

〈論 文〉

HYBRID기법과 QUICKER기법 : 공동 유동의 계산 특성 비교

조성호* · 강인준** · 박승오***

(1993년 1월 28일 접수)

HYBRID Scheme vs. QUICKER Scheme : Comparison Based on Lid-driven Cavity flow Computations

Seong-Ho Cho, In-Jun Kang and Seung-O Park

Key Words : HYBRID Scheme(HYBRID 기법), QUICKER scheme(QUICKER 기법), Lid-driven cavity flow(공동흐름), Computational efficiency (계산효율)

Abstract

The numerical diffusion arising from streamline-to-grid skewness produces a deteriorating effect on the numerical accuracy. The QUICKER scheme to reduce the numerical diffusion requires more computational effort than the HYBRID scheme. This paper deals with the relative computational efficiencies of adopting QUICKER scheme with a coarser grid system and of adopting HYBRID scheme with a denser grid system. Laminar driven cavity flow with $Re=400, 1000$ is used as a test problem. It is found that QUICKER scheme with a coarser grid system is more efficient than the HYBRID scheme with a denser grid system.

기 호 설 명

A : 제어체적의 표면적
 B, a : 연계계수
 C_i : i 번째 격자면을 통과하는 유량
 CV : 제어체적의 면적
 D : 대류항
 F : 확산항
 L : 정사각형 공동의 한변의 길이
 M_i^+, M_i^- : C_i 의 방향 표시자
 P : 정압력
 S : 원천항
 U, V : 평균속도
 Re : 레이놀즈수

Pe : Peclet수
 $\Delta x, \Delta y$: 격자간격
 Γ : 확산계수
 ϕ : 일반 종속변수
 ρ : 밀도
 ν : 층류 동점성계수

하첨자

E, W, N, S : 주위격자점
 P : 관심격자점
 e, w, n, s : 제어체적의 각 방향 격자면
 w : 벽면

*한국과학기술원 항공우주공학과

** (주) 삼성중공업 대덕종합기술원

***정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

1. 서 론

현재까지 Navier-Stokes방정식의 해를 구하기

위한 수치기법에 대하여 많은 연구가 진행되어 왔다.^(1,2) 이러한 수치기법들은 크게 유선함수-와도 방법(stream function-vorticity formulation)과 속도-압력 방법(velocity-pressure formulation)으로 분류할 수 있는데, 유선함수-와도 방법은 3차원으로의 확장이 곤란하여 사용빈도가 많지 않은 상황이다. 비압축성 유동 해석에 있어 속도-압력 방법은 속도와 압력을 압력 푸아송 방정식(pressure poisson equation: PPE)으로 연계시키거나 SIMPLE 기법으로 연계시키는데 SIMPLE 계통의 연계기법이 많이 사용되고 있다.

지배방정식의 대류항(convection term)을 어떻게 이산화하느냐에 따라 여러가지 수치기법이 개발되었다. 그들 중에서 1차의 수치 정확성(numerical accuracy)을 갖는 HYBRID 방법,⁽³⁾ 2차의 수치 정확성을 갖는 SOU(second order upwind)방법⁽⁴⁾과 3차의 수치 정확성을 갖는 QUICK방법⁽⁵⁾등이 대표적으로 사용되고 있다. 일반적으로 유동과 격자의 경사점(skewness)에 따라 수치적인 확산(numerical diffusion)문제가 발생하여 동일한 격자계에서는 HYBRID기법보다는 SOU방법이나 QUICK방법이 보다 정확한 것으로 알려져 있다. 그러나 QUICK기법의 경우, 해를 얻는데 소요되는 계산시간이 HYBRID기법에 비해 상당히 큰 편이어서 우리는 다음과 같은 의문을 갖게 된다. 격자수를 늘려서 HYBRID방법을 사용하는 것과, 작은 격자수에서 QUICK방법을 사용하는 것 중에서 어느 방법이 효과적인가에 대한 의문이다.

따라서, 본 연구에서는 속도-압력 연계방법으로는 SIMPLE기법을 적용하고, 비균일 격자계에서도 사용할 수 있는 QUICKER방법⁽⁶⁾과 함께 HYBRID방법을 이용하여 이와 같은 물음에 대한 대답을 구하고자 하였다. 이를 위하여 수치적 실험을 위한 흐름으로 본 연구에서 선택한 정사각형 공동 흐름(square cavity flow)은 재순환 유동의 수치적 해법을 위한 표준유동으로 많이 사용되어 왔으며, 대한기계학회 전산유체분과에서도 여러 수치기법을 비교평가 하기 위한 흐름으로 채택된 적이 있는 흐름이다.⁽⁷⁾

2. 지배방정식과 수치기법

2.1 지배방정식

2차원 비압축성 층류 정상유동을 지배하는 방정

식을 직각좌표계(cartesian coordinate)에서 표시하면 다음과 같다.

연속방정식 :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) = 0 \quad (1)$$

운동량방정식 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) = & -\frac{\partial P}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial y}\right) + S_u \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2) = & -\frac{\partial P}{\partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial y}\right) + S_v \quad (3) \end{aligned}$$

윗 식에서 U, V 는 x, y 방향의 평균속도를 의미하고, ρ 는 밀도, P 는 압력을 나타내며, S_u, S_v 는 원천항을 나타낸다. 비압축성 유동의 경우 연속방정식에 의해 S_u, S_v 는 모두 영이 된다. (2)와 (3)식으로 표현된 운동량 방정식은 다음과 같은 일반적인 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V \phi) = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S_\phi \quad (4) \end{aligned}$$

ϕ 는 관심을 갖는 일반적인 종속변수를 의미하고, Γ_ϕ 는 ϕ 에 대한 확산계수를 나타낸다. 본 연구에서는 압력장의 zig-zag현상을 방지하기 위하여 엇갈림 격자계(staggered grid system)를 이용하였다.⁽⁸⁾ 위의 식을 엇갈린 격자점간의 제어 체적에 대해 적분을 수행하면 다음과 같은 유한차분 근사식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \left\{ \rho U \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\}_e A_e^* - \left\{ \rho U \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\}_w A_w^* \\ + \left\{ \rho V \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\}_n A_n^* \\ - \left\{ \rho V \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\}_s A_s^* = S_\phi CV_\phi^* \quad (5) \end{aligned}$$

윗 식에서 A 는 4방향의 격자점 사이의 중간지점에 위치한 제어체적의 표면적을 나타내고, CV 는 관심점 P 를 포함하는 제어체적의 면적을 나타낸다. (5)식을 각각의 수치기법에 따라 대류항과 확산항을 차분하여 표시하면, 구하고자 하는 관심격자점의 종속변수값(ϕ_p)은 주위 격자점의 연계계수(a)와 변수값(ϕ)의 곱의 형태로 표시할 수 있다.

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_p \quad (6)$$

2.1 HYBRID 기법

Patankar⁽³⁾에 의해 제안된 HYBRID기법은 중앙차분(central difference)기법과 Upwind기법이 혼용되어 구성되어 있는 수치기법이라고 할 수 있다. Fig. 1에 나타낸 제어체적의 경계면(control surface)에서 확산량(diffusion flux : D)을 표시하면 다음과 같다.

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y_c}{\Delta x_e}, D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y_c}{\Delta x_w},$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x_c}{\Delta y_n}, D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x_c}{\Delta y_s} \quad (7)$$

또한, 제어체적의 경계면을 통과하는 대류량(convective flux : F)은 아래와 같이 표시된다.

$$F_e = (\rho U)_e \Delta y_c, F_w = (\rho U)_w \Delta y_c,$$

$$F_n = (\rho V)_n \Delta x_c, F_s = (\rho V)_s \Delta x_c \quad (8)$$

위의 대류량과 확산량의 비를 표시하는 격자 Peclet수를 아래와 같이 정의한다.

$$Pe_e = \frac{F_e}{D_e}, Pe_w = \frac{F_w}{D_w},$$

$$Pe_n = \frac{F_n}{D_n}, Pe_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (9)$$

HYBRID기법은 $-2 < Pe < 2$ 인 경우에는 중앙차분기법을 이용하여 대류항을 차분하고, $Pe > 2$ 이거나 $Pe < -2$ 일 경우에는 Upwind차분기법을 이용하여 대류항을 차분하는 것으로 구성된다. 위의 과정을 통하여 (6)식의 유한 차분방식에 나타낸 연계계수를 Patankar의 표현방식에 따라 나타내면 다음과 같다.

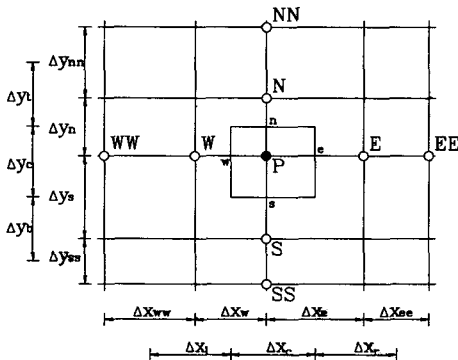


Fig. 1 Nine-Point configuration and length definition of a non uniform rectangular grid system

$$a_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\|,$$

$$a_W = \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\|,$$

$$a_N = \left\| -F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0 \right\|,$$

$$a_S = \left\| F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0 \right\|$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (10)$$

여기에서 $\| \cdot \|$ 는 포함된 요소의 최대값을 의미한다.

2.2 QUICKER기법

흐름의 방향(flow direction)이 계산에서 사용되는 격자선과 평행을 유지하지 못하고 큰 각도로 엇갈려(skewed) 있는 경우에 유선과 격자선 사이의 엇갈림(skewness)으로 인하여 상당한 크기의 수치적 확산(numerical diffusion)이 발생하며 이는 수치계산결과와 정확도에 큰 영향을 미친다고 알려져 있다.⁽⁸⁾

Leonard⁽⁶⁾는 수치확산을 억제하고 고차의 정확도를 갖는 차분방법으로서 QUICK(Quadratic Interpolation for Convection Kinematics)을 제안하였다. 이는 제어체적의 경계면에서 종속변수 ϕ 의 값을 결정할 때 상류방향의 3점 가중식 2차 내삽(three point upstream weighted quadratic interpolation)방식을 사용하는 방법으로서 ϕ 의 분포가 관심점 주위에 Fig. 2와 같이 주어진다면 경계면에서의 속도에 따라서 ϕ 값이 다음과 같이 결정된다.

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{8}(\phi_W + \phi_E - 2\phi_P)$$

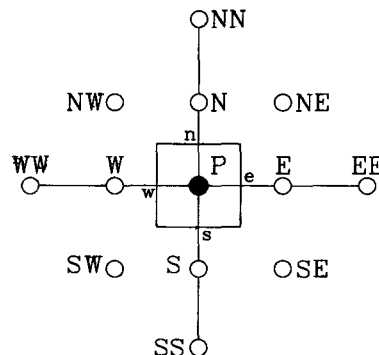


Fig. 2 Nine point configuration for the QUICK scheme

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{24}(\phi_{NE} + \phi_{SE} - 2\phi_E) \quad \text{if } U_e \geq 0 \\
 \phi_e = & \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{8}(\phi_{EK} + \phi_P - 2\phi_E) \\
 & + \frac{1}{24}(\phi_N + \phi_S - 2\phi_P) \quad \text{if } U_e < 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

위의 표현은 2차원 균일 격자계에서 9점 형상에 적용되며 이는 중앙차분식의 표현방법에 대류속도의 영향에 따른 곡률 수정항을 부가한 형태로 해석되며 우변의 마지막 항인 횡방향의 곡률 수정은 그 영향이 작다고 가정하여 무시할 수 있다.

이와같이 결정된 제어체적 경계면에서의 ϕ 값 ϕ_e , ϕ_w , ϕ_n , ϕ_s 등을 가지고 중앙차분식으로 표현된 확산항과 함께 (5)식을 다시 표현하면 관심점 P 에 대한 ϕ 값은 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_P = \frac{B_E^* \phi_E + B_W^* \phi_W + B_N^* \phi_N + B_S^* \phi_S + S_a^*}{B_P^* - S_P^*} \quad (12)$$

여기에서 S 는 원천항을 표시하고 B 는 각 경계면에서 대류, 확산 등에 의해서 결정되는 영향계수로서 내삽방법에 따라서 그 표현방법이 결정된다. 그러나 QUICK과 같은 고차의 정확도를 갖는 차분방식을 이용하면 대류의 영향이 매우 강할 때 영향계수 B 가 음의 값을 갖는 경우가 발생하여 반복적 계산으로 수치해를 얻는 과정에서 안정된 해를 얻을 수가 없다. 따라서 위의식의 B 값을 항상 양의 값으로 유지해 주기 위하여 Pollard와 Siu⁽⁹⁾가 QUICKER라는 연산방법(algorithm)을 제안하였다. 그러나 Pollard와 Siu가 제안한 QUICKER방법은 단지 균일한 직각 좌표계에 대해서만 표현되어 있기 때문에 Koo와 Park⁽⁶⁾은 일반적인 비균일 직각 좌표계에 적합한 QUICKER의 표현식을 제안하였다. Fig. 2와 같은 비균일 직각 좌표계에 대해 Leonard의 QUICKER방법을 적용하면 경계면 e 에서의 ϕ 값 ϕ_e 는 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned}
 \phi_e = & \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) - \frac{\Delta x_e^2}{8}(\text{CURVN}_e) \\
 & + \frac{\Delta y_e^2}{24}(\text{CURVT}_e)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \text{CURVN}_e = & \text{CURVN}(P), \\
 \text{CURVT}_e = & \text{CURVT}(P) \quad \text{if } U_e \geq 0 \\
 \text{CURVN}_e = & \text{CURVN}(E), \\
 \text{CURVT}_e = & \text{CURVT}(E) \quad \text{if } U_e < 0 \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서 CURVN과 CURVT는 각각 경계면에 수

직인 방향과 평행한 방향으로 ϕ 분포가 갖는 곡률을 표시한다. 위의 식은 균일한 격자계에서 표현하면 (11)식으로 주어진 ϕ_e 값과 같다. 일반적으로 경계면에 평행한 방향으로의 곡률이 작다고 가정하여 CURVT의 영향이 생략된 (13)식을 이용해서 각 경계면에서의 ϕ 값을 결정하여 제어체적에 적분된 형태의 일반적인 전달방정식 (5)식에 대입하고 Pollard와 Siu의 QUICKER법과 비슷한 방법으로 적절한 수학적 조작(mathematical manipulation)을 가하여 (12)식의 영향계수 B_E, B_W, B_S 와 B_N 가 항상 양의(positive) 값을 갖도록 표현할 수가 있는데 이는 각각

$$\begin{aligned}
 B_E = & M_e^+ \left\{ D_e + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x_e}{4\Delta x_{ee}} \right) C_e \right\} \\
 & + M_e^- \left\{ D_e - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x_e}{4\Delta x_{ee}} \right) C_e \right\} \\
 & - M_w^- \frac{\Delta x_w^2}{\Delta x_c \Delta x_e} \frac{C_w}{8} \\
 B_W = & M_w^+ \left\{ D_w + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x_w}{4\Delta x_{ww}} \right) C_w \right\} \\
 & + M_w^- \left\{ D_w - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x_w}{4\Delta x_{ww}} \right) C_w \right\} \\
 & + M_e^+ \frac{\Delta x_e^2}{\Delta x_c \Delta x_w} \frac{C_e}{8} \\
 B_N = & M_n^+ \left\{ D_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta y_n}{4\Delta y_{nn}} \right) C_n \right\} \\
 & + M_n^- \left\{ D_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta y_n}{4\Delta y_{nn}} \right) C_n \right\} \\
 & - M_s^- \frac{\Delta y_s^2}{\Delta y_c \Delta y_n} \frac{C_s}{8} \\
 B_S = & M_s^+ \left\{ D_s + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta y_s}{4\Delta y_{ss}} \right) C_s \right\} \\
 & + M_s^- \left\{ D_s - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta y_s}{4\Delta y_{ss}} \right) C_s \right\} \\
 & + M_n^- \frac{\Delta y_n^2}{\Delta y_c \Delta y_s} \frac{C_n}{8} \\
 B_P = & B_E + B_W + B_N + B_S
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 M_i^+ = & \frac{C_i + |C_i|}{2C_i}, \\
 M_i^- = & \frac{C_i - |C_i|}{2C_i}, \quad i = e, w, n, s \quad (14)
 \end{aligned}$$

로 표현되며, 원천항은

$$\begin{aligned}
 S_a^* = & S^* + \frac{1}{8} \left\{ M_e^- \frac{\Delta x_e^2}{\Delta x_r \Delta x_{ee}} C_e \phi_{EE} \right. \\
 & \left. - M_w^+ \frac{\Delta x_w^2}{\Delta x_l \Delta x_{ww}} C_w \phi_{WW} \right\} + \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ M_n^- \frac{\Delta y_n^2}{\Delta y_i \Delta y_{nn}} C_n \phi_{NN} \right. \\
 & - M_s^+ \frac{\Delta y_s^2}{\Delta y_b \Delta y_{ss}} C_s \phi_{SS} \left. \right\} \\
 & - M_e^+ \left\{ 1 + \frac{\Delta x_e}{8} \left(\frac{2}{\Delta y_{ee}} - \frac{1}{\Delta x_c} \right) \right\} C_e \phi_E \\
 & + M_w^+ \left\{ 1 + \frac{\Delta x_w}{8} \left(\frac{2}{\Delta x_{ww}} - \frac{1}{\Delta x_c} \right) \right\} C_w \phi_W \\
 & - M_n^+ \left\{ 1 + \frac{\Delta y_n}{8} \left(\frac{2}{\Delta y_{nn}} - \frac{1}{\Delta y_c} \right) \right\} C_n \phi_N \\
 & + M_s^- \left\{ 1 + \frac{\Delta y_s}{8} \left(\frac{2}{\Delta y_{ss}} - \frac{1}{\Delta y_c} \right) \right\} C_s \phi_S \\
 S_B^* = & M_e^+ \frac{\Delta x_e}{4} \left(\frac{1}{\Delta x_{ee}} - \frac{1}{\Delta x_w} \right) C_e \\
 & - M_e^- \left\{ 1 + \frac{\Delta x_e}{8} \left(\frac{2}{\Delta x_{ee}} - \frac{1}{\Delta x_r} \right) \right\} C_e \\
 & + M_w^+ \left\{ 1 + \frac{\Delta x_w}{8} \left(\frac{2}{\Delta x_{ww}} - \frac{1}{\Delta x_1} \right) \right\} C_w \\
 & - M_w^- \frac{\Delta x_w}{4} \left(\frac{1}{\Delta x_{ww}} - \frac{1}{\Delta x_e} \right) C_w \\
 & + M_n^+ \frac{\Delta y_n}{4} \left(\frac{1}{\Delta y_{nn}} - \frac{1}{\Delta y_s} \right) C_n \\
 & - M_n^- \left\{ 1 + \frac{\Delta y_n}{8} \left(\frac{2}{\Delta y_{nn}} - \frac{1}{\Delta y_t} \right) \right\} C_n \\
 & + M_s^+ \left\{ 1 + \frac{\Delta y_s}{8} \left(\frac{2}{\Delta y_{ss}} - \frac{1}{\Delta y_b} \right) \right\} C_s \\
 & - M_s^- \frac{\Delta y_s}{4} \left(\frac{1}{\Delta y_{ss}} - \frac{1}{\Delta y_n} \right) C_s \\
 & - \frac{1}{8} \left\{ M_w^- \frac{\Delta x_w^2}{\Delta x_c \Delta x_e} C_w - M_e^+ \frac{\Delta x_e^2}{\Delta x_c \Delta x_w} C_e \right. \\
 & \left. + M_s^- \frac{\Delta y_s^2}{\Delta y_c \Delta y_n} C_s - M_n^+ \frac{\Delta y_n^2}{\Delta y_c \Delta y_s} C_n \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

과 같이 표현된다. 수렴속도가 느려지더라도 안정된 해를 확보하기 위하여 (12)식의 원천항을 다음과 같이 선형화시킨다.⁽⁹⁾

$$\begin{aligned}
 S_a^* &= S_a^* + S_B^* \phi_B^* \\
 S_B^* &= 0 \quad (16)
 \end{aligned}$$

이때 ϕ_B^* 는 이전 단계의 계산값을 의미한다. (14)식의 영향계수에 관한 표현은 비균일 직각 좌표계에서 대류량과 확산량의 상대적인 크기에 관계없이 항상 양의 값을 나타낸다.

본 연구에서는 HYBRID방법과 QUICKER방법에 따라서 (6)식과 (12)식을 구성하였고, 이를 TDMA를 사용하여 수치계산을 수행하였다.

3. 계산결과 및 고찰

정사각형 또는 직사각형 공동 내의 흐름은 그 기

하학적 형태가 단순하고 유동의 경계조건을 설정하기가 쉬운 장점을 가지고 있으나, 그 내부의 유동장은 강한 재순환 영역을 형성하고 있어서, 유선의 변화가 매우 심하고, 이에 따라 유선과 계산격자간의 심한 엇갈림으로 인하여 큰 값의 수치적 확산 오차가 발생한다고 알려져 있다. 따라서 현재까지도 정확한 해라고 규정된 실험적 결과나 수치적 계산등은 찾아 볼 수가 없으나, 많은 연구자들은 이 흐름에 대한 계산을 수행하고 물리적인 현상을 비교함으로써 수치적 방법의 정확성, 안정성등을 검증하고 있다. 본 연구에서는 특별히 Ghia⁽¹⁰⁾등이 레이놀즈수 400과 1000인 경우에 129*129의 비교적 많은 격자에서 유선함수-와도 기술방법을 적용하여 계산한 결과를 기준으로 설정하였다. 정사각형 공동내의 흐름은 윗 벽의 운동으로 인해서 공동 내부에 유동장이 형성되며, 흐름의 성질을 결정하는 요소는 윗벽의 움직임에 기준으로 하는 레이놀즈수, $Re_w = U_w L / \nu$ 이다. 따라서 두가지 레이놀즈수 400과 1000을 선택하여 정사각형 공동내의 흐름에 대하여 수치계산을 수행하였다. 계산에 이용된 격자는 Fig. 3에 나타낸 21*21의 비균일격자계를 기본으로 구성한 후, 기본격자계를 이등분하여 41*41의 비균일 격자계를 구성하고 마찬가지로 방법으로 81*81격자계와 161*161격자계를 구성하여 사용하였다.

우선 비균일 격자계와 균일 격자계 사이의 계산 성능시험을 위하여 레이놀즈수 400인 경우, 21*21의 격자수를 균일하게 분포시킨 격자계와 비균일하

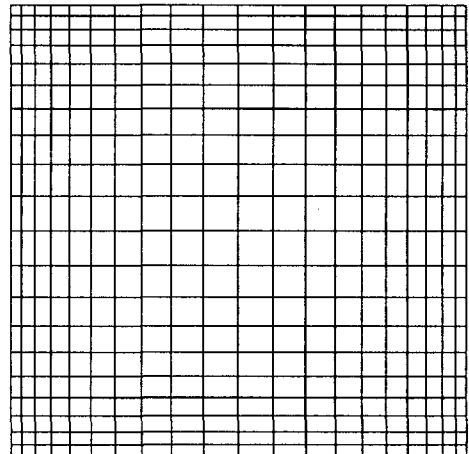


Fig. 3 Standard grid system (21*21)

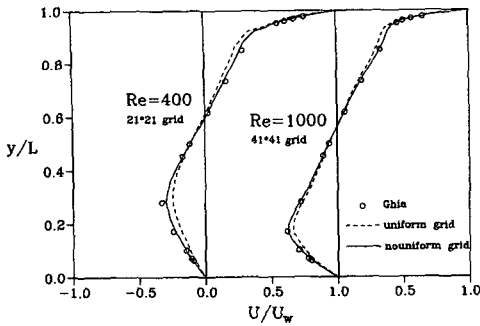


Fig. 4 Comparison of u velocity along vertical line through geometric center with various grid system

계 분포시킨 격자계에서 HYBRID방법과 QUICKER방법을 적용하여 계산을 수행하였다. 마찬가지로 방법으로 레이놀즈수 1000인 경우에도 41*41의 격자수를 적용하여 수치계산을 수행한 결과 Fig. 4에 보인 바와 같이 계산기법에 관계없이 공동중앙선에서의 U 속도분포는 균일격자계에서 얻은 해보다 비균일격자계에서 얻은 해가 Ghia의 엄밀해에 근접함을 볼 수 있다. 이는 공동흐름의 특성상 윗벽의 움직임으로 인하여 흐름이 유도되므로 윗벽 쪽으로 격자를 밀집하여 구성된 비균일 격자계가 전체흐름 예측에 효과적임을 나타낸다고 할 수 있다. 이러한 균일격자계와 비균일격자계에서의 U 속도분포의 차이는 격자수를 증가시킴에 따라 점차 감소한다.

비균일 격자계에서 격자수의 증가에 따른 U 속도형상을 수치기법과 레이놀즈수에 따라 Fig. 5에 나타내었다. 공동 중앙선에서의 U 속도형상은 격자수를 증가시킴에 따라 수치기법에 관계없이 Ghia의 엄밀해에 근접함을 알 수 있다. 또한 HYBRID기법을 적용할 경우, U 속도형상은 수치적 확산의 영향을 극명하게 보여준다. Fig. 5에 보여진 공동중앙선에서의 U 속도형상으로부터 QUICKER방법의 계산은 제한된 격자에서도 충분히 정확한 해를 도출할 수가 있음을 알 수 있다. 이러한 결과로부터 QUICKER방법은 절단오차(tuncation error) 또는 유동과 격자간의 엇갈림에 의한 부정확성이 다른 방법에 비해 작다는 것을 알 수 있다. 또한 레이놀즈수가 낮을 때에는 수치기법에 따른 계산 결과의 차이가 크지 않으나 레이놀즈수가 높아질수록 그 차이가 더 커지고, 높은 레이놀즈수에서 QUICKER방법의 정확성이 뚜렷하게 보여진다.

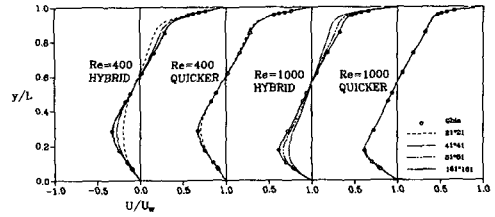
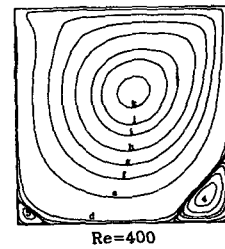
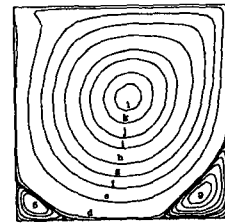


Fig. 5 Comparison of u velocity along vertical line through geometric center with various grid number



Re=400



Re=1000

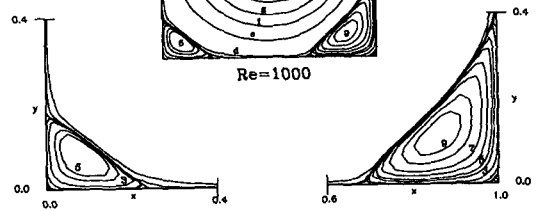


Fig. 6 Comparison of streamline pattern for primary, second, and corner vortex

Fig. 6에서는 QUICKER방법(41*41)에 의한 유선분포를 나타낸 것인데, 비교적 적은 격자수(41*41)에서도 QUICKER방법은 주 와(primary vortex) 뿐만이 아니라 구석 와(corner vortex)도 정확히 묘사함을 알 수 있다. 여기서 유선수준(stream function level)은 Ghia⁽¹⁰⁾가 제시한 값을 그대로 사용하였다.

수렴조건(convergence criteria)으로는 $\frac{4P}{\rho U_w^2}$ 을 계산하여 1×10^{-12} 보다 작아지는 경우를 생각하여

수렴된 것으로 판단하였다. 계산방법(HYBRID, QUICKER)에 관계없이 이완계수는 U, V 운동량방정식에서 0.5로 정의하였고, 압력보정방정식에서는 0.8로 정의하였다. HYBRID해법과 QUICKER해법의 1회 반복계산시간은 QUICKER해법의 경우가 HYBRID해법보다 2.375배만큼 더 소요됨을 확인하였다. 이는 QUICKER해법은 비균일 격자계로 인하여 HYBRID해법보다 연결계수와 원천항을 구하는데 많은 계산량을 필요로 함을 의미한다. 그러나 균일 격자계에서 사용되는 QUICKER해법은 주위격자점간의 길이비가 모두 1이고 많은 계산과정을 축약하여 사용하므로 비균일격자계에서의 QUICKER해법보다 계산시간을 줄일 수 있다.

Ghia의 결과를 기준으로 하여 오차수준(error level)을 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{error} = \frac{U_{\text{present}} - U_{\text{Ghia}}}{U_w} \quad (17)$$

Fig. 7, Fig. 8는 앞에서 밝힌 수렴조건에 따라 해가 수렴하기 까지 걸린 계산시간(CPU time)과 (17) 식으로 얻을 수 있는 오차수준에서의 최대오차를 각각의 격자수와 수치방법에 따라 나타낸 것이다. 이를 살펴보면 비균일격자계에서는 같은 오차수준을 갖는 결과를 얻으려면 격자 수를 증가시켜 HYBRID기법을 이용하는 것 보다 적은 격자수에서 QUICKER방법을 사용하는 것이 계산시간과 오차수준의 측면에서 효율적임을 알 수 있다. 이러한

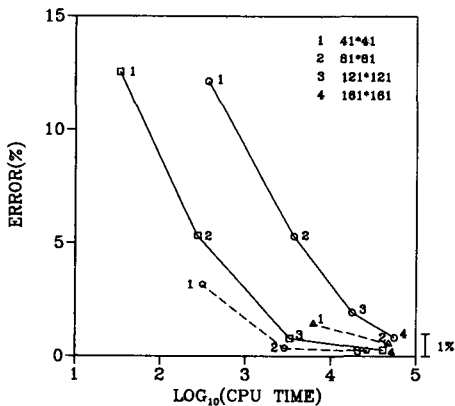


Fig. 7 Performance chart for various schemes and various grid number in nonuniform grid system
 (○:HYBRID Re=1000 △:QUICKER Re=1000
 □:HYBRID Re=400 ◇:QUICKER Re=400)

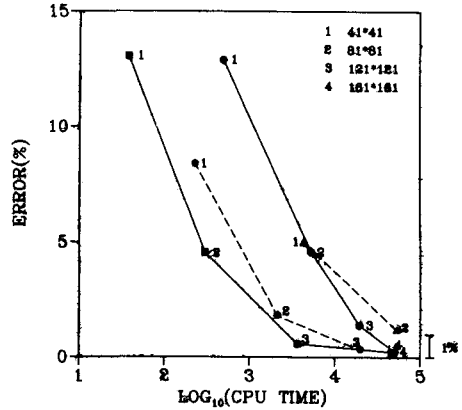


Fig. 8 Performance chart for various schemes and various grid number in uniform grid system
 (●:HYBRID Re=1000 ▲:QUICKER Re=1000
 ■:HYBRID Re=400 ●:QUICKER Re=400)

효과는 레이놀즈수가 커짐에 따라 더 강하게 나타남을 알 수 있다. 또한 균일격자계에서는 많은 격자수에서 HYBRID기법을 이용하는 것이나 적은 격자 수에서 QUICKER방법을 사용하는 것 모두 레이놀즈수에 관계없이 효율성이 비슷하게 나타남을 알 수 있다. 따라서 흐름의 특성에 맞추어 비균일 격자계를 구성하여 QUICKER방법을 적용하는 것이 수치적인 정확성과 계산시간면에서 효율적임을 알 수 있다.

4. 결 론

HYBRID기법과 QUICKER기법을 이용하여 정사각형 내의 공동흐름에 대하여 계산을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) HYBRID기법과 QUICKER기법은 격자수를 충분히 증가시킴에 따라 Ghia의 해에 근접한다.

(2) 비균일 격자계에서 같은 오차수준을 갖는 결과를 얻으려면 격자수를 증가시켜 HYBRID기법을 이용하는 것보다 적은 격자수에서 QUICKER기법을 사용하는 것이 훨씬 더 효과적임을 알 수 있었다.

(3) 따라서 재순환 영역등의 존재로 유선이 격자계와 엇갈림이 심한 유동장을 계산할 경우에 비균일 격자계를 적절히 구성하여 QUICKER기법을 사용하는 것이 타당함을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) Fletcher, C. A. J., 1988, "Computational Techniques for Fluid Dynamics," Vols. I and II, Springer-Verlag, New-York.
- (2) Hirsch, C. 1990, "Numerical Computation of Internal and External Flows," Vol. 2, Wiley, New-York.
- (3) Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere, Washington.
- (4) Vanka, S. P., 1987, "Second-order Upwind differencing in a Recirculating Flow," AIAA Journal, Vol. 25, No. 11, pp. 1435~1441.
- (5) Leonard, B. P., 1979, "A Stable and Accurate Convection Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation," Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 19, pp. 59~98.
- (6) Koo, H. M. and Park, S. O., 1992, "Prediction of Turbulent Offset Jet Flows with an Assessment of QUICKER Scheme," Int. Journal for Num. Methods in Fluids, Vol. 15, pp. 355~372.
- (7) 제2회 전산유체역학분과회 Workshop, "Numerical Simulation of Natural Convection in Square Cavity," 대한기계학회 열 및 유체역학부문
- (8) Raithby, G. D., 1976, "A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow," Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 9, pp. 75~103.
- (9) Pollard, A. and Siu, A. L. W., 1982, "The Calculation of Some Laminar Flows Using Various Discretization Schemes," Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 35, pp. 293~313.
- (10) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equation and a Multi Grid Method," Journal of Comput. Physics, Vol. 48, pp. 387~411.