

〈論 文〉

## 와인드업 방지 보상기의 점프공진 제거 특성

장원욱\* · 노현석\*\* · 박영진\*\*\*

(1992년 9월 15일 접수)

### Anti-Jump Resonance Characteristics of Anti-Windup Compensator for Systems with a Saturating Actuator

Won Woog Chang, Hyoun Surk Roh and Youngjin Park

Key Words : Windup(와인드업), Jump Resonance(점프공진)

#### Abstract

One of the undesirable nonlinear phenomena in feedback control systems is called 'wind up,' which is characterized by large overshoot, slow response, and even instability. It is caused by interaction between the integrator in the controller and the saturating actuator. Limit cycle and jump resonance are another nonlinear characteristics of systems with saturating actuators. Several 'anti-windup' compensators have been developed to prevent some of the aforementioned nonlinear characteristics such as instability and limit cycle, but none has studied the effect of antiwindup compensator on the jump resonance. In this paper, we developed an analytical method to design the compensator to prevent not only limit cycle but also jump resonance. An illustrative example is included to show the compensator eliminates jump resonance effectively.

#### 1. 서 론

와인드업(windup) 현상은, 적분기가 있는 제어기의 출력이 액추에이터(actuator)의 포화현상으로 인하여 제어하려는 계에 충분히 전달되지 않는 경우에, 제어기의 출력이 비정상적으로 증가하는 바람직하지 않은 비선형 현상을 말한다.<sup>(1)</sup> 실제 제어계에는 가격이나 크기등의 이유로 되도록 작은 용량의 액추에이터가 사용되므로 이런 와인드업 방지 제어(anti-windup control)의 필요성이 크다. 이 분야에 관한 연구들은 와인드업 작용을 조절할 수 있는 새로운 비선형 제어기를 설계하거나,<sup>(2~6)</sup> 계의 안정성을 해석하는 방향으로 이루어져 왔다.<sup>(7~11)</sup>

최근에는 포화요소와 제어기 사이에 부착되는 와인드업 방지 보상기가 개발되었으며 이 보상기의 이득을 리미트사이클을 제거하도록 해석적으로 구하는 방법이 제시되었다.<sup>(12)</sup>

포화요소가 있는 시스템의 또 다른 비선형 현상 중의 하나는 점프공진 현상이다. 이 현상은 포화요소가 있는 폐환제어 시스템 뿐만 아니라 일반적인 비선형 시스템에서도 일어날 수 있는 현상으로 일정한 주파수와 진폭의 정현파 입력이 주어졌을 경우, 입력과 출력의 진폭의 비가 불연속적으로 갑자기 증가하거나 감소하게 되는 현상을 말한다. 이에 대한 연구로는 파워 앰프 또는 OP앰프에서의 포화현상에 의하여 발생하는 점프공진 현상에 대한 연구<sup>(13,14)</sup>와 보다 일반적인 점프현상(jump phenomenon)의 종류와 분류에 관한 연구<sup>(15)</sup>가 수행되었다. 폐환 제어계에 대하여서는 점프공진 현상이 발생하는 필요충분조건을 근사방법인 묘사함수 방법을 사

\*대우중공업 중기사업본부

\*\*한국과학기술원 기계공학과

\*\*\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

용하여 Hatanaka,<sup>(16)</sup> Fukuma와 Matsubara<sup>(17)</sup> 등이 구하였으며 Kavanagh와 Giridharagopal<sup>(18)</sup>은 프리필터 (prefilter)를 사용하여 점프공진을 조절할 수 있음을 보였고 Sidi<sup>(19)</sup>와 N-Nagy등<sup>(20)</sup>은 최소위상시스템의 점프공진을 제거할 수 있는 방법들을 제시하였다.

본 논문에서는 참고문헌(12)에서 개발된 와인드업 방지 보상기를 사용하여 점프공진 현상을 제거할 수 있음을 참고문헌(16)에 제시된 방법에 기초하여 보이고 이를 위한 보상기 이득 결정 방법을 제시하려 한다.

### 2. 와인드업 방지 보상기 (Anti-Windup Compensator)

Fig. 1은 액추에이터에서 포화현상이 발생하는 폐환제어 계의 구성도이다. 본 논문의 연구대상은 Fig. 1에서 처럼 포화요소를 제외한 모든 구성요소가 선형적으로 작동하는 계에 국한한다. 와인드업 현상은 Fig. 1의  $u$ 가  $v$ 에 비하여 크게 증가하는 현상을 일컫으므로, 와인드업 방지 보상기는 Fig. 2에서 처럼 제어기와 액추에이터(actuator) 사이에 부착되어  $u$ 와  $v$ 사이의 차이를 줄여 와인드업을 방지한다.<sup>(12)</sup> 보상기안의 포화요소와 액추에이터의 특성이 일치한다면, 액추에이터를 무시하여도 전체 시스템 특성에는 변화가 없으므로 이후부터는 이를 무시한다. 포화가 일어난 경우의 와인드업 현상은 보통 제어기 내의 적분기에 오차값이 누

적되어 일어나므로 이를 상쇄하기 위해서 보상기 제한 전달함수 속에 적분기를 필요로 하게 된다. 여기서 상수  $K_a$ 는 보상기이득(compensator gain)이다.

보상기의 이득은 와인드업과 점프 공진 현상이 일어나지 않도록 적절히 구하여야 한다. 와인드업 특히 리미트사이클이 일어나지 않도록 보상기 이득을 결정하는 방법은 참고문헌(12)에 나와 있으므로 다음 절에서는 점프공진과 이를 억제하는 보상기 이득 결정방법을 제시한다.

### 3. 점프공진 현상

Fig. 1의 비선형 제한 제어제에서 포화요소를 제외한 모든 시스템 요소들이 선형적으로 작동한다면, 이 제어계는 항상 Fig. 3처럼 표현될 수 있다.<sup>(16)</sup> 정현파 입력이 들어올 때 계가 정상 상태라고 하고 비선형요소가 묘사함수로 표현될 수 있다면, Fig. 3의 모든 신호들은 입력신호와 동일한 주파수를 갖는 조화함수로 표현 가능하다. 본 논문에서는 이러한 경우만을 다루기로 한다.

#### 3.1 점프공진 현상의 원인과 해결 방안

점프공진은 Fig. 3과 같이 포화 요소가 있는 계를 제한할 경우에 계의 목표값(reference input)  $r^*$ 의 진폭(R)과 포화 요소의 입력  $e^*$ 의 진폭(E) 사이의 대응 관계가 어떤 주파수에 대해서는 일대일

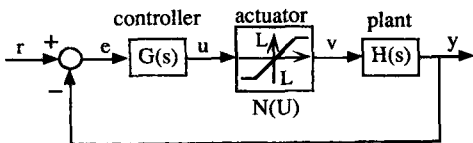


Fig. 1 The block diagram of a system with saturation

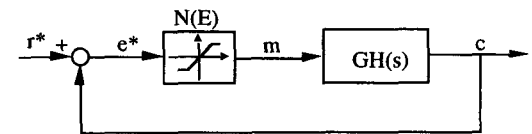


Fig. 3 Nonlinear Control System model for jump resonance

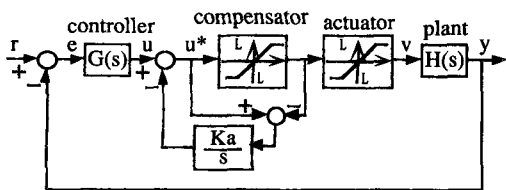


Fig. 2 The block diagram of a system with compensator

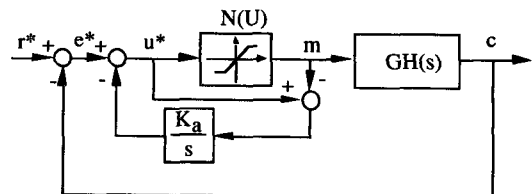


Fig. 4 Nonlinear system with compensator

의 대응관계를 이루지 않고 하나의 R값에 대해서 2~3개의 E값이 대응됨에 따라서 입력과 출력의 진폭의 비도 한 주파수에 대해서 2~3개가 대응되게 됨에 따라 일어난다.<sup>(21)</sup> 이때 점프공진이 일어나는 영역은 Fig. 3과 같은 계에 있어서  $\frac{\partial R}{\partial E}\Big|_{\omega=\text{const.}}$

<0과 같은 식으로 표현가능하다.<sup>(16)</sup> Fig. 4에 있는 보상기가 부착된 계 또한 Fig. 3에 있는 시스템처럼 변형될 수 있으므로, 보상기가 부착된 계의 점프공진영역은  $\frac{\partial R}{\partial U}\Big|_{\omega=\text{const.}} < 0$ 으로 대치될 수 있다.

Fig. 4에 있는 계에서의 보상기 이득의 변화는  $\frac{\partial R}{\partial U}\Big|_{\omega=\text{const.}}$ 를 변화시킨다. 그러므로 보상기의 이득의

조정으로 점프공진 현상을 해결할 수 있다. 여기서 R과 E와 U는 각각 Fig. 3과 4에서의 정현파로 가정한 신호  $r^*$ ,  $e^*$ ,  $u^*$ 의 진폭을, L은 포화요소의 최대 출력을 표시한다. 포화요소는 비선형 함수이나 해석의 편의를 위하여 Taylor 급수로 전개한 후 2차 이상의 고차항들이 저역통과 함수인 시스템에 의하여 제거된다고 가정하면 다음과 같은 묘사함수(describing function)로 표현된다.<sup>(22)</sup> 한가지 주의할 점은, 묘사함수 방법이 근사방법이므로 모의실험이나 감도해석(sensitivity analysis) 등을 통한 검증은 필요로 한다는 것이다.

$$N(U) = \begin{cases} 1 & U \leq L \\ \frac{2}{\pi} \left[ \sin^{-1}\left(\frac{L}{U}\right) + \frac{L}{U} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{U}\right)^2} \right] & U > L \end{cases} \quad (1)$$

### 3.2 점프공진 현상의 발생 조건

Fig. 4에 있는 입력 주파수가  $\omega$ 인 정상 상태에서에서 목표값의 진폭(R)과 포화 요소입력의 진폭(U) 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$R = \left(\frac{U}{\omega}\right) \sqrt{\omega^2 [1 + N(U)X(\omega)]^2 + \{K_a - K_a N(U) - \omega N(U)Y(\omega)\}^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } X(\omega) &= \text{Re}[GH(j\omega)] \\ Y(\omega) &= \text{Im}[GH(j\omega)] \end{aligned}$$

이 식을 U에 관해서 편미분하면 식(3)이 된다.

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{\omega^2 A^2 + B^2 + \omega^2 U A A' + U B B'}{\omega \sqrt{\omega^2 A^2 + B^2}} \quad (3)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A &= A(U, \omega) = 1 + N(U)X(\omega) \\ B &= B(K_a, U, \omega) \\ &= K_a - K_a N(U) - \omega N(U)Y(\omega) \\ A' &= \frac{\partial A(U, \omega)}{\partial U} = X(\omega) \frac{\partial N(U)}{\partial U} \\ &= X(\omega)N'(U) \\ B' &= \frac{\partial B(K_a, U, \omega)}{\partial U} \\ &= -K_a N'(U) - \omega Y(\omega)N'(U) \end{aligned}$$

$\omega > 0$ 이므로 식(3)의 분모항은 항상 양의 값을 갖게 된다. 그러므로  $\frac{\partial R}{\partial U}\Big|_{\omega=\text{const.}} < 0$ 의 조건은 식(4)로 정리가 된다.

$$\omega^2 A^2 + B^2 + \omega^2 U A A' + U B B' < 0 \quad (4)$$

이 식을 새로운 변수  $N^*$ 를 사용하여 치환한 후

$$N^* = N + UN' \quad (5)$$

식(4)에 A, A', B, B' 원래의 값을 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &(X + \frac{1}{N})(X + \frac{1}{N^*}) + \\ &\left\{ Y + \frac{(N-1)K_a}{\omega N} \right\} \left\{ Y + \frac{(N^*-1)K_a}{\omega N^*} \right\} < 0 \quad (6) \end{aligned}$$

윗식은 보상기가 부착된 계에서 점프공진이 일어나는 조건을 나타내고 있다.

### 3.3 점프공진 현상이 일어나는 영역

식(6)에서 좌변을 영으로 놓으면 점프공진이 일어나는 구역의 경계를 나타낸다. 이는 다음의 원의 방정식으로 바뀌어질 수 있다.

$$(X + \alpha)^2 + \{Y + (1 - \alpha)K\}^2 = \beta^2(1 + K^2) \quad (7)$$

$$\text{여기서, } \alpha = \frac{1}{2}(N^{-1} + N^{*-1}) > 1$$

$$\beta = \frac{1}{2}(N^{-1} - N^{*-1}) > 0$$

$$K = \frac{K_a}{\omega}$$

이 방정식은  $GH(j\omega)$ 의 복소수 평면에서 다음과 같은 원의 중심과 반경을 갖게 된다.

$$[-\alpha, -K(1-\alpha)], \beta\sqrt{1+K^2}$$

그러므로  $GH(j\omega)$ 의 복소수 평면에서 식(7)은 U와  $\omega$ 에 따라서 중심과 반경이 달라지는 원들의 집합을 나타낸다.

먼저  $K(=K_a/\omega)$ 를 고정시키고 모든  $U$ 에 대해서 점프공진이 일어나는 경계를 구하면 식(7)의 원들로 이루어진 포락선(envelope)으로 나타난다.  $x=L/U$ 라고 놓고 이 포락선의 방정식을 구하면 식(8)로 나타난다[부록 참조].

$$X = a \pm Kb, Y = \pm b - K(1+a) \quad (8)$$

$$\text{여기서 } a = a(x) = \beta \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} - a$$

$$b = b(x) = \beta \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \frac{\left(\frac{N^{*'}}{N'}\right) - \left(\frac{N^*}{N}\right)^2}{\left(\frac{N^{*'}}{N'}\right) + \left(\frac{N^*}{N}\right)^2}$$

여기서  $X$ 는 경계면의  $GH(j\omega)$  평면의 실수값을  $Y$ 는 허수값을 나타낸다.

식(8)은 점프공진이 일어날 수 있는 경계를 나타낸다. 이 식이 나타내는 경계는  $K$ 값의 변화에 따라서 변화하게 된다.

먼저  $K$ 가 극한값을 가질 때의 경계를 고려하기로 하자.  $K=0$ 일 때의 영역은 식(8)에  $K=0$ 를 대입함으로써 얻을 수 있다. 이 영역은 보상기를 부착하기 전의 점프공진이 일어나는 영역을 나타낸다. Fig. 5는 이 때의 영역을 나타낸다. 이는 참고 문헌(11)에서 구한 영역과 일치한다. Fig. 5의 영역이 리미트사이클의 존재 영역( $Re[GH(j\omega)] < -1$ ,  $Im[GH(j\omega)] = 0$ )을 포함하고 있으므로 묘사함수법에 근거하면 보상기의 부착여부에 상관없이(보상기가 부착된 시스템도 Fig. 3과 같이 나타낼 수 있으므로) 점프공진이 일어나지 않는 시스템은 리미트사이클이 존재하지 않는다고 할 수 있다.

$K=\infty$ 일 때의 영역은 다음과 같이 구해진다. 영역을 고려하기 위하여 식(8)을 다음과 같이 나누어 쓰자.

$$X^+ = a + Kb, Y^+ = b - K(1+a) \quad (9)$$

$$X^- = a - Kb, Y^- = -b - K(1+a) \quad (10)$$

위의 두 식을 각각 결합하면

$$Y^+ = -cX^+ + d \quad (11)$$

$$Y^- = cX^- - d \quad (12)$$

$$\text{여기서 } c = c(x) = \frac{1+a(x)}{b(x)}$$

$$d = d(x) = \frac{b(x)^2 + a(x)^2 + a(x)}{b(x)}$$

여기서  $x \approx 1$ 일 때 다음 식이 성립한다.<sup>(23)</sup>

$$\lim_{x \rightarrow 1} [-c(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} d(x) = 0^+ \quad (13)$$

식(13)을 식(11)과 (12)에 대입하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} Y^\pm = 0^+(X^\pm \neq -1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} Y^\pm = 0(X^\pm = -1)$$

위에서 계산한 것처럼 유한한 값의  $X(X^\pm = -1$  제외)에 대해서  $x$ 를 1로 보내면  $Y$ 는  $0^+$ 값을 얻는 것을 알 수 있다.  $x$ 를 1로 보내는 것은 다음식에서 보는 것처럼  $K$ 를  $\infty$ 로 보내는 것을 의미한다. ( $X^\pm = -1$  제외)

$$\lim_{x \rightarrow 1} K = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{X^+ - a}{b} \right] = \infty \quad (14)$$

$$\text{여기서, } \lim_{x \rightarrow 1} a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} b = 0$$

그러므로  $K$ 가  $\infty$ 로 갈 때 유한한  $X$ 에 대해서  $Y$ 는 영으로 간다. Fig. 6은  $K=\infty$ 에서 점프공진이 일어나는 영역을 표시하고 있다.

Fig. 7은  $K$ 의 값에 따라서 점프공진이 일어나는 영역이 변화하는 것을 보여 준다. 이 Fig. 7에 의

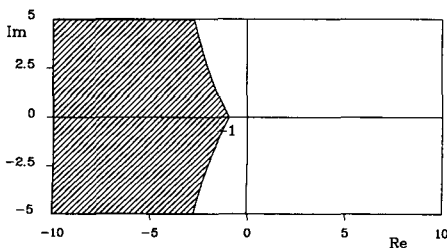


Fig. 5 Region of jump resonance for  $K=0$

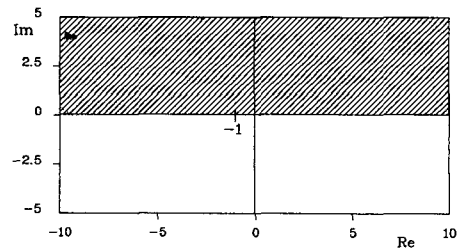


Fig. 6 Region of jump resonance for  $K=\infty$

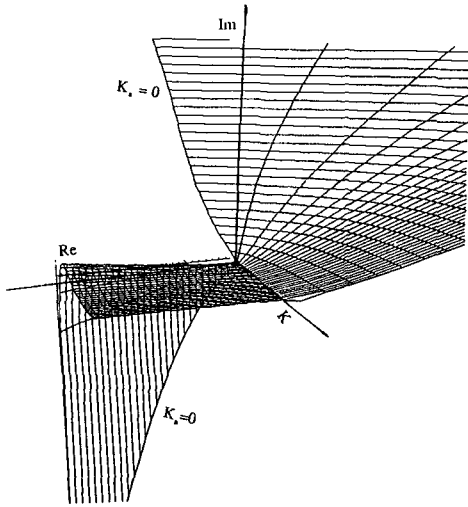


Fig. 7 Region of jump resonance for changing  $K$

하면  $GH(j\omega)$ 의 복소수 평면에서  $K$ 값의 변화에 따라서 점프공진이 생기는 영역이 변화 함에도 불구하고  $K=0$ 일 때  $[X^+, Y^*]$ 의 곡선과  $X^- < -1$ ,  $K > 0$ ,  $0 < x < 1$ 의 영역에서  $Y^-$ 가 최대값을 갖는  $[X^-, Y^-]$ 의 곡선 사이의 영역은 점프공진이 항상 일어나는 영역으로 남게됨을 알 수 있다.

$X^-$ 에 대한  $Y^-$ 의 최대값은 다음과 같이 구해진다. 식(12)를  $x$ 에 대해서 미분해서  $dY^-/dx=0$ 인 경우를 고려하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$X^- = \frac{dd(X)/dx}{dc(x)/dx} \quad (15)$$

식(12)와 (15)를 만족하는  $Y^-$ 가 최대값을 나타내게 된다. Fig. 8은 항상 점프공진이 일어나는 영역을 표시하고 있다.

이제 계의 입력  $R$ 이 고정되었을 때의 점프공진이 일어나는 영역을 고려하기로 하자.  $\frac{\partial R}{\partial U} < 0$ 인 조건은 식(2)의  $R$ 과  $U$ 사이의 관계식을 고려하면 언제나 비선형 영역이 시작되는  $U=L$ 의 점에서부터 만족된다. Hatanaka는 이 점보다 조금 큰 값을 갖는 점이 상한 점프공진점(upper jump-resonance point)이라고 주장하였다.<sup>(16)</sup> 그러므로 점프공진은 이점 근처의 영역에서 나타난다. 이 점은  $GH(j\omega)$ 의 복소수 평면에서 다음과 같이 표시된다.

먼저 무차원 입력을 다음과 같이 정의하고 식(2)

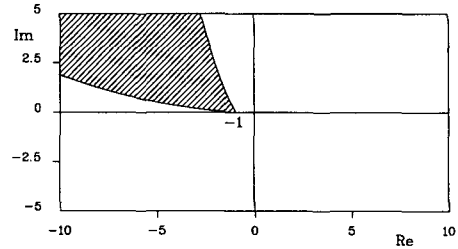


Fig. 8 Region of jump resonance regardless of  $K$

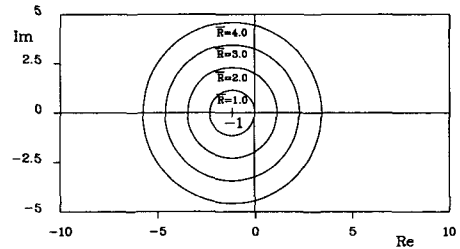


Fig. 9 Line of constant dimensionless  $\bar{R}$

에  $U=L$ 을 대입하면 다음의 식이 된다.

$$\bar{R} \equiv \frac{R}{L} = \sqrt{[X(\omega)+1]^2 + Y(\omega)^2} \quad (16)$$

이 식은  $GH(j\omega)$ 의 평면에서  $-1$ 을 중심으로 하고 반경  $\bar{R}$ 를 가지는 원으로 표시된다. Fig. 9는  $\bar{R}$ 를 상수로 고려하였을 경우의 그림이다. 그러므로 계의 입력이 고정된 경우의 점프공진이 일어나는 영역은  $GH(j\omega)$ 의 복소수평면에서 식(8)의 영역중에서 (16)의 원의 경계 부근이 된다.

### 3.4 보상기 이득의 결정 방법

포화 요소를 가지고 있는 계의 선형부분  $GH(j\omega)$ 의 나이퀴스트 선도(nyquist plot)가 식(8)에서 나타내는 점프공진을 일으키는 영역에 들어가지 않으면 입력의 진폭  $R$ 의 크기에 상관없이 점프공진 현상은 일어나지 않는다.  $K=K_a/\omega$ 이므로  $K_a$ 가 상수일 경우에 복소수 평면에서 점프공진을 일으키는 영역과  $GH(j\omega)$ 는  $\omega$ 에 따라서 변화하게 된다.  $\omega$ 가 고정되었을 경우에  $GH(j\omega)$ 는 평면에 한점으로 나타나고 이 점이 점프공진을 일으키는 영역에 들어가지 않으면 그 주파수에서 점프공진은 일어나지 않게 된다.

계의 선형부분  $GH(j\omega)$ 와 점프공진이 일어나는

영역은 복소수 평면과 이 평면에 수직으로 새로운 축  $K$ 를 갖는 Fig. 7과 같은 3차원 공간에서 함께 그려질 수 있다. 이 3차원 공간에서 점프공진 영역과  $GH(j\omega)$ 가 만나는 현상은 한축은  $\omega(=K_a/K)$ 의 값을 갖고 다른 한축은  $K$ 의 값을 갖는 평면에서 동일하게 고려될 수 있다. 이 평면에서  $K_a = \text{const}$ 를 나타내는 선을 고려하면 도식적인 방법으로 모든 입력의 크기에 관계없이 점프공진 현상이 나타나지 않는 보상기의 이득을 구할 수가 있다. 자세한 것은 다음의 예제를 통하여 설명하기로 한다.

## 4. 예 제

### 4.1 예제 1

정상 상태에서 적당한 입력에 대해서 점프공진을 일으키는 다음과 같은 개회로 선형 전달함수를 갖는 계를 고려하자.

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(2s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)} \quad (17)$$

위의 계는 포화요소의 최대 출력  $L$ 이 2이며, 계의 정현파 입력의 진폭  $R$ 이 5인 경우에  $\omega = 1.41$  (rad/sec) 근방에서 점프 공진을 일으킨다.<sup>(16)</sup> Fig. 10은 보상기를 부착하기 전의 점프공진이 일어나는 영역( $K_a=0$ )과 무차원 입력  $\bar{R}$  그리고  $GH(j\omega)$ 의 곡선이 만나는 것을 보여주고 있다. Fig. 10으로부터 이 시스템은 보상기의 이득에 관계없이 리밋사이클이 없을 것을 알 수 있으므로 점프공진

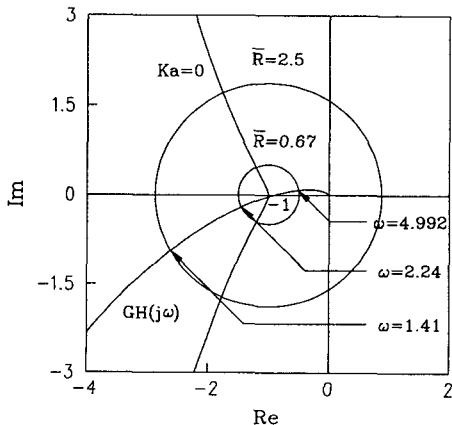


Fig. 10 Nyquist plot of linear subsystem in Example 1

을 없애는 이득 구간만을 구하면 된다.  $K$ 를 변화시키면서  $GH(j\omega)$ 의 곡선이 영역과 만나는  $\omega$ 를 계산해서  $K$ 와  $\omega$ 의 평면에 표시하면 Fig. 11을 얻을 수 있다. 보상기의 이득을  $0.9 \leq K_a \leq 520$ 에서 결정하면 빗금 친 부분을 지나지 않게 되므로 모든 입력의 진폭에 대해서 점프공진 현상을 피할 수 있다.

이제 특정한 입력이 들어오는 경우에 보상기를 부착해서 점프공진이 없어짐을 주파수 응답함수를 통해서 알아보자.

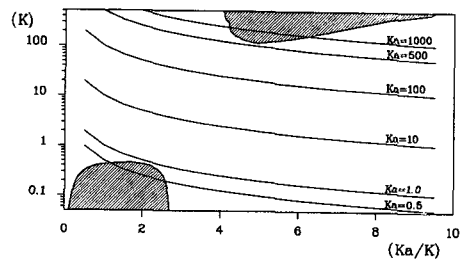
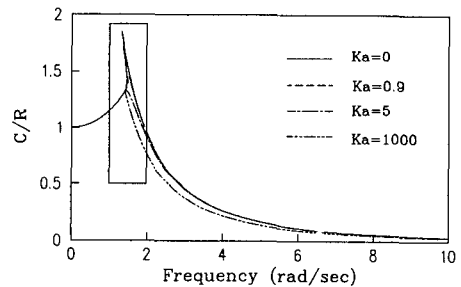
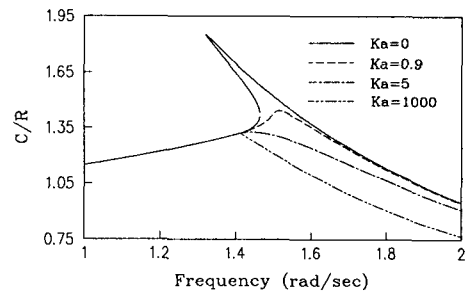


Fig. 11 Compensator gains and jump resonance region in Example 1



(a)



(b)

Fig. 12 Frequency response function for various  $K_a$  ( $\bar{R}=2.5$ )

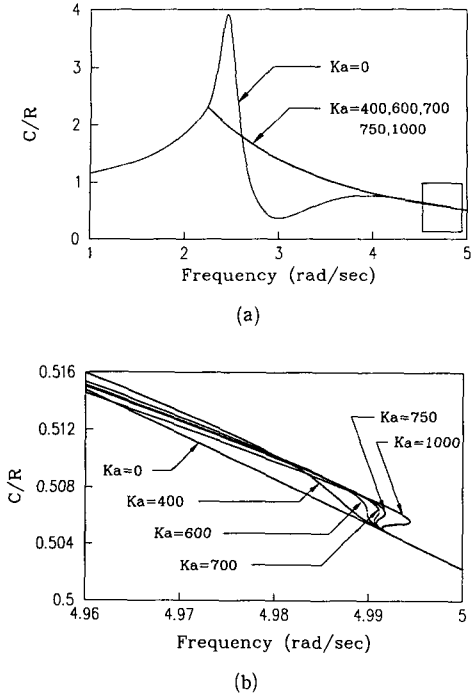


Fig. 13 Frequency response function for various  $K_a$  ( $\bar{R}=0.67$ )

Fig. 12는  $\bar{R}=2.5$ 의 경우를 Fig. 13은  $\bar{R}=0.67$ 의 경우의 결과를 보여준다. 두 경우에 점프공진의 경향이 다르게 나타나는 것을 볼 수 있다.  $U=L$ 인 점이 전자에는 상한 점프공진점을 나타내는데 반하여 후자에서는 하한 점프공진점을 나타내게 된다. 각각의 경우 Fig. 10에서 예측한 주파수에서 점프공진이 일어남을 알 수 있다.

4.2 예제 2

참고문헌(12)에 있는 예제에 사용된 시스템의 개루프 전달함수는 다음과 같다.

$$GH(s) = \frac{2.99s^2 + 3s + 1}{s^2(s + 0.01)} \quad (18)$$

Fig. 14에 있는 위 시스템의 나이퀴스트선도를 보면  $GH(j\omega)$ 가 항상 점프공진이 존재하는 구간을 지나므로 모든 크기의 정현파 입력에 대하여서는 점프공진을 없앨 수 없음을 알 수 있다. 그러나,  $\bar{R}=20.8$  이상의 경우에만 그 구간을 지나므로, 정현파 입력의 최대크기가 포화요소의 최대 출력  $L$ 보다 20배 이상 크지 않을 경우에 한하여 점프공진을 없앨 수 있다. Fig. 15 또한 동일한 결과를 보

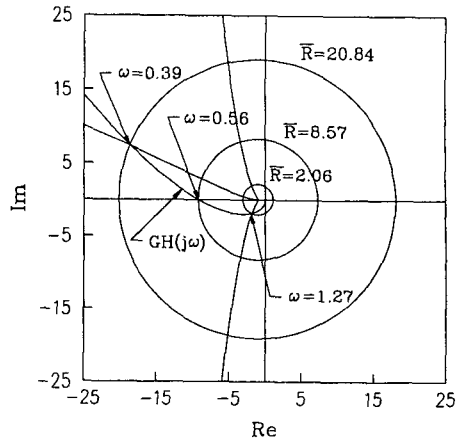


Fig. 14 Nyquist plot of linear subsystem in Example 2

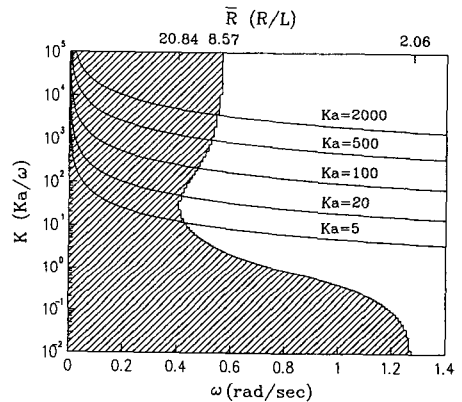


Fig. 15 Compensator gains and jump resonance region in Example 2

여주고 있다. 이 예제의 경우 점프공진이 일어나는  $\bar{R}$  값과 입력 주파수가 단순 감소 관계에 있으므로, Fig. 15의 위에는 정현파 입력의 상대적 크기를 나타내는  $\bar{R}$ 을 표시하였다. 입력의 크기가 일정 값보다 항상 작을 경우 그 값보다 오른쪽에 있는 부분의 그림만을 고려하여 보상기의 이득값을 결정하면, 점프공진을 피할 수 있다.  $\bar{R}$ 이 2를 넘지 않을 경우 0이상의 어떤 값을 보상기 이득으로 사용하여도 점프공진을 피할 수 있고,  $\bar{R}$ 이 20보다 크지 않으면 보상기이득을 10으로 정함으로 점프공진을 억제할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서 다룬 보상기는 점프공진 현상을 없

애는데 우수한 능력을 보인다. 특히 이 보상기는 선형 제어기가 설계 및 설치된 이후에라도 제어기를 바꾸지 않고 부가적으로 설치할 수 있는 장점이 있다. 이 보상기는 포화현상이 일어나지 않으면 전혀 작동하지 않으므로 선형 작동구간의 동특성은 보상기 부착전과 동일하다.

개회로 선형 시스템의 나이퀴스트 선도(nyquist plot)를 사용하여 점프공진 현상을 일으키지 않는 보상기 이득을 체계적으로 구할 수 있는 방법을 제시하였으며 이를 예제를 통하여 보였다.

### 참고문헌

- (1) Astrom, K. J. and Wittenmark, B., 1990, "Computer Controlled Systems-theory and design," Prentice-Hall, pp. 224~226.
- (2) Fertik, H. A. and Ross, C. W., 1967, "Direct Digital Control Algorithms with Anti-windup Feature," ISA Transactions, Vol. 6, No. 4, pp. 317~328.
- (3) Krikelis, N. J., 1980, "State Feedback Integral Control with Intelligent Integrators," Int. J. Control, Vol. 32, No. 3, pp. 465~473.
- (4) Astrom, K. J. and Wittenmark, B. 1984, "Computer Controlled Systems-theory and Design, First edition," Prentice-Hall, pp. 369~373.
- (5) Hanus, R. Kinnaert M. and Henrotte, J.-L. 1987, "Conditioning Technique, a General Antiwindup and Bumpless Transfer Method," Automatica, Vol. 23, No. 6, pp. 726~739.
- (6) Walgama, K. S. and Sternby, J. 1990, "Inherent Observer Property in a Class of Anti-windup Compensator," Vol. 52, No. 3, pp. 705~724.
- (7) Glattfelder, A. H. and Schaufelberger, W. 1983, "Stability Analysis of Single Loop control Systems with Saturation and Antireset-Windup Circuits," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-28, No. 12, pp. 1074~1081.
- (8) Chen, B.S. and Wang, S. S. 1988, "The Stability of Feedback Control with Nonlinear Saturating Actuator : Time Domain Approach," IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-33, No. 5, pp. 483~487.
- (9) Sangsik Yang, 1990, "Stability Analysis of a Control system with an Antireset-Windup Limiter by Liapunov's Second Method," Proc. of 1990 KACC, Vol. 2, pp. 1289~1294.
- (10) Sangsik Yang, 1989, "Stability and Performance of a Control System with and Intelligent limiter," Proc. of 1989, ACC V2(of 3), pp. 1699~1705.
- (11) Atherton, D. P. and Dorrah, H. T. 1980, "A Survey on Nonlinear Oscillations," Vol. 31, No. 6, pp. 1041~1105.
- (12) 장원욱, 박영진, 1992, "포화요소가 있는 계를 위한 와인드업 방지 보상 방법," 대한기계학회논문집 16권 7호, pp. 1332~1340.
- (13) Moni, R. S. and Rao, K. 1982, "Jump-Phenomenon in Active-RC filters," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-29, No. 1, pp. 54~55.
- (14) Allen, P. E. 1979, "Large-Signal Performance of Audio Power Amplifiers in the Frequency Domain," Journal of the Audio Engineering Society, Vol. 27, No. 9, pp. 638~647.
- (15) Fukuma, A. and Matsubara, M. 1978, "Jump Resonance in Nonlinear Feedback Systems-Part I : Approximate Analysis by the Describing Function Method," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 23, No. 5, pp. 891~896.
- (16) Hatanaka, H. 1963, "The Frequency Response and Jump-Resonance Phenomena of Nonlinear Feedback Control Systems," J. Basic Eng., Trans. ASME Series D, Vol. 85, No. 2, pp. 236~242.
- (17) Fukuma, A. and Matsubara, M. 1966, "Jump Resonance Criteria of Nonlinear Control Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 11, No. 4, pp. 699~706.
- (18) Kavanagh, R. J. and Giridharagopal, K. 1974, "Jump Resonance Properties of Certain Nonlinear Systems with Prefilters," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 19, No., 4, pp. 162~164.
- (19) Sidi, M. 1974, "Synthesis of Single-loop Feedback Systems including One Nonlinear Element," International Journal of Control, Vol. 20, No. 3, pp. 369~381.



- (20) N-Nagy, F. L. Uraz, A. and Takahashi, S. 1973, "Compensation Method for Nonlinear Systems Having Jump and Hysteresis Properties," International Journal of Control, Vol. 18, No. 4, pp. 801~816.
- (21) Takahashi, Y. Rabins M. J. and Auslander, D. M. 1970, "Control and Dynamic Systems," Addison-Wesley.
- (22) Sridhar, R. 1960, "A General Method for Deriving the Describing Functions for a Certain Class of Nonlinearities," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-5, No. 2, pp. 135~141.
- (23) 장원욱, 1992, "포화요소가 있는 계를 위한 와인드업 방지 보상방법," 한국과학기술원 석사 학위 논문.

## 부 록

식(8)로 부터 다음과 같이 새로운 함수를 정의하자.

$$f(X^*, Y^*, x) = [X^* + \alpha]^2 + [Y^* - (\alpha - 1)K]^2 - \beta^2(1 + K^2) \quad (A1)$$

이 식을  $x$ 에 대해서 편미분하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = & 2(1 + K^2) \left( \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \\ & + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} (X^* - KY^* - K) \end{aligned} \quad (A2)$$

$X^*$ 와  $Y^*$ 가 포락선의 좌표이기 위해서는 식(A2)이 영이 되어야 한다.

$$\begin{aligned} (1 + K^2) \left( \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial \alpha}{\partial x} (X^* - KY^* - K) = 0 \end{aligned} \quad (A3)$$

식(A3)을  $Y^*$ 에 대해서 정리하면

$$Y^* = \frac{1}{K} X^* + \frac{1}{K} \left[ (1 + K^2) \left( \alpha - \beta \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) - K^2 \right] \quad (A4)$$

$X^*$ 와  $Y^*$ 는 식(8)을 만족하므로 식(A4)을 대입하고 정리하면

$$X^* = \beta \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} - \alpha \pm K\beta \sqrt{1 - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right)^2} \quad (A5)$$

$$Y^* = \pm \beta \sqrt{1 - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right)^2} + K \left( \alpha - 1 - \beta \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) \quad (A6)$$

이제 (A5)와 (A6)은 포락선의  $X$ 와  $Y$ 좌표를 나타낸다.