한 경우에는 두번의 연속적인 모드 변환식이 사용된다.

(1) 고정경계모드

고정경계모드를 사용한 경우 부분구조의 변위벡터는 다음과 같은 모드 변환식을 만족한다.

$$\{x\}_s = [\tilde{\Phi}_r]_s \{\eta_r\}_s \quad (9)$$

여기서 $[\tilde{\Phi}_r]_s$ 는 고정경계모드를 사용한 경우 모드행렬로 부록 A에 주어져 있으며 $\{\eta_r\}_s$ 는 그에 관련된 모드좌표벡터이다.

식(9)를 식(8)에 대입하고 $[\tilde{\Phi}_r]_s^T$ 를 앞에 곱하면 $\{\eta_r\}_s$ 에 대한 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & [\tilde{m}_r]_s \{\ddot{\eta}_r\}_s + [\tilde{k}_r]_s \{\eta_r\}_s \\ &= [\tilde{\Phi}_r]_s^T [\beta]_s \{\lambda\} + [\tilde{\Phi}_r]_s^T \{p\}_s \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\tilde{m}_r]_s &= [\tilde{\Phi}_r]_s^T [m]_s [\tilde{\Phi}_r]_s, \\ [k_r]_s &= [\tilde{\Phi}_r]_s^T [k]_s [\tilde{\Phi}_r]_s \end{aligned}$$

식(10)의 $[\tilde{m}_r]_s$ 와 $[k_r]_s$ 는 대각행렬(diagonal matrix)이 아닌 일반적인 대칭행렬이므로 고유치 해석을 한번 더 수행해야 하며 식(10)의 $[\tilde{m}_r]_s$ 와 $[k_r]_s$ 로 부터 구한 모드행렬을 $[\Phi_r]_s$ 라 가정하면 $\{\eta_r\}_s$ 는 새로운 모드좌표벡터 $\{q\}_s$ 에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{\eta_r\}_s = [\Phi_r]_s \{q\}_s \quad (11)$$

식(11)을 식(10)에 대입하면 비연성된 모드좌표계 $\{q\}_s$ 에 대한 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]_s \{\ddot{q}\}_s + [K]_s \{q\}_s = [\Phi]_s^T [\beta]_s \{\lambda\} + [\Phi]_s^T \{p\}_s \quad (12)$$

여기서 $[M]_s$ 와 $[K]_s$ 는 모드질량 및 강성행렬로 다음과 같이 정규화되며

$$[M]_s = [\Phi]_s^T [m]_s [\Phi]_s, \quad [K]_s = [\Phi]_s^T [k]_s [\Phi]_s \quad (13)$$

최종적인 모드행렬 $[\Phi]_s$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$[\Phi]_s = [\tilde{\Phi}_r]_s [\tilde{\Phi}_r]_s \quad (14)$$

식(9)와 (11)을 이용하면 연성된 물리좌표계 $\{x\}_s$ 는 비연성된 모드좌표계 $\{q\}_s$ 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{x\}_s = [\Phi]_s \{q\}_s \quad (15)$$

식(15)를 이용하면 식(5)의 기하학적 적합조건도 모드좌표계에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{s=1}^N [\beta]_s^T [\Phi]_s \{q\}_s = \{0\} \quad (16)$$

(2) 자유경계모드

자유경계모드는 식(8)의 $[m]_s$ 와 $[k]_s$ 로 부터 경계면을 자유상태로 두고 구한 모드로써 이를 $[\Phi]_s$ 라 하면 식(15)와 같은 모드변환식을 얻을 수 있으며 이를 식(8)에 대입하면 식(12)와 같이 비연성된 모드좌표계에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다. 그러나 이 경우 모드행렬은 식(14)와는 달리 식(8)의 $[m]_s$ 와 $[k]_s$ 로 부터 경계면을 자유상태로 두고 구한 모드이다.

(3) 하중경계모드

하중경계모드는 경계면에서 인접한 부분구조의 하중효과를 고려한 부분구조의 모드로써 모드변환식은 고정경계모드를 사용한 경우와 유사하다. 즉 임의의 부분구조 s 에서 인접한 다른 부분구조가 부분구조 s 의 경계면에 미치는 하중효과를 고려한 질량 및 강성행렬을 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 라고 가정하면 이 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 를 이용하여 구한 모드는 하중경계모드가 되며 이를 $[\tilde{\Phi}_i]_s$ 라 하면 다음과 같은 좌표변환식이 성립한다.

$$\{x\}_s = [\tilde{\Phi}_i]_s \{\eta_i\}_s \quad (17)$$

여기서 $\{\eta_i\}_s$ 는 하중경계모드에 대한 모드좌표계이며 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 를 구하는 과정은 부록 B에 주어져 있다.

식(17)을 이용하면 식(8)은 $\{\eta_i\}_s$ 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & [\tilde{m}_i]_s \{\ddot{\eta}_i\}_s + [\tilde{k}_i]_s \{\eta_i\}_s \\ &= [\tilde{\Phi}_i]_s^T [\beta]_s \{\lambda\} + [\tilde{\Phi}_i]_s^T \{p\}_s \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$[\tilde{m}_i]_s = [\tilde{\Phi}_i]_s^T [m]_s [\tilde{\Phi}_i]_s, \quad [\tilde{k}_i]_s = [\tilde{\Phi}_i]_s^T [k]_s [\tilde{\Phi}_i]_s$$

이며 $[\tilde{\Phi}_i]_s$ 는 $[\tilde{m}]_s$ 와 $[\tilde{k}]_s$ 를 이용하여 구한 모드행렬이므로 $[\tilde{m}_i]_s$ 와 $[k_i]_s$ 는 2.2(1)절과 마찬가지로

일반적인 대칭행렬이 된다. 따라서 고유치해석을 한번 더 수행해야 하며 식(18)의 $[\tilde{m}_i]_s$ 와 $[k_i]_s$ 로부터 구한 모드행렬을 $[\Phi_i]_s$ 라 가정하면 $\{\eta\}_s$ 는 새로운 모드좌표계 $\{q\}_s$ 에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{\eta\}_s = [\tilde{\Phi}_i]_s \{q\}_s \quad (19)$$

식(19)를 이용하면 고정경계모드와 같이 식(12)와 같은 비연성된 운동방정식과 식(16)의 구속조건을 얻을 수 있다. 그러나 여기서 부분구조의 최종적인 모드행렬은 식(14)와는 달리 다음과 같이 주어진다.

$$[\Phi]_s = [\tilde{\Phi}_i]_s [\tilde{\Phi}_i]_s \quad (20)$$

2.3 특정방정식과 모드형상

고유치해석을 위해 식(12)에서 $\{p\}_s = \{0\}$ 으로 두고 정현파운동을 가정하면 $\{q\}_s$ 와 $\{\lambda\}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\{q\}_s = \{\bar{q}\}_s e^{j\omega t}, \quad \{\lambda\} = \{\bar{\lambda}\}_s e^{j\omega t} \quad (21)$$

식(21)을 식(12)와 (16)에 대입하면 주파수영역에서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\{\bar{q}\}_s = [H(\omega)]_s [\Phi]_s [\beta]_s \{\bar{\lambda}\} \quad (22)$$

$$\sum_s [\beta]_s^T [\Phi]_s \{\bar{q}\}_s = \{0\} \quad (23)$$

여기서

$$[H(\omega)]_s = ([K]_s - \omega^2 [M]_s)^{-1}$$

식(22)를 식(23)에 대입하면 $\{\bar{\lambda}\}$ 에 대한 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$[\tilde{\Phi}(\omega)] \{\bar{\lambda}\} = \{0\} \quad (24)$$

여기서

$$[\tilde{\Phi}(\omega)] = \sum_{s=1}^N [\beta]_s^T [\Phi]_s [H(\omega)]_s [\Phi]_s [\beta]_s$$

식(24)에서 해가 존재하기 위해서는 $\{\bar{\lambda}\}$ 의 계수행렬식이 0이 되어야 하므로 특성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$|[\tilde{\Phi}(\omega)]| = 0 \quad (25)$$

식(25)를 정리하면 다항식의 형태로 표현되는 다음과 같은 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=0}^n a_i (\omega^2)^i = 0 \quad (26)$$

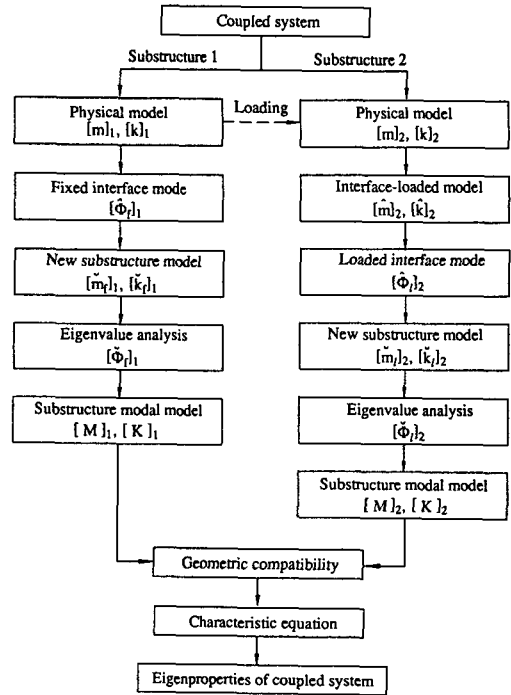


Fig. 2 Flow chart for eigenvalue analysis using hybrid interface modes

여기서 n 은 다항식의 차수이며 a_i 는 다항식의 계수이다.

식(26)에서 보듯이 특성방정식은 구속조건인 갯수나 고려하는 모드의 수에 무관하게 항상 고유치에 대한 한개의 다항식의 형태로 표현되며 식(26)으로부터 전체계에 대한 고유치를 구한 후 이를 식(24)에 대입하면 $\{\bar{\lambda}\}$ 를 구할 수 있다. 이 $\{\bar{\lambda}\}$ 와 식(22) 그리고 식(15)를 이용하면 물리좌표계에서의 모드형상을 구할 수 있다.

식(26)에서 각 부분구조의 모드특성으로는 2.2절에서 제시한 세가지의 모드를 모두 사용할 수 있다. 예를 들어 구조물이 2개의 부분구조로 구성되며 부분구조 1에서는 고정경계모드 그리고 부분구조 2에서는 하중경계모드를 사용한다고 가정하면 이 경우에 고유치해석을 위한 전체적인 과정은 Fig. 2와 같다.

3. 수치예제

본 연구에서 제시한 혼합경계합성법을 Fig. 3에 주어진 집중질량계에 적용하여 다음의 항목에 대해

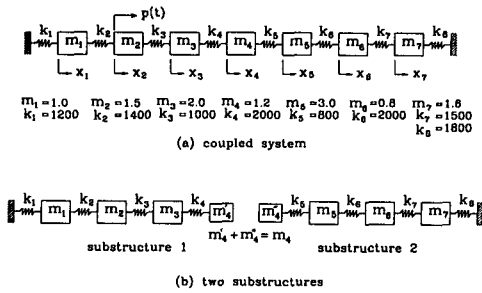


Fig. 3 A lumped mass model of 7 degrees of freedom

Table 1 Eigenvalues of the coupled system, and substructures 1 and 2 for different types of substructure modes

mode	coupled system	substructure 1			substructure 2		
		fixed	free	load	fixed	free	load
1	1.79		1.71	1.89		1.85	1.85
2	3.36	3.85	5.20	4.72	3.07	5.95	3.88
3	5.31	6.58	9.21	7.53	6.56	6.87	6.58
4	6.56	9.28	10.68	9.30	11.59	11.59	11.59
5	8.97						
6	9.47						
7	11.59						

고찰하였다.

- (1) 모드 매개변수의 상대적인 오차
- (2) 부분구조 모드의 수렴성
- (3) 부분구조 모드 선정의 기준

Fig. 3은 수치해석을 위한 7자유도의 집중질량계로 Fig. 3(a)는 전체계를 그리고 Fig. 3(b)는 각각 4자유도계로 모형화되는 두개의 부분구조를 나타낸 것이다. Table 1은 전체계 및 부분구조에 대한 고유진동수를 나타낸 것으로 각각의 부분구조에서는 고정, 자유 및 하중경계의 정규모드에 대한 고유진동수를 나타내었다. 고정경계모드에서는 부분구조의 자유도 수가 4이며 경계자유도의 수가 1개이므로 3개의 정규모드만 존재하게 된다.

- (1) 모드 매개변수의 상대적인 오차

모드합성법에서 부분구조의 축약된 정규모드를 이용하여 전체계의 근사적인 모드 매개변수를 구할 때 근사해의 정확도(accuracy)는 고유진동수와 모

드형상의 상대적인 오차를 이용하여 판정한다.

고유진동수의 오차는 엄밀한 고유진동수와와 상대적인 비로 다음과 같이 정의하였다.

$$\epsilon_r^\omega = \frac{(\omega_r)_{ex} - (\omega_r)_{app}}{(\omega_r)_{ex}} \times 100(\%) \quad (27)$$

여기서 ϵ_r^ω 는 전체계의 r번째 고유진동수의 상대적인 오차를 나타내며 $(\omega_r)_{ex}$ 와 $(\omega_r)_{app}$ 는 각각 전체계의 r번째 엄밀한 고유진동수와 근사적인 고유진동수이다.

또한 모드형상의 오차는 모드상관계수(modal coherence factor)를 이용하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\epsilon_r^\phi = \frac{|\{\phi_r\}_{ex}^T \{\phi_r\}_{app}|^2}{(\{\phi_r\}_{ex}^T \{\phi_r\}_{ex}) (\{\phi_r\}_{app}^T \{\phi_r\}_{app})} \quad (28)$$

여기서 ϵ_r^ϕ 는 전체계의 r번째 모드형상의 상대적인 오차이며 $\{\phi_r\}_{ex}$ 와 $\{\phi_r\}_{app}$ 는 각각 r번째 모드형상의 엄밀해와 근사해를 나타낸다. ϵ_r^ϕ 는 0에서 1까지 변하며 두개의 모드 간에 상관관계가 없는 경우에는 ϵ_r^ϕ 는 0이 되며 두개의 모드가 일치하는 경우에는 ϵ_r^ϕ 는 1이 된다.

서로 다른 경계의 부분구조 모드를 이용하여 전체계의 모드 매개변수를 구할 때 근사해의 수렴성 및 정확성을 비교하는 기준으로는 전체계의 운동방정식을 구성했을 때 최종적인 유효자유도의 수를 같게 하거나 또는 각각의 부분구조에서 정규모드의 수를 같게 하는 방법이 주로 사용된다. 본 연구에서는 부분구조에서 고려하는 모드의 수(구속모드 포함) 또는 정규모드의 수를 같게하여 세가지 부분구조 모드의 특성을 비교하였다.

Table 2, Table 3 그리고 Table 4는 부분구조에서 고려하는 모드의 수를 같게 하여 근사적으로 구한 고유진동수의 상대적인 오차를 나타낸 것이다. 각각의 부분구조에서는 세가지 형태의 모드를 모두 사용할 수 있으므로 Table 2에서 보듯이 9가지의 부분구조 모드의 조합이 존재한다. 여기서 fix, free 그리고 load는 각각 고정, 자유, 그리고 하중경계모드를 나타내는 것으로, 따라서 fix-load는 부분구조 1에서는 고정경계모드 그리고 부분구조 2에서는 하중경계모드를 사용함을 의미한다.

Table 2는 각각의 부분구조에서 1개의 모드만 고려한 경우 전체계의 첫번째 고유진동수의 상대적인 오차를 나타낸 것이다. Table 2에서 보듯이 고정경계모드의 첫번째 모드가 구속모드이므로 정규

모드는 고려되지 않으며 따라서 고정경계모드를 사용한 조합에서는 대체로 오차가 크게 나타난다. 또한 부분구조 2에서 하중경계모드의 첫번째 고유진동수가 전체계의 첫번째 고유진동수와 거의 같으므로 부분구조 2에서 하중경계모드를 사용한 경우에 오차가 최소로 됨을 볼 수 있다. 따라서 본 모델에서는 부분구조 1에서 어떤 경계모드를 사용하든 부분구조 2에서 1개의 하중경계모드만 사용하면 전체계의 첫번째 고유진동수를 매우 정확히 예측할 수

있음을 알 수 있다. 또한 부분구조 1에서는 자유경계모드 그리고 부분구조 2에서는 하중경계모드를 사용한 경우에 오차가 최소로 되는 것을 알 수 있다.

Table 3은 각각의 부분구조에서 2개의 모드를 고려한 경우 상대적인 오차를 나타낸 것이다. 고정경계모드를 사용한 경우 실제 고려한 정규모드의 수는 1개이므로 대체적으로 오차는 크나 두번째 고유진동수의 오차는 제일 적으며 이는 고정경계의

Table 2 Comparison of eigenvalue errors for nine combinations of substructure modes considering one mode for each substructure

mode	percentage errors of eigenvalues(%)								
	fix-fix	fix-free	fix-load	free-fix	free-free	free-load	load-fix	load-free	load-load
1	11.33	3.417	3.417	5.868	0.093	0.082	5.642	0.127	0.117

Table 3 Comparison of eigenvalue errors for nine combinations of substructure modes considering 2 modes for each substructure

mode	percentage errors of eigenvalues(%)								
	fix-fix	fix-free	fix-load	free-fix	free-free	free-load	load-fix	load-free	load-load
1	0.301	0.319	0.303	0.026	0.037	0.018	0.028	0.040	0.021
2	0.166	6.113	0.176	4.882	11.92	4.879	1.546	7.757	1.552
3	15.48	13.95	15.28	0.391	0.662	0.321	4.138	4.123	4.023

Table 4 Comparison of eigenvalue errors for nine combinations of substructure modes considering 3 modes for each substructure

mode	percentage errors of eigenvalues(%)								
	fix-fix	fix-free	fix-load	free-fix	free-free	free-load	load-fix	load-free	load-load
1	0.002	0.002	0.002	0.017	0.017	0.017	0.000	0.000	0.000
2	0.001	0.009	0.001	4.576	4.586	4.576	0.018	0.026	0.018
3	0.018	0.017	0.017	0.185	0.184	0.184	0.026	0.026	0.026
4	0.000	0.001	0.000	0.398	0.399	0.398	0.002	0.002	0.002
5	1.812	1.802	1.810	2.000	2.000	2.000	1.514	1.504	1.511

Table 5 Comparison of modal coherence factors for nine combinations of substructure modes considering one mode for each substructure

mode	percentage errors of eigenvalues(%)								
	fix-fix	fix-free	fix-load	free-fix	free-free	free-load	load-fix	load-free	load-load
1	0.971	0.985	0.985	0.969	0.999	0.999	0.965	0.999	0.999

정규모드의 첫번째 고유진동수가 전체계의 두번째 고유진동수와 거의 비슷하기 때문이다. 또한 고정경계모드를 사용한 조합에서는 어느 모드를 사용한 경우보다 첫번째 고유진동수의 오차가 현저히 줄어들어 이는 고정경계의 정규모드가 수렴성이 매우 좋음을 의미한다. Table 4는 각각의 부분구조에서 3개의 모드를 고려한 경우로 고정경계모드는 정규모드의 수가 2개에 불과하나 다른 모드를 사용한 경우보다 해의 오차가 매우 적음을 볼 수 있다.

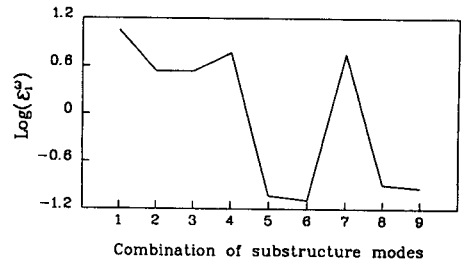
Table 5는 모드형상의 상대적인 오차인 모드 상관계수를 나타낸 것이다. Table 5에서 보듯이 고유진동수의 상대적인 오차가 제일 적은 경우에 모드 상관계수는 거의 1에 가까우며 이는 근사적으로 구한 모드형상이 실제 모드형상과 매우 잘 일치함을 의미한다. 이는 Fig. 4를 보면 더욱 명확해진다. Fig. 4는 부분구조 모드의 9가지 조합에 따른 고유진동수 및 모드형상의 오차를 나타낸 것으로 고유진동수의 오차와 모드 상관계수는 일관된 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다. 이는 모드합성법을 이용하여 근사적으로 모드 매개변수를 구한 후 고유진동수의 오차만으로 근사적인 모드 매개변수의 정확도를 판정할 수 있음을 의미한다. Fig. 5는 세가지 부분구조 모드의 조합에 대해 근사적으로 구한 모드형상과 실제 모드형상을 나타낸 것으로 고유진동수의 오차가 적은 경우에 모드형상도 매우 잘 일치함을 볼 수 있다.

(2) 부분구조 모드의 수렴성

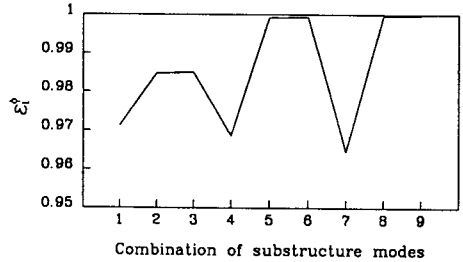
부분구조 1과 2에서 같은 경계조건을 갖는 부분구조 모드를 선정하여 세가지 부분구조 모드의 수렴성을 비교하였다. Fig. 6에서 Fig. 9는 고려하는 부분 구조 모드의 수를 증가시키며 고유진동수의 상대적인 오차를 나타낸 것으로 각각의 부분구조에서는 같은 수의 모드를 사용하였다. Fig. 6은 첫번째 고유진동 수의 오차를 나타낸 것으로 고정경계모드의 수렴성이 가장 좋으며 자유경계모드의 수렴성이 가장 나쁜 것을 볼 수 있다. Fig. 7과 Fig. 8은 두번째 및 세번째 고유진동수의 오차를 나타낸 것으로 Fig. 6과 같은 결론을 얻을 수 있다. Fig. 9는 구속모드를 제외한 정규모드의 수를 변화시키며 첫번째 고유진동수의 오차를 나타낸 것으로 각각의 부분구조 모드의 수렴성을 명확히 볼 수 있다.

(3) 부분구조 모드 선정의 기준

각각의 부분구조에서 사용하는 모드의 형태에 따라 모드 매개변수의 오차는 차이가 나며 따라서 특

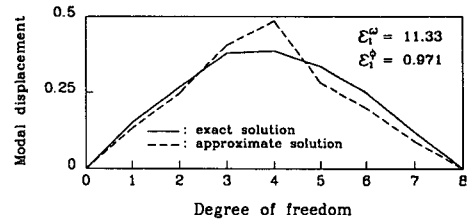


(a) Percentage error of eigenvalues

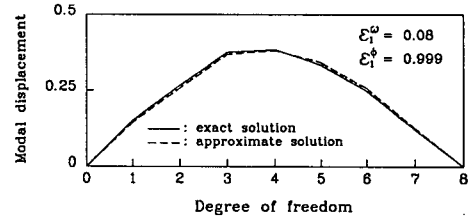


(b) Modal coherence

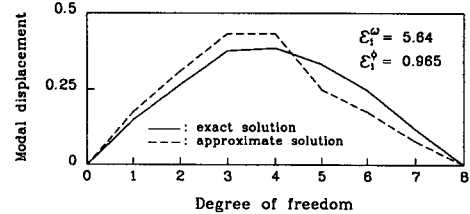
Fig. 4 Percentage errors of eigenvalues and modal coherence factors for nine combinations of substructure modes



(a) Fixed-fixed boundary condition



(b) Free-loaded boundary condition



(c) Loaded-fixed boundary condition

Fig. 5 Comparison of exact and approximate mode shapes

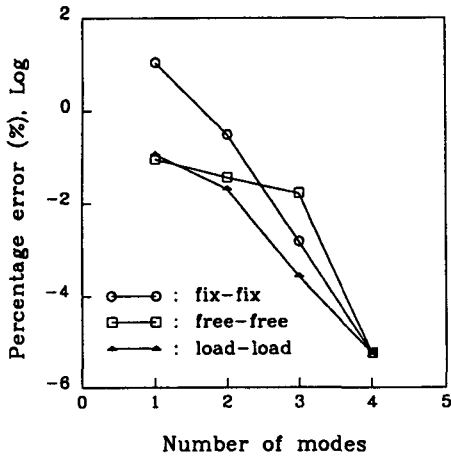


Fig. 6 Percentage errors of the first mode

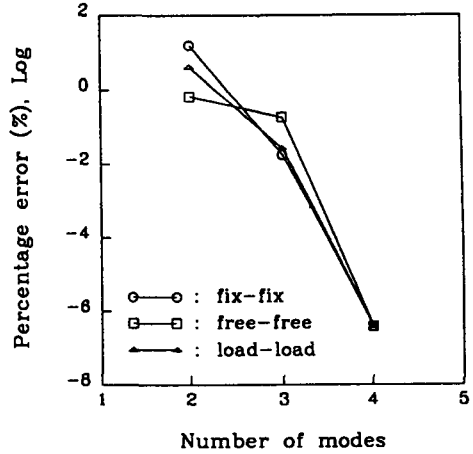


Fig. 8 Percentage errors of the third mode

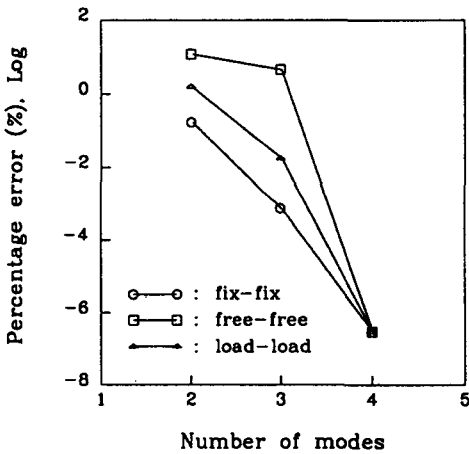


Fig. 7 Percentage errors of the second mode

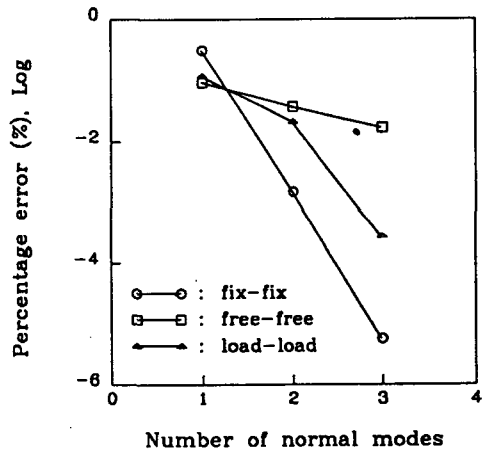


Fig. 9 Percentage errors of the first mode versus number of retained substructure normal mode

정 모드에 적합한 부분구조 모드의 최적의 조합이 존재함을 알 수 있다. Table 2에서 첫번째 고유진동수의 오차는 각각의 부분구조에서 자유 또는 하중경계모드를 사용한 경우에는 오차가 대략 0.1% 정도에 불과하나 고정경계모드를 사용한 경우에는 오차가 매우 큰 것을 볼 수 있다. 이는 고정경계모드의 첫번째 모드가 구속모드로써 정적변형모드이므로 전체계의 정규모드를 제대로 묘사하는데 한계가 있기 때문이다. 또한 각 부분구조의 자유 또는 하중경계모드의 첫번째 고유진동수가 전체계의 첫번째 고유진동수와 거의 비슷하며 따라서 전체계의 모드는 각 부분구조에서 비슷한 크기의 고유진동수를 갖는 모드에 의해 가장 많은 영향을 받는 것으

로 알 수 있다.

Table 3에서는 첫번째 고유진동수가 1.79 Hz로, 따라서 각 부분구조에서 이와 비슷한 크기의 고유진동수를 갖는 자유 또는 하중경계모드를 사용한 경우에 오차가 적어짐을 볼 수 있다. 또한 두번째 모드의 고유진동수는 3.36 Hz로 이는 고정경계 정규모드의 첫번째 고유진동수와 그 크기가 비슷하므로 부분구조에서 고정경계모드를 사용한 경우에 오차가 제일 적음을 볼 수 있다. 그러나 세번째 모드의 경우에는 5.31 Hz로 이는 고정경계모드의 고유진동수보다 훨씬 높으므로 고정경계모드를 사용한 경우에 오차가 제일 큰것을 볼 수 있다. 또한 부분구조 1과 2에서 fix-free의 조합을 사용하는 것보다

는 free-fix의 조합을 사용하는 것이 훨씬 유리함을 알 수 있다.

이상의 결과에서 보듯이 특정 모드 매개변수를 가장 잘 만족시키는 부분구조 모드의 최적의 조합이 존재함을 알 수 있으며 이는 전체계의 관심있는 모드와 가장 비슷한 크기의 고유진동수를 갖는 부분구조 모드의 형태에 가장 많은 영향을 받는 것으로 이해할 수 있다.

4. 결 론

일반적인 이산요소모델로 모형화되는 부분구조의 모드 매개변수와 기하학적 적합조건만을 이용하여 전체계의 운동방정식을 구성하지 않고도 전체 구조물의 고유치해석을 수행할 수 있는 새로운 혼합경계합성법을 제시하였다. 부분구조의 모드특성으로는 고정, 자유, 그리고 하중경계모드가 모두 사용될 수 있으며 따라서 제시한 방법은 유한요소법 뿐만 아니라 실험적 모드해석을 통해 모형화된 부분구조를 쉽게 고려할 수 있다. 부분구조의 연결부에서 정의되는 경계자유도만을 이용하여 전체계의 고유치해석을 수행하며 최종적인 고유치해석의 특성방정식은 전체계의 유효자유도 수보다 현저히 적은 수의 다항식이 됨을 보였다. 전체계의 고유치와 부분구조 고유치의 상대적인 크기를 비교하여 부분구조에서 고려해야 하는 모드의 형태 및 수를 결정할 수가 있으며 이는 강제진동해석에 대한 기초가 된다.

참고문헌

(1) Hurty, W. C., 1965, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," AIAA Journal, Vol. 3, No. 4, pp. 678~685.
 (2) Craig, R. R. and Bampton, M. C. C., 1968, "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis," AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, pp. 1313~1319.
 (3) Hou, S. N., 1969, "Review of Modal Synthesis Techniques and a New Approach," Shock and Vibration Bulletin, Vol. 40, Pt. 4, pp. 25~30.
 (4) Goldman, R. L., 1969, "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning," AIAA Journal, Vol. 7, No. 6, pp. 1152~1154.
 (5) Benfield, W. A. and Hruda, R. F., 1971, "Vibra-

tion Analysis of Structures by Component Mode Substitution," AIAA Journal, Vol. 9, No. 7, pp. 1255~1261.

(6) Macneal, R. H., 1971, "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis," Computers and Structures, Vol. 1, pp. 581~601.
 (7) Curnier, A., 1983, "On Three Modal Synthesis Variants," Journal of Sound and Vibration, Vol. 90, No. 4, pp. 527~540.
 (8) Craig, R. R. Jr. and Chang, C. J., 1976, "Free-Interface Methods of Substructure Coupling for Dynamic Analysis," AIAA Journal, Vol. 14, pp. 1633~1635.
 (9) Bucher, C. U. A., 1986, "A Modal Synthesis Method Employing Physical Coordinates, Free Component Modes, and Residual Flexibilities," Computers and Structures, Vol. 22, No. 4, pp. 559~564.
 (10) Kuang, J. H. and Tsuei, Y. G., 1985, "A More General Method of Substructure Mode Synthesis for Dynamic Analysis," AIAA Journal, Vol. 23, No. 4, pp. 618~623.
 (11) Dowell, E. H., 1971, "Free Vibrations of a Linear Structure with Arbitrary Support Condition," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 38, pp. 595~600.
 (12) Dowell, E. H., 1972, "Free Vibrations of an Arbitrary Structure in Terms of Component Modes," ASME Journal of Applied Mechanics, pp. 727~732.
 (13) Dowell, E. H., 1979, "On Some General Properties of Combined Dynamical System," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 206~209.
 (14) Yee, E. K. L. and Tsuei, Y. G., 1989, "Direct Component Modal Analysis Technique for System Dynamic Analysis," AIAA Journal, Vol. 27, No. 8, pp. 1083~1088.

부록 A

● 고정경계모드

부록 A에서는 고정경계모드에 대한 구속모드와

고정경계의 정규모드를 유도한다.

임의의 부분구조 s 에 대한 정적평형식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} [k_{bb}] & [k_{ba}] \\ [k_{ab}] & [k_{aa}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \{x_b\} \\ \{x_a\} \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} \{p_b\} \\ \{p_a\} \end{Bmatrix}_s \quad (A1)$$

여기서 $\{x_b\}$ 는 주좌표(master coordinates)로써 인접한 부분구조와의 연결부에 존재하는 경계자유도를 나타내며 $\{x_a\}$ 는 종속좌표(slave coordinates)로 내부자유도를 나타낸다.

모든 내부자유도에 작용하는 외력을 0으로 두면 식 (A1)의 두번째 식으로부터 내부자유도를 경계자유도로써 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$\{x_a\}_s = [\Phi_c]_s \{x_b\}_s \quad (A2)$$

여기서

$$[\Phi_c]_s = -[k_{aa}]_s^{-1} [k_{ab}]_s$$

식 (A2)의 $[\Phi_c]$ 가 원하는 구속모드행렬이다. 고정경계의 정규모드는 경계자유도를 완전히 구속시킨 상태에서 구한 정규모드로써 다음식으로부터 유도한다.

$$[k_{aa}]_s \{\phi_a\}_s = \omega^2 [m_{aa}]_s \{\phi_a\}_s \quad (A3)$$

식 (A3)의 모드벡터가 고정경계의 정규모드에 대한 모드행렬 $[\Phi_n]$ 의 행(column)을 구성한다.

정규모드의 모드축약을 고려하고 모드좌표계를 $\{\eta_n\}$ 이라 하면 내부자유도는 구속모드와 정규모드에 의한 영향의 합으로 다음과 같이 표현된다.

$$\{x_a\}_s = [\Phi_c]_s \{x_b\}_s + [\Phi_n]_s \{\eta_n\}_s \quad (A4)$$

부분구조의 모드좌표 벡터를 다음과 같이 정의하면

$$\{\eta_f\}_s = \begin{Bmatrix} \{\eta_b\} \\ \{\eta_n\} \end{Bmatrix}_s \quad (A5)$$

각 부분구조에는 다음과 같은 좌표변환식이 성립한다.

$$\{x\}_s = [\tilde{\Phi}_f]_s \{\eta_f\}_s \quad (A6)$$

여기서

$$[\tilde{\Phi}_f]_s = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\Phi_c] & [\Phi_n] \end{bmatrix}_s$$

이며 식 (A6)의 단위행렬은 다음을 의미한다.

$$\{x_b\}_s \equiv \{\eta_b\}_s \quad (A7)$$

부록 B

● 하중경계모드

부록 B에서는 인접한 부분구조의 하중효과를 고려한 임의의 부분구조 s 의 질량 및 강성행렬인 $[\bar{m}]_s$ 와 $[\bar{k}]_s$ 를 유도한다. 해석의 편의를 위해 구조계는 2개의 부분구조($s=1, 2$)로 구성되는 것으로 가정하며 먼저 부분구조 2가 부분구조 1에 미치는 하중효과를 고려한 부분구조 1의 질량 및 강성행렬을 유도한다.

부분구조 2의 정적평형식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} [k_{bb}] & [k_{ba}] \\ [k_{ab}] & [k_{aa}] \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} \{x_b\} \\ \{x_a\} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} \{p_b\} \\ \{p_a\} \end{Bmatrix}_2 \quad (B1)$$

정적축약(static condensation)에 의해 내부자유도를 경계자유도로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{x_a\}_2 = [T_c]_2 \{x_b\}_2 \quad (B2)$$

여기서

$$[T_c]_2 = -[k_{aa}]_2^{-1} [k_{ab}]_2$$

따라서 부분구조 2의 일반화된 좌표를 경계자유도로 나타내면 다음과 같다.

$$\{x\}_2 = [T_r]_2 \{x_b\}_2 \quad (B3)$$

여기서

$$[T_r]_2 = \begin{bmatrix} [I] \\ [T_c] \end{bmatrix}_2$$

이며 $[I]$ 는 단위행렬이다.

부분구조 2의 운동 및 탄성에너지는 다음과 같이 표현되므로

$$T_2 = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}_2^T [m]_2 \{\dot{x}\}_2 \quad V_2 = \frac{1}{2} \{x\}_2^T [k]_2 \{x\}_2 \quad (B4)$$

식 (B3)을 식 (B4)에 대입하면 부분구조 2의 경계자유도에 대해 축약된 질량 및 강성행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [\bar{m}]_2 &= [T_r]_2^T [m]_2 [T_r]_2, \\ [\bar{k}]_2 &= [T_r]_2^T [k]_2 [T_r]_2 \end{aligned} \quad (B5)$$

부분구조 1과 2의 연결부에서 만족해야 하는 기하학적 적합조건은 다음과 같이 표현되며

$$\{x_b\}_1 = \{x_b\}_2 \quad (B6)$$

식(B6)을 이용하면 부분구조 2의 경계자유도는 부분구조 1의 일반화된 좌표에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{x_b\}_2 = [T_L]_1 \{x\}_1 \quad (B7)$$

여기서

$$[T_L]_1 = \begin{bmatrix} I & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

는 좌표변환행렬 (coordinate transformation matrix)이다.

따라서 식(B3)과 (B7)을 이용하면 부분구조 2의 일반화된 좌표는 부분구조 1의 일반화된 좌표에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{x\}_2 = [T_r]_2 [T_L]_1 \{x\}_1 \quad (B8)$$

구조계의 총 운동 및 탄성에너지는 각 부분구조의 해석에서 보존되어야 하므로 전체 부분구조의 에너지를 고려하면 부분구조 2가 연결부에 미치는 하중효과를 근사적으로 고려한 부분구조 1의 질량 및 강성행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [\hat{m}]_1 &= [m]_1 + [T_L]_1^T [\bar{m}]_2 [T_L]_1 \\ [\hat{k}]_1 &= [k]_1 + [k]_2 + [T_L]_1^T [\bar{k}]_2 [T_L]_1 \end{aligned} \quad (B9)$$

마찬가지 방법으로 하면 부분구조 1의 하중효과를 고려한 부분구조 2의 질량 및 강성행렬인 $[\bar{m}]_2$ 와 $[\bar{k}]_2$ 를 구할 수 있다.