

〈論 文〉

저레이놀즈수 난류에 대한 레이놀즈 응력모델

김 광 용*

(1992년 12월 8일 접수)

A Reynolds Stress Model for Low-Reynolds-Number Turbulence

Kwang-Yong Kim

Key Words : Reynolds Stress Model(레이놀즈응력모델), Low-Reynolds-Number Turbulence(저레이놀즈수 난류), Fully Developed 2-D Channel Flow(완전발달된 2차원 유로 유동), Velocity Pressure-Gradient Interaction(속도-압력구배 상관), Dissipation Rate(소멸율)

Abstract

To extend the widely used Gibson and Launder's second order closure model to the low-Reynolds-number region near a wall, modifications have been made for velocity pressure-gradient interaction and dissipation terms in the stress equations, and also for the dissipation rate equation. From the computation of fully developed plane channel flow, it is found that the results with present model agree well with the data of direct numerical simulation in the predictions of stress components. And, the computed mean velocity profile coincides with the universal velocity law.

1. 서 론

벽근처 낮은 레이놀즈수 영역의 난류현상에 관한 수학적 모델의 개발은 최근 난류모델의 연구에 있어 중요한 과제로 인식되고 있다. 재래적인 난류모델들은 벽근처 영역에서 대부분 실험적인 벽법칙을 적용하고 있으나, 이 벽법칙은 유선의 곡률이 크거나 압력구배가 큰 경우에는 수정이 필요하다고 알려져 있다. 그러므로 난류모델이 보편성을 갖기 위해서는 벽근처 영역을 포함하는 유동의 전영역에 일관성 있게 적용될 수 있는 난류모델의 개발이 요구된다. 2-방정식 모델의 일종인 $k-\epsilon$ 모델에 관해서는 이미 저레이놀즈수 모델의 개발이 상당한 수준에 이르고 있으나,⁽¹⁾ 레이놀즈응력모델에 관해서는 아직 개발단계에 머물고 있다.^(2~7)

본 연구에서는 새로운 유형의 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델을 개발하기 위해 Launder 등⁽⁸⁾과 Gibson과 Launder⁽²⁾에 의해 제시된 레이놀즈응력모델을 벽근처의 저레이놀즈수 영역까지 확장하였다. 개발된 모델의 성능을 시험하기 위해 두 평판사이에서 완전히 발달된 2차원 유동을 계산하여 그 결과를 Kim 등⁽¹⁰⁾에 의해 수행된 Navier-Stokes 방정식의 직접계산결과와 비교하였으며, 아울러 Launder와 Shima⁽²⁾가 제시한 모델로도 계산을 수행하여 그 결과를 비교 검토하였다.

2. 난류모델

레이놀즈응력성분($\overline{u_i u_j}$)들에 관한 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_{ij} = P_{ij} + D_{ij} + T_{ij} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (1)$$

여기서

*정회원, 인하대학교 기계공학과

$$C_{ij} = \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} : \text{대류항}$$

$$P_{ij} = -\left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] : \text{생성항}$$

$$D_{ij} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k^2} : \text{점성확산항}$$

$$T_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k}) : \text{난류확산항}$$

$$\Pi_{ij} = -\left(\overline{u_i} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) : \text{속도-압력구배 상관항}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} : \text{소멸항}$$

난류확산항(T_{ij})에 대해서는 널리 사용되고 있는 Daly와 Harlow⁽¹¹⁾의 다음과 같은 단순구배모델을 사용하였다.

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad (2)$$

여기서 k 와 ε 은 자기 난류운동에너지($k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$)와 그 소멸율을 나타낸다.

Mansour 등⁽¹²⁾이 Navier-Stokes방정식의 직접계산결과를 분석한 바에 따르면, 벽근처 영역에서는 Π_{ij} 에 포함된 압력확산의 영향과, 일반적으로 높은 레이놀즈수 영역에서 등방적이라고 가정되는 소멸항(ε_{ij})의 비등방성 역시 무시할 수 없다. 따라서, 본 연구에서는 낮은 레이놀즈수 영역에 대한 Π_{ij} 와 ε_{ij} 의 모델을 마련하기 위해, Shih와 Mansour⁽³⁾의 연구에서와 같이 Π_{ij} 와 ε_{ij} 를 묶어 다음과 같이 가정하였다.

$$\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} = (\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij})_1 + (\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij})_h \quad (3)$$

여기서 하첨자 1과 h 는 자기 낮은 레이놀즈수와 높은 레이놀즈수 모델을 의미한다. 낮은 레이놀즈수 모델은 참고문헌 3에서와 같이 다음과 같은 일반적인 형태로 가정하였다.

$$\begin{aligned} (\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij})_1 = & -f_w \frac{\varepsilon}{k} [a_{00} \delta_{ni} \delta_{nj} + a_0 \delta_{ij} + a_1 \overline{u_i u_j} \\ & + a_2 (\overline{u_i u_n} \delta_{nj} + \overline{u_j u_n} \delta_{ni}) \\ & + a_3 \overline{u_n^2} \delta_{ni} \delta_{nj} + a_4 \overline{u_n^2} \delta_{ij}] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker delta이고 첨자 n 은 벽면에 수직하는 방향을 나타낸다.

위 식에 포함된 계수들(a_{00}, a_0, a_1, \dots)을 결정하기 위해, 본 연구에서는 $\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}$ 의 벽근처 거동을 조사하였다. 우선, 변동속도성분 u, v, w (자기 유동방향, x , 벽에서 수직한 방향, y 및 폭방향, z

성분)를 벽에서의 값을 중심으로 한 Taylor급수로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= b_1 y + c_1 y^2 + d_1 y^3 + \dots \\ v &= c_2 y^2 + d_2 y^3 + \dots \\ w &= b_3 y + c_3 y^2 + d_3 y^3 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, 계수들 b_1, c_1 등은 x, z 와 시간의 함수이다. v 의 $O(y)$ 항은 벽면에서의 연속방정식을 만족하도록 소거되었다. 위 식들을 바탕으로 레이놀즈 응력성분들과 소멸율항을 급수형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{u^2} &= \overline{b_1^2} y^2 + 2\overline{b_1 c_1} y^3 + (\overline{c_1^2} + 2\overline{b_1 d_1}) y^4 + \dots \\ \overline{v^2} &= \overline{c_2^2} y^4 + \dots \\ \overline{w^2} &= \overline{b_3^2} y^2 + 2\overline{b_3 c_3} y^3 + (\overline{c_3^2} + 2\overline{b_3 d_3}) y^4 + \dots \\ \overline{uv} &= \overline{b_1 c_2} y^3 + (\overline{c_1 c_2} + \overline{b_1 d_2}) y^4 + \dots \\ k &= \frac{1}{2} (\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2}) y^2 + (\overline{b_1 c_1} + \overline{b_3 c_3}) y^3 + \dots \\ \varepsilon &= \nu (\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2}) + 4\nu (\overline{b_1 c_1} + \overline{b_3 c_3}) y + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

그리고, $\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}$ 의 각 성분들에 관한 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{11} - \varepsilon_{11} &= -2\nu \overline{b_1^2} + \dots \\ \Pi_{22} - \varepsilon_{22} &= -12\nu \overline{c_2^2} y^2 + \dots \\ \Pi_{33} - \varepsilon_{33} &= -2\nu \overline{b_3^2} + \dots \\ \Pi_{12} - \varepsilon_{12} &= -6\nu \overline{b_1 c_2} y + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

식(4)에 포함된 계수들은, 따라서, 각 항을 급수형태로 대체하고 양변의 최저차항의 계수가 같다는 조건으로부터 구해진다. $a_{00} = a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1$, 단, a_4 는 이 방식으로 구해지지 않으나 수치실험을 통해 $a_4 = 1$ 로 결정되었다. 따라서 최종적으로 낮은 레이놀즈수 모델은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\begin{aligned} (\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij})_1 = & -f_w \frac{\varepsilon}{k} \{ \overline{u_i u_j} + 2(\overline{u_i u_n} \delta_{jn} \\ & + \overline{u_j u_n} \delta_{in}) + \overline{u_n^2} \delta_{in} \delta_{jn} + \overline{u_n^2} \delta_{ij} \} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 함수 f_w 는 낮은 레이놀즈수 모델의 영향을 벽근처 영역으로 국한시키기 위해 다음과 같이 정하였다. $f_w = \exp[-(0.0088R_t)^2]$. 여기서, R_t 는 난류레이놀즈수로서 $R_t = k^2/\nu\varepsilon$ 으로 정의된다.

높은 레이놀즈수 모델로는 Gibson과 Launder⁽⁹⁾의 모델을 다음과 같이 수정하여 사용하였다.

$$(\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij})_h = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,3}$$

$$-\frac{2}{3}(1-f_w)\varepsilon\delta_{ij} \quad (9)$$

여기서

$$\Phi_{ij,1} = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k)$$

$$\Phi_{ij,2} = -c_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij,3} = & c_1' \frac{\varepsilon}{k} [\overline{u_n^2} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_n u_i} \delta_{nj} - \frac{3}{2} \overline{u_n u_j} \delta_{ni}] f \\ & + c_2' [\Phi_{nn,2} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ni,2} \delta_{nj} - \frac{3}{2} \Phi_{nj,2} \delta_{ni}] f \end{aligned}$$

$P = P_{ii}/2$ 이며 f 는 벽감쇠함수로 $f = c_\mu^{3/4} k^{3/2} / \chi n \varepsilon$ 로 정의된다. 여기서 $c_\mu^{1/2} = 0.26$ 이고 $\chi = 0.41$ 이다. 이 모델의 효과를 높은 레이놀즈수 영역에 국한시키기 위해 소멸율항에 대해서는 위 식에 나타난 바와 같이 $(1-f_w)$ 를 곱해 주었고, 모델상수 c_1 과 c_2 를 다음과 같이 수정하였다.

$$c_1 = c_1^\circ (1-f_w) \quad (10)$$

$$c_2 = c_2^\circ (1 - \exp[-(0.0044 R_t)^\alpha]) \quad (11)$$

난류운동에너지의 소멸율, ε 에 관한 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} [c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}] \\ & + c_{\varepsilon^1} P \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} - c_{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} + \Psi \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $\tilde{\varepsilon}$ 은 관계되는 항이 벽에서 영이 되도록 Hanjalic과 Launder⁽⁴⁾가 제시한 다음과 같은 식으로 정의하였다.

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left[\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_k} \right]^2 \quad (13)$$

그리고, Ψ 는 높은 레이놀즈수 모델에서 무시되는 gradient production항의 모델로서 Hanjalic과 Launder⁽⁴⁾가 제시한 다음과 같은 모델이 사용되었다.

$$\Psi = c_{\varepsilon^3} \nu \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_1} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_1} \quad (14)$$

여기서 모델상수 c_{ε^3} 로는 Kebede 등⁽⁵⁾이 제시한 0.3의 값을 사용하였다. 아울러, 모델상수 c_{ε^1} 은 다음과 같이 수정되었다.

$$c_{\varepsilon^1} = c_{\varepsilon^1}^\circ (1 - 0.23 f_w) \quad (15)$$

이상의 모델에서 사용된 모델상수들의 값은 Gibson과 Launder⁽⁹⁾에 의해 제시된 것과 같다.

$$\begin{aligned} c_1^\circ = 1.8, \quad c_2^\circ = 0.6, \quad c_1' = 0.5, \quad c_2' = 0.3, \\ c_{\varepsilon^1}^\circ = 1.45, \quad c_{\varepsilon^2} = 1.9, \quad c_s = 0.22, \quad c_\varepsilon = 0.18. \end{aligned}$$

3. 결과 및 검토

본 연구에서는 개발된 모델의 성능을 시험하기 위해 두 평판사이에서 완전히 발달된 유동을 수치 계산하여 그 결과를 Kim 등⁽¹⁰⁾이 수행한 Navier-Stokes 방정식의 직접계산(DNS)의 결과 및 Launder와 Shima⁽²⁾의 모델을 사용한 결과와 비교하였다. 중심선상의 최대평균속도와 유로의 반폭(half width), h 를 바탕으로 한 유동의 레이놀즈수는 3,300이며, 전단속도(u_τ)를 사용한 레이놀즈수는 180이다. 경계조건으로 벽에서는 ε 을 제외한 모든 변수들을 영으로 주었으며 ε 은 $\varepsilon = 2\nu (dk^{1/2}/dy)^2$ 이다. 대칭면에서는 $\overline{uv} = 0$ 이며 나머지 변수들의 구배는 모두 영이다.

전단속도로 무차원화된 root-mean-square 응력 성분들(u', v', w')의 벽근처 분포는 Fig. 1에 나타난 바와 같다. 본 모델의 결과는 Launder와

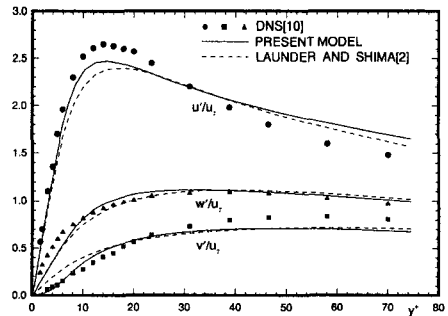


Fig. 1 Turbulent normal stresses

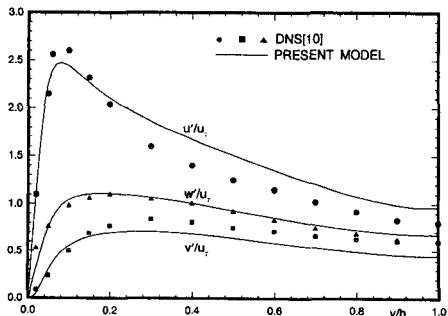


Fig. 2 Turbulent normal stresses

Shima⁽²⁾의 모델에 의한 결과에 비해 직접계산(DNS)의 결과에 잘 접근한다. Fig. 2는 전유동영역에서의 분포를 보여주는데, 직접계산의 결과와는 달리 v' 와 w' 의 차이가 중심부에서 크게 나타난다. 벽감쇠함수 f 를 계산함에 있어 단순히 두 벽면의 효과를 중첩하는 Launder 등⁽⁸⁾의 방식은 유동 중심부에서의 f 값을 상당히 크게 계산하기 때문에 이러한 차이가 생겨난다. $\overline{v^2} - \overline{w^2}$ 에 관한 방정식을 세워 보면 $f=0$ 일 경우에만 중심선상에서 $\overline{v^2}$ 과 $\overline{w^2}$ 의 값이 일치하게 된다. 따라서 f 계산방식의 수정이 필요할 것으로 사료된다. Fig. 3과 4는 전단 응력의 분포를 보여주는데, 직접 계산의 결과와 매

우 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 5는 본 모델에 의해 계산된 평균속도분포 역시 벽근처 영역에서 실험적인 벽법칙과 잘 일치하고 있음을 보여준다.

Fig. 6에서 10까지는 응력방정식들과 난류운동에너지 방정식에서 전단속도와 동점성계수로 무차원화된 각 항의 크기를 비교하고 있다. $\overline{u^2}$ 방정식에 대한 Fig. 6에서 $\Pi_{11} - \epsilon_{11}$ 을 제외한 나머지 항들의 경향은 Mansour 등⁽¹²⁾이 분석한 직접계산치의 경

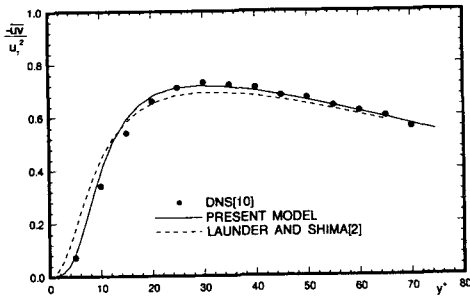


Fig. 3 Turbulent shear stress

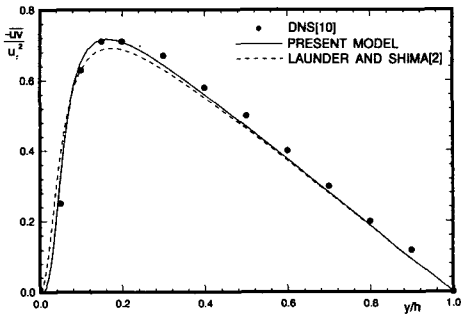


Fig. 4 Turbulent shear stress

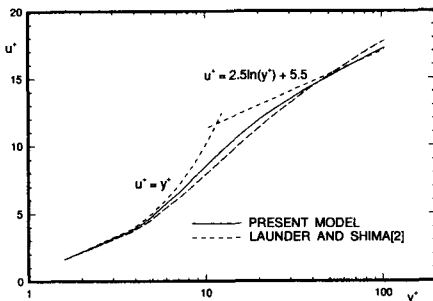


Fig. 5 Mean velocity

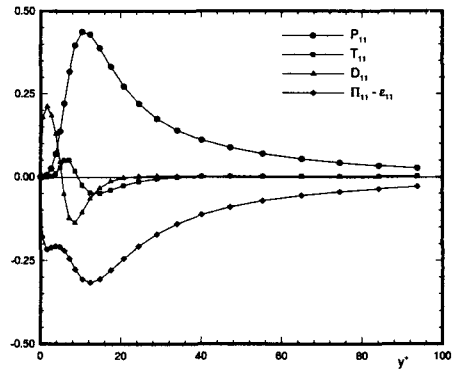


Fig. 6 Terms in budget of $\overline{u^2}$

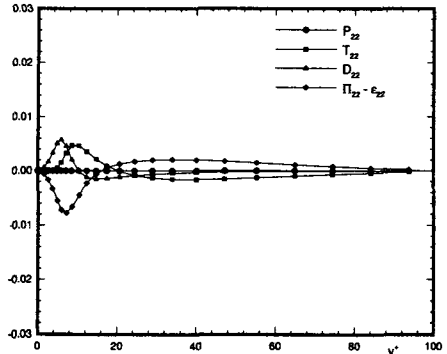


Fig. 7 Terms in budget of $\overline{v^2}$

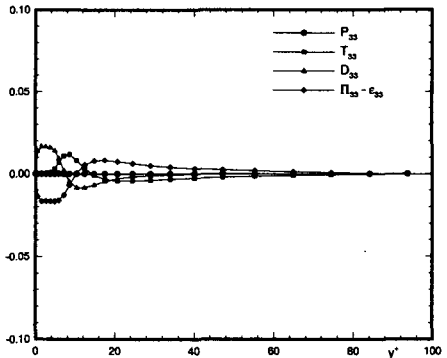


Fig. 8 Terms in budget of $\overline{w^2}$

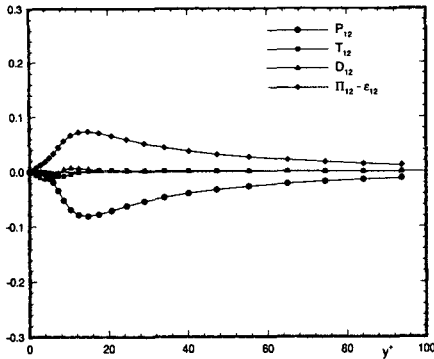


Fig. 9 Terms in budget of \overline{uv}

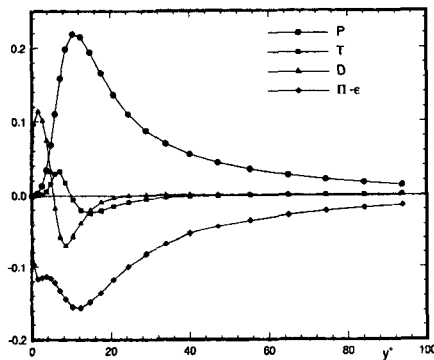


Fig. 10 Terms in budget of k

향과 잘 일치하고 있다. 그러나, 직접계산에서는 $\Pi_{11}-\epsilon_{11}$ 의 최대치가 벽에 위치하고 있으나 본 모델에 의한 결과는 최대치가 $y^+ (=u_{\tau}y/\nu) \approx 14$ 에서 발생함을 보여준다. 반면에, 전단응력 \overline{uv} 의 방정식에서는(Fig. 9) 모든 항의 경향이 직접계산결과⁽¹²⁾의 경향과 잘 일치한다.

Fig. 10은 난류운동에너지 방정식내 각 항의 크기를 보여준다. 여기서, 생성항과 점성확산항의 경향과 크기는 직접계산결과와 잘 일치한다. 난류확산항의 경향은 옳으나 최소치의 크기가 직접계산결과와 비교해 다소 작게 나타난다. $\Pi-\epsilon$ 은 앞에서 언급한 $\Pi_{11}-\epsilon_{11}$ 과 같이 벽에서 최대치가 발생하지 않는다는 문제점을 갖는다.

4. 결 론

본 연구에서는 Gibson과 Launder에 의해 제시된 레이놀즈응력모델을 벽근처의 낮은 레이놀즈수 영역까지 확장하였다. 본 연구에서 개발한 모델은

각 성분들의 크기를 예측함에 있어 Navier-Stokes 방정식의 직접계산결과와 비교해 Launder와 Shima의 모델보다 벽근처 영역에서 좋은 결과를 보여주고 있다. 응력방정식내 각 항의 거동은 직접계산의 결과와 대체적으로 잘 일치하고 있으나, 난류운동에너지 소멸율의 최대치가 직접계산의 결과와는 달리 벽에 위치하지 않는다.

참고문헌

- (1) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G., 1985, "Turbulence Models for Near-Wall and Low-Reynolds Number Flows, A Review," AIAA Journal, Vol. 23, pp. 1308~1319.
- (2) Launder, B. E. and Shima, N., 1989, "Second-Moment Closure for the Near-Wall Sublayer," AIAA Journal, Vol. 27, pp. 1319~1325.
- (3) Shih, T. H. and Mansour, N. N., 1990, "Modeling of Near-Wall Turbulence," Engineering Turbulence Modeling and Experiments, Elsevier Science Publishing Co., pp. 13~22.
- (4) Hanjalic, K. and Launder, B. E., 1976, "Contribution Towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 74, pp. 539~619.
- (5) Kebede, W., Launder, B. E. and Younis, B. A., 1984, "Large Amplitude Periodic Pipe Flow," Proceedins of the 5th Symposium on Turbulent Shear Flows, Cornell Univ., pp. 16-23~16-29.
- (6) Shima, N., 1988, "A Reynolds-Stress Model for Near-Wall and Low-Reynolds-Number Regions," Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, pp. 38~44.
- (7) Lai, Y. G., and So, R. M. C., 1990, "On Near-Wall Turbulent Flow Modelling," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 221, pp. 641~673.
- (8) Launder, B. E., Reece, G. L., and Rodi, W., 1975, "Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 68, pp. 537~566.
- (9) Gibson, M. M. and Launder, B. B., 1978, "Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 86, pp. 491~511.

- (10) Kim, J., Moin, P., and Moser, R., 1987, "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low-Reynolds-Number," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 177, pp. 133~186.
- (11) Daly, B. J., and Harlow, F. M., 1970, "Transport Equations in Turbulence," *The Physics of Fluids*, Vol. 13, pp. 2634~2649.
- (12) Mansour, N. N., Kim, J., and Moin, P., 1988, "Reynolds-Stress and Dissipation-Rate Budgets in a Turbulent Channel Flow," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 192, pp. 15~44.