

〈論 文〉

노음방법에 의해 정의된 소속함수를 사용한 퍼지계의 다목적 최적설계

이준배* · 이병채**
(1992년 10월 10일 접수)

Multi-objective Optimization of Fuzzy System Using Membership Functions Defined by Normed Method

Jun Bae Lee and Byung Chai Lee

Key Words : Fuzzy Programming(퍼지 계획법), Multi-objective Optimization(다목적 최적설계), Membership Function(소속 함수), Norm Method(노음 방법), Weighting Method(가중치 방법), Structural Optimization(구조 최적화)

Abstract

In this paper, a convenient scheme for solving multi-objective optimization problems including fuzzy information in both objective functions and constraints is presented. At first, a multi-objective problem is converted into single objective problem based on the norm method, and a membership function is constructed by selecting its type and providing the parameters defined by the norm method. Finally, this fuzzy programming problem is converted into an ordinary optimization problem which can be solved by usual nonlinear programming techniques. With this scheme, a designer can conveniently obtain pareto optimal solutions of a fuzzy system only by providing some parameters corresponding to the importance of the objective functions. Proposed scheme is simple and efficient in treating multi-objective fuzzy systems compared with and method by with membership function value is provided interactively. To show the validity of the scheme, a simple 3-bar truss example and optimal cutting problem are solved, and the results show that the scheme is very useful and easy to treat multi-objective fuzzy systems.

기 호 설 명

b_j : j 번째 제한조건 함수의 한계값
 D : 퍼지 설계영역
 d_p : L_p 노음에 기초한 거리함수
 d_j : j 번째 제한조건 함수의 가능 변화량
 f : 목적함수
 G_j : j 번째 제한조건 함수의 가능영역

g : 부등식 제한조건 함수
 h : 등식 제한조건 함수
 L_p : 노음이 정의된 공간
 p : 거리 함수에서 정의된 노음 계수
 S : 퍼지 가능 영역
 w : 가중치 계수
 X : 설계 변수
 α, β : 소속 함수의 계수
 λ : 설계만족도를 나타내는 설계변수

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과 대학원

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

- μ : 소속함수값
- ρ : 다목적 함수가 변화된 단일 목적함수값
- Λ : 제한조건을 만족하는 목적함수값의 집합
- Ω : 제한조건을 만족하는 설계변수의 집합

1. 서 론

공학시스템의 설계자가 추구하는 최상의 목적은 주어진 제한조건들을 만족시키면서 최적의 설계를 하는 것이다. 과거에는 경험이나 공식 또는 자료집 등을 이용하여 시행착오적인 반복과정을 통해 설계하는 방법을 주로 사용하여 왔다. 그러나, 이러한 설계 방법은 많은 인력과 시간이 소요되며 체계적이지 못할 뿐만 아니라 경제적인 설계에도 어려움이 많았다. 1960년대에 들어오면서 부터 대형 전산기가 출현한 이래로 이러한 문제점들을 해결하고 보다 효율적인 설계 최적화를 위해 수학적 계획법 (mathematical programming)에 의한 최적설계 연구가 널리 행해지게 되었다. 그러나, 실제 시스템에 있어서 제한조건들과 목적을 정확히 수학적으로 기술하는 것은 매우 어려운 일로, 표현방식이 가지고 있는 한계성으로 인해 부정확성 (inaccuracy) 의 문제가 발생하였다. 최적화기법적용에 있어서도 수학적이론이 가지는 한계점에 기인하는 불확실성의 처리가 불가능하였다. 이를 위해 통계적으로 유의수준 (significant level) 이나 확신도 (certainty) 등을 도입하기는 하지만, 이는 시스템 외부로부터 설정되기 때문에 평가에 쓰이는 척도가 시스템의 내적인 불확실성을 대변해 주지는 못한다. 따라서, 이 불확실성을 체계적으로 문제의 내부에 반영하여 모형에 포함시키고 불확실성을 동시에 추론하는 방법이 연구되어 왔다. 1965년 버클리 대학의 자데 (Lofti A. Zadeh) 교수에 의해 도입된 퍼지집합이론⁽¹⁾은 이같은 불확실성에 대한 필요성을 만족시킬 수 있는 가능성이 매우 높은 것으로 평가되어 수많은 분야에서 응용되어 오고 있다. 이는 통계적기법이 현실의 불확실성에 대해 임의성 (randomness)에서 기인한 것을 다루는데 비하여, 모호성 (vagueness) 즉, 퍼지정도 (fuzziness)에 기인한 불확실성의 문제를 포함하도록 기존의 이론을 확장한 것⁽²⁾으로 볼 수 있다.

퍼지이론의 구조문제에의 적용은 Blockly⁽³⁾와 Yao⁽⁴⁾에 의해 구조의 안정성을 평가하는데 사용되

었으며, 퍼지 구조 최적설계문제는 Yuan과 Quan⁽⁵⁾에 의해 고려되었다. Rao^(6,7)는 링크와 구조설계에 있어서 퍼지 다목적 최적설계 (fuzzy multiobjective optimum design) 문제를 간단한 구조물에 대하여 선형 소속함수 (linear membership function)을 가정하여 해를 구하였다.

최근의 진보된 구조 최적설계 프로그램은 많은 수의 설계변수와 제한조건을 처리할 수 있으며,⁽⁸⁾ 보통은 스칼라량의 목적함수를 주어진 가용 설계영역 (feasible region)에서 최적화하여 실제 구조물의 설계에 이용하고 있다. 그러나, 실질적인 구조설계 문제에서는 여러가지 상충되는 목적함수가 동시에 고려되어야 하는 경우가 대부분이다. 따라서, 무게와 같은 하나의 사항만을 최소화하는 일반적인 최적설계에서는 다른 사항들과의 복합적인 관계를 평가할 수 없고 결과적으로 최적인 설계를 보증할 수 없게 되므로, 다목적 최적설계 문제⁽⁹⁾가 요구된다. 1970년대 후반부터 본격적으로 개발되어온 다목적 최적설계 문제에 대한 접근 방법에는 가중치법이나 대화식법에 의해 파레토 최적해 (pareto optimal solution)를 구하는 방법등이 일반적으로 사용되고 있다. 또한, 설계자가 만족할 수 있는 설계목표를 미리 설정해 놓고 적절한 설계가 이루어질 때까지 반복하는 목적계획법 (goal programming)⁽¹⁰⁾도 많이 사용된다. 다목적 선형계획법 (multi-objective linear programming) 문제에서 퍼지 계획법 (Fuzzy programming)에 의한 접근은 Zimmermann⁽¹¹⁾에 의해 처음으로 소개되었다. 그는 다목적 최적설계 문제를 퍼지 선형 계획법에 의해 선형 소속함수를 사용하여 단일 목적 선형계획법 (single objective linear programming) 문제로 변환시키는 방법을 제시하였다. 그리고, 이후에 Leberling,⁽¹²⁾ Hannan⁽¹³⁾에 의해 더욱 발전되었다. 또한, Bellman과 Zadeh⁽¹⁴⁾는 선형 소속함수를 비롯하여 쌍곡선 함수, 부분 선형 소속함수를 사용하여 의사결정 문제에 있어서 동일한 선형계획법 문제가 존재함을 증명하였다.

본 논문에서는 기존의 가중치를 고려하지 않은 퍼지 다목적 최적화 문제를 확장하여, 먼저 설계영역에서 퍼지 제한조건에 대한 퍼지 가능 영역을 정의하고 이에 따라 제한조건들에 대한 소속함수를 구한다. 그리고, 각각의 목적함수를 일반적인 최적화 기법을 사용하여 최적해를 구하거나 설계자가 설정한 만족 설계점을 결정한 후 각각의 목적함수에 대한 소속함수를 결정한다. 그리고, 정해진 목

적함수간의 적절한 가중치를 사용하여 노움방법⁽¹⁵⁾에 의해 다목적 최적설계 문제를 단일함수 최적화 문제로 만든다. 이 전환된 단일목적함수에 대한 소속함수는 설계자가 선택한 형태에 의해 정의되며, 이를 이용해 일반적인 최적설계 문제로 전환한 후 해를 구한다. 이와같이 하면 퍼지 다목적 최적설계 문제에서 가중치를 사용자가 적절히 선택함으로써 원하는 파레토 최적해를 구할 수 있다. 실제로 간단한 트러스 문제와 절삭문제에 대하여 다목적 최적설계 문제의 예를 고찰하여 봄으로써 그 유용성과 효율성을 보였다.

2. 다목적 최적설계 및 파레토 최적해

대부분의 공학설계 문제는 본질적으로 몇개의 상충되는 목적함수를 가지게 되며, 여러개의 목적함수가 동시에 최적화의 대상이 될때의 다목적 최적화 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\max_{X \in \Omega} f(X) \quad (1)$$

여기서, 설계변수 X 는 가용 설계영역인 집합 $\Omega = \{X \in R^n | g(X) \leq 0, h(X) = 0\}$ 에 속하는 벡터이며, g, h 는 제한조건 함수들이다. 목적함수 $f: \Omega \rightarrow R^m$ 는 각각의 단일 목적함수로서 이루어진 벡터로서 $f(X) = \{f_1(X) f_2(X) \dots f_m(X)\}$ 로 주어지게 된다. 일반적으로 각각의 목적함수들은 다른 목적함수들과 동일한 단위를 가지고 있지 않다.

다목적 최적설계 문제에서는 일반적으로 모든 목적함수들을 동시에 최적화 시키는 해는 존재하지 않으므로 어떤 목적함수의 값을 개선하기 위해서는 적어도 다른 한가지의 목적함수의 값을 희생하지 않으면 안되는 해, 즉 파레토 최적해 (pareto optimal solution)를 구한다. 파레토 최적해 X^* 는 다음과 같이 정의된다. 즉, $X^* \in \Omega$ 에 대하여 $f_i(X) \leq f_i(X^*)$ ($i=1, 2, \dots, m$)이고 적어도 하나의 j 번째 목적함수에 대하여 $f_j(X) \leq f_j(X^*)$ 로 되는 $X \in \Omega$ 가 존재하지 않을때 X^* 를 파레토 최적해라 한다.

다목적 최적설계 문제에 대한 해법중에는 설계대상이 되는 목적함수간의 순위를 정하여 수행하는 순차적 최적화 방법과 설계자가 설계만족점을 미리 설정하여 놓고 이 설계점과의 차이를 반복과정에 의해 수정해나가 만족할 만한 결과에 도달하는 방법(goal programming) 등이 있으면, 본 논문에서

는 기존의 퍼지 최적설계문제가 다목적 함수벡터를 적당한 스칼라화 함수를 도입하여 단일 목적함수로 전환한 일종의 노움방법에 해당하므로, 이를 일반화 시키기 위하여 노움방법을 사용하기로 한다. 예를 들어, 각 목적함수에 적절한 가중치를 곱하여 단일 목적함수로 만들어 푸는 방법을 생각하면

$$\min_{X \in \Omega} w^T f(X) \quad (2)$$

의 선형 가중치를 사용한 문제가 되며, 여기서 w 는 가중치 벡터로 $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ 를 만족한다. 각 목적함수들의 단위가 다른 것을 고려하기 위해 다음과같은 정규화 형태를 사용한다.

$$f_i = \frac{f_i(X) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} \quad (3)$$

여기서, f_i^{\min}, f_i^{\max} 는 $f_i(X)$ 가 취할 수 있는 하한값과 상한값을 나타낸다. 선형 가중치를 사용한 문제는 본 논문에서 고려하는 다음과 같이 정의된 노움의 최소화에 의한 방법의 특수한 경우이다. 즉, L_p 노움에 기초한 거리 함수를

$$d_p(f^{id}, y) = \left(\sum_{i=1}^m |f_i^{id} - y_i|^p \right)^{1/p}, 1 \leq p \leq \infty \quad (4)$$

$$d_\infty(f^{id}, y) = \max_{i=1, \dots, m} |f_i^{id} - y_i| \quad (5)$$

로 정의하고, 각각의 목적함수를 최소화한 벡터

$$f^{id} = \left\{ \min_{X \in \Omega} f_1(X) \min_{X \in \Omega} f_2(X) \dots \min_{X \in \Omega} f_m(X) \right\} \quad (6)$$

를 구하여 기준점으로 잡으면 우리가 원하는 해는

$$\min_{f \in A} d_p(f, f^{id}) \quad (7)$$

의 문제로 부터 얻을 수 있다. 여기서 $A = \{f \in R^m | f(X), X \in \Omega\}$ 으로, 가용설계영역에 상응하는 목적함수값들의 집합을 나타낸다.

실제로는 많은 파레토 최적해를 얻기위해 가중치에 해당하는 계수 w 를 사용하며, 거리함수를 다음과 같이 수정하여 정의한다.

$$d_p(f; w) = \left[\sum_{i=1}^m (w_i |f_i - f_i^{id}|)^p \right]^{1/p}, 1 \leq p \leq \infty \quad (8)$$

$$d_\infty(f; w) = \max_{i=1, \dots, m} w_i |f_i - f_i^{id}| \quad (9)$$

p 의 값은 보통 1이나, 2가 적절한 것으로 알려져 있으며, p 가 1인 경우에는 위에서 언급한 선형 가중치 방법과 동일함을 알 수 있다. Fig. 1은 두

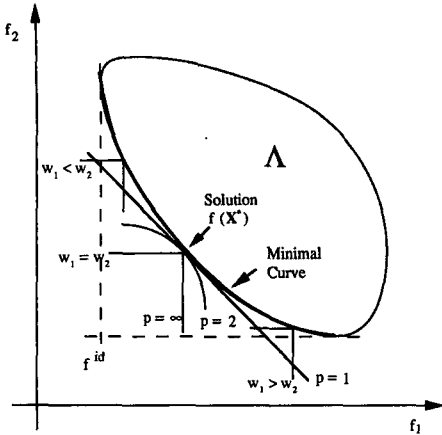


Fig. 1 Geometrical interpretation of norm methods

개의 목적함수가 존재하는 경우에 p 의 값과 w 값에 따르는 파레토 최적해를 나타낸 것이다. 이 방법을 사용하여 설계자는 적절한 계수들을 입력함으로써 원하는 파레토 최적해를 얻을 수 있다.

다음장에서 정의되는 퍼지 최적설계문제는 퍼지 가능설계영역에 대한 식(5)의 특수한 형태를 지니는 문제이다.

3. 퍼지 최적설계 문제

일반적으로 사용되는 스칼라 목적함수 최적화 방법은 모든 자료들이 정확하게 파악된 상태에서 목적함수가 잘 정의되어 있고, 제한조건의 한계값들과 각 계수들이 명확한 때에 사용된다. 구조물이나 기타 기계의 최적설계에 목적함수가 애매하게 기술되어 있는 경우와 사용되는 제한조건들의 대부분이 명확하지 않은 한계를 포함하고 있는 경우에는 퍼지 설계의 관점에서 기술하는 것이 보다 타당성 있는 설계라고 할 수 있겠다. 보통의 일반적인 구조 최적설계 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ \text{s.t. } g_j(X) \leq b_j, j=1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (10)$$

한편, 퍼지 최적설계 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ \text{s.t. } g_j(X) \in G_j, j=1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 파동형의 기호는 퍼지정보를 포함하고

있음을 나타낸다. G_j 는 제한 조건함수 g_j 의 가능영역을 나타낸다. 즉, d_j 를 g_j 가 변할 수 있는 가능한 변화량이라고 하면 가능영역 G_j 는

$$G_j = [-\infty, b_j + d_j] \quad (12)$$

가 된다. 또한, 모든 제한조건을 포함한 퍼지 가능영역은

$$\begin{aligned} S &= (G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k) \\ &= \bigcap_{j=1}^k G_j \end{aligned} \quad (13)$$

로 주어진다.

퍼지이론에서 소속함수(membership function) $\mu_A(X)$ 는 전체집합 Ω 에 있는 객체 X 가 집합 A 에 속해 있는가 그렇지 않은가를 나타내는 척도로서 $[0, 1]$ 의 값을 가진다. 목적함수에 대한 소속함수 $\mu_f(X)$ 는 설계자가 원하는 설계점에 대한 만족도를 표시하며, 초대만족설계치를 1로 하고, 가장 나쁜 경우를 0으로 표현한다. 예를들어, 선형함수인 경우에는

$$\mu_f(X) = \frac{f(X) - f^w}{f^{id} - f^w} \quad (14)$$

로 표현할 수 있으며, Fig. 2에 목적함수에 대한 선형 소속함수의 예가 나와있다. 여기서 각각 f^w , f^{id} 는 가장 나쁜 설계점과 가장 좋은 설계점을 나타낸다. 이들은 보통 설계자의 주관에 의해 결정되는데, Zimmermann⁽¹¹⁾은 다목적함수의 최적화에 의해 얻은 값에 대하여

$$\begin{aligned} f_i^{\min} &= \min_{X \in \Omega} f_i(X) \\ f_i^{\max} &= \max_j f_i(\bar{X}^j), j=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

로 정의하였다. 여기서, $X \in \Omega$ 이고, \bar{X}^j 는 각각

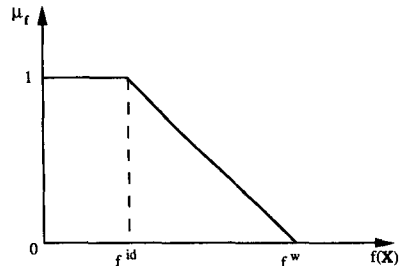


Fig. 2 Linear membership function of object function

목적함수를 최적화한 해를 의미한다. 소속함수는

$$\mu_{f_i}(X) = \begin{cases} 1 & \text{for } f_i(X) < f_i^{\min} \\ \frac{-f_i(X) + f_i^{\max}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} & \text{for } f_i^{\min} \leq f_i(X) \leq f_i^{\max} \\ 0 & \text{for } f_i(X) > f_i^{\max} \end{cases} \quad (16)$$

로 정의하였으며, 주로 이 소속함수가 실제로 많이 사용되고 있다.

제한조건에 관한 소속함수 $\mu_{g_j}(X)$ 는 각 제한조건에 설정된 한계값에 적절한 천이영역을 부여함으로써

$$\mu_{g_j}(X) = \begin{cases} 0 & \text{for } |g_j(X)| > b_j + d_j \\ 1 - \frac{|g_j(X)| - b_j}{d_j} & \text{for } b_j \leq |g_j(X)| \leq b_j + d_j \\ 1 & \text{for } |g_j(X)| < b_j \end{cases} \quad (17)$$

로 표현할 수 있으며, 여기서 d_j 는 j 번째 제한조건에서 적절히 선정된 한계값의 가능 변화영역이다. 예를들어 구조물의 한계응력의 값이 30이라 할 때, 이 값이 명확하지 않은 경우 d_j 의 값을 5정도로 주어 한계응력값에 융통성을 가지게 할 수 있다. Fig. 3에 g_j 의 상한값과 하한값에 따른 제한조건에 대한 소속함수의 예가 나와있다.

그 밖의 목적함수의 값이나 제한조건의 값에 사용되는 계수들이 값이 명확하지 않은 경우에는 이들 계수에 대한 소속함수 μ_r 을 정의함으로써 보다 타당성있는 설계를 할 수 있다. μ_r 은 자체로서 설계변수에 포함된다.

제한조건에 관한 소속함수 $\mu_{g_j}(X)$ 와 목적함수에 관한 소속함수 $\mu_f(X)$, 그리고 계수에 대한 소속함수 μ_r 에 의해 정해지는 퍼지 가용영역 S 에서의 퍼지 설계영역 D 는

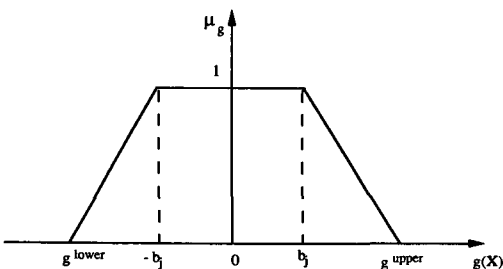


Fig. 3 Membership function of constraint

$$D = \{\mu_f(X)\} \cap \left\{ \bigcap_{j=1}^k \mu_{g_j}(X) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{l=1}^n \mu_{r_l} \right\} \quad (18)$$

가 된다. 그런데, 퍼지집합이론에서 두개 이상의 퍼지교집합은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mu_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A^n}(X) &= \mu_{A_1}(X) \wedge \mu_{A_2}(X) \wedge \dots \\ &\quad \wedge \mu_{A_n}(X) \\ &= \min \{ \mu_{A_1}(X), \mu_{A_2}(X), \dots, \\ &\quad \mu_{A_n}(X) \} \end{aligned} \quad (19)$$

따라서, 퍼지설계영역 D 로부터 최적해 X^* 는 다음을 만족시키는 해로부터 얻을 수 있다.

$$\mu_D(X^*) = \max \mu_D(X) \quad (20)$$

여기서

$$\mu_D(X) = \min \{ \mu_f(X), \mu_{g_1}(X), \dots, \mu_{g_k}(X) \} \quad (21)$$

이다.

다목적 최적설계 문제일때는 퍼지영역을 다음과 같이 정의함으로써 일반화될 수 있다.

$$D = \left\{ \bigcap_{i=1}^m \mu_{f_i}(X) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{j=1}^k \mu_{g_j}(X) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{l=1}^n \mu_{r_l} \right\} \quad (22)$$

여기서, $\mu_{f_i}(X)$ 와 $\mu_{g_j}(X)$, 그리고 μ_{r_l} 은 각각 i 번째 목적함수와 j 번째 제한조건 함수, 그리고 l 번째 계수에 관한 소속함수이다. 따라서, 최적해 X^* 는 식(20), (21)과 마찬가지로 주어지게 된다. 이제 식(20)과 (21)에 의해서 정의되는 퍼지 다목적 최적설계 문제는 max-min 문제로 여기서는 다음과 같은 동일한 비선형계획법으로 변환하여 해를 구한다. 즉, 만족도를 나타내는 $[0, 1]$ 의 값을 가지는 인공변수(artificial variable) λ 를 도입하여, 이를 최대화 하는 설계변수 X 를 결정하는 일반적인 최적설계 문제로 전환할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \text{s.t. } \lambda \leq \mu_{f_i}(X), \quad i=1, 2, \dots, m \\ \lambda \leq \mu_{g_j}(X), \quad j=1, 2, \dots, k \\ \lambda \leq \mu_{r_l}, \quad l=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (23)$$

이 문제는 단일목적 비선형계획법 문제로서 일반적인 비선형계획법의 해법을 이용하여 용이하게 풀 수 있다.

4. 가중치를 고려한 퍼지 다목적 최적설계

전술한 각각의 목적함수에 대한 소속함수들은 모

두 선형으로 정의되어 있으며, 사실상 정규화한 것에 지나지 않으므로 목적함수들간의 중요도는 소속함수들 간의 관계에 의해 임의로 결정된다. 즉, 목적함수들간의 중요도가 전혀 고려되어 있지 않으며, 하나의 파레토 해를 임의로 주게 된다. 또한, 제한조건이 나타내는 퍼지설계영역하에서 설계의 만족도를 극대화 시키는 식(20)을 고찰해보면, 결국 소속함수에 대한 거리함수를 최소화하는 것과 같음을 알 수 있다.

대화형 퍼지 의사결정방법에서는 의사결정자가 각 목적함수에 대하여 주관적으로 소속함수를 결정하여, 기준 소속함수값을 입력함으로써 확장된 최대-최소문제(max-min problem)를 풀어 가장 합당하다고 인정되는 해를 구하는 방법⁽¹⁶⁾을 사용한다. 그러나, 사실상 구조설계나 기계류의 최적설계문제에 있어서 적절한 소속함수값을 설계자가 입력하고 만족하는 해를 얻을 때까지 이들 값을 일일이 변화시켜가며 작업을 하는 것은 완벽한 퍼지계의 이해가 없는 거의 불가능하다. 따라서, 처음에 설계 만족치의 기준을 정해놓고 각 목적 함수간의 중요도를 고려하여 가중치를 입력시킴으로써 여러가지 파레토 최적해를 구하고 이들중에서 선택하는 것이 간단하면서 효과적인 방법이라고 할 수 있다. 따라서, 앞에서 제시한 노음방법에 의해서 다목적 설계문제를 단일목적 최적설계문제로 전환한후, 이 변환된 단일 목적함수에 대한 소속함수를 정의함으로써 가중치 변화에 따르는 다양한 퍼지 파레토 해를 구할 수 있다. 변환된 단일목적함수에 대한 소속함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_{\rho}(X) = \begin{cases} 0 & \text{for } \rho(X) > \rho^{\max} \\ \frac{-\rho(X) + \rho^{\max}}{\rho^{\max} - \rho^{\min}} & \text{for } \rho^{\min} < \rho(X) \leq \rho^{\max} \\ 1 & \text{for } \rho(X) \leq \rho^{\min} \end{cases} \quad (24)$$

여기서,

$$\rho(X) = [\sum_{i=1}^m \{w_i (f_i(X) - f_i^{\min})\}^p]^{1/p} \quad (25)$$

$$\rho^{\max} = [\sum_{i=1}^m \{w_i (f_i^{\max} - f_i^{\min})\}^p]^{1/p} \quad (26)$$

$$\rho^{\min} = 0 \quad (27)$$

를 사용한다. 식(3)의 정규화된 목적함수의 형태를 사용하면, $\rho^{\min} < \rho(X) \leq \rho^{\max}$ 에서 소속함수는

$$\mu_{\rho}(X) = -\frac{[\sum_{i=1}^m \{w_i \tilde{f}_i(X)\}^p]^{1/p}}{(\sum_{i=1}^m w_i^p)^{1/p}} + 1 \quad (28)$$

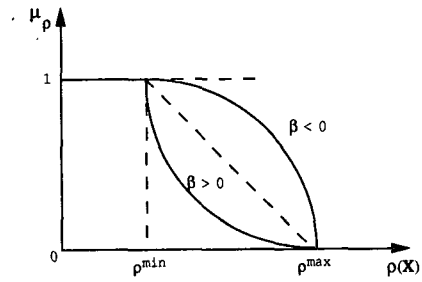


Fig. 4 Exponential membership function of object function

의 형태로되며, 이는 퍼지 설계영역에 대하여 식(20)의 일반화된 형태이다. 선형소속함수 이외에 많이 쓰이는 지수함수 형태의 소속함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mu_{\rho}(X) = a[1 - \exp(-\beta(\rho(X) - \rho^{\max})/(\rho^{\min} - \rho^{\max}))] \quad (29)$$

여기서, $a = 1/(1 - \exp(-\beta))$ 이며, α, β 는 $\rho(X)$ 의 값을 하나 지정해 줌으로써 결정되고, Fig. 4에 그 형태가 나와있다. 보통 $\mu_{\rho}(X) = 0.5$ 일때의 값을 사용한다. 이제 $\mu_{\rho}(X)$ 로 정의되는 소속함수를 사용하여, 식(23)에서 $\mu_{f_i}(X)$ 를 $\mu_{\rho}(X)$ 로 대체하여 해를 구하면, 가중치에 따른 여러가지 퍼지 파레토 최적해를 구할 수 있다.

이들 가중치 계수를 포함한 소속함수를 사용하면 선형 소속함수외에 이차함수, 로그함수, 지수함수, 쌍곡선함수 등의 비선형 소속함수로 사용하여 해를 구한 결과와 동일한 효과를 설계자의 의도에 의해서 정해지는 가중치값으로 조절할 수 있으므로, 복잡한 비선형형태의 소속함수를 쓰지 않아도 퍼지계의 파레토 최적해를 구할 수 있다.

5. 수치 예제 및 고찰

Fig. 5와 같이 구조 최적 설계 문제에서 많이 인 용되는 3개의 막대로 이루어진 트러스 문제를 고찰 하였다. 목적함수로는 중량과 수직방향의 변위를 선택하였고, 하중 P , 길이 H , 탄성계수 E 의 값을 모두 1로하여 계산을 간단화하였다. 결과의 비교를 위하여 제한조건의 한계값에 대한 가능 변화량 d_j 를 Rao⁽⁶⁾가 사용한 수치들 그대로 사용하였으며 그 값들은 Table 1에 나타나 있다. 이는 한 계치의 20%에 해당하는 수치이다. 설계변수는 각

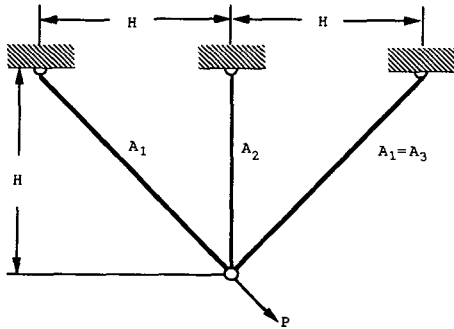


Fig. 5 A Example of 3-Bar truss problem

Table 1 The distance of boundary movement

	σ_1^u, σ_2^u	σ_3^l	A_1^u, A_2^u	A_1^l, A_2^l
Limit value	20.0	15.0	5.0	0.1
Admissible variation	4.0	3.0	1.0	0.02

트러스의 단면적 A_i 로 하였으며, $A_1=A_3$ 으로 놓아 대칭구조로 하였다. 이 문제에 있어서 보통의 다목적 최적설계 문제는 다음과 같다. 즉, 벡터 $X=[A_1 A_2]^T$ 라 하면

$$\min\{f_1(X) f_2(X)\} \tag{30}$$

$$\text{s.t. } \sigma_1 \leq \sigma^u \tag{31}$$

$$\sigma_2 \leq \sigma^u \tag{32}$$

$$\sigma_3 \leq \sigma^l \tag{33}$$

$$A_i^u \geq A_i \geq A_i^l \tag{34}$$

의 문제이며, 여기서

$$f_1(X) = 2\sqrt{2}A_1 + A_2 \tag{35}$$

$$f_2(X) = \frac{PH}{E} \left[\frac{1}{A_1 + \sqrt{2}A_2} \right] \tag{36}$$

이고, σ_i ($i=1, 2, 3$)는 i 번째 막대에 걸리는 응력므로

$$\sigma_1(X) = P \left(\frac{A_2 + \sqrt{2}A_1}{\sqrt{2}A_1^2 + 2A_1A_2} \right) \tag{37}$$

$$\sigma_2(X) = P \left(\frac{1}{\sqrt{2}A_2 + A_1} \right) \tag{38}$$

$$\sigma_3(X) = -P \left(\frac{A_2}{\sqrt{2}A_1^2 + 2A_1A_2} \right) \tag{39}$$

이며, σ^u 과 σ^l , A^u 과 A^l 은 각각 응력과 단면적의 상한값과 하한값을 나타낸다. 각각의 단일 목적함수에 대한 최적해를 구하면 $X^*=[0.7871, 0.4074]^T$,

$X_2^*=[5.0, 5.0]^T$ 이고, 따라서 $f_1^{min}=2.6335$, $f_1^{max}=19.1421$, $f_2^{min}=1.6569$, $f_2^{max}=14.6719$ 로 설정한다. 최적설계 알고리즘은 반복 이차 계획법 (recursive quadratic programming-RQP)⁽¹⁸⁾ 알고리즘을 사용하였다. 이 값들을 이용하여 각각의 목적함수에 대한 소속함수를 구하면 다음과 같다.

$$\mu_{f_1}(X) = \begin{cases} 0 & \text{for } f_1(X) > 19.1421 \\ \frac{-f_1(X) + 19.1421}{16.5086} & \text{for } 2.6335 \leq f_1(X) \leq 19.1421 \\ 1 & \text{for } f_1(X) < 2.6335 \end{cases} \tag{40}$$

$$\mu_{f_2}(X) = \begin{cases} 0 & \text{for } f_2(X) > 14.6719 \\ \frac{-f_2(X) + 14.6719}{13.0151} & \text{for } 1.6568 \leq f_2(X) \leq 14.6719 \\ 1 & \text{for } f_2(X) < 1.6568 \end{cases} \tag{41}$$

각 제한조건에 대한 소속함수들은 식(17)에 의해서 정의된다. 따라서, 퍼지 최적설계 문제는 $X=[\lambda A_1 A_2]^T$ 일때 다음과 같이 설계만족도 λ 를 최대 로 하는 일반적인 최적설계 문제로 전환된다.

$$\max \lambda \tag{42}$$

$$\text{s.t. } \lambda \leq \mu_{f_i}(X), i=1, 2 \tag{43}$$

$$\lambda \leq \mu_{g_j}(X), j=1, 2, \dots, 7 \tag{44}$$

이 문제의 해를 구하면⁽¹⁶⁾ $\lambda^*=0.8488$, $A_1^*=0.5792$, $A_2^*=3.4917$, $f_1^*=5.1300$, $f_2^*=3.6250$ 으로 이는 최적의 설계점에서의 목적함수값과 제한조건의 한계값에 퍼지정보가 있을때 얻을 수 있는 퍼지 최적해임을 의미한다.

이제 같은 문제를 식(28)에 나타난 소속함수를 사용하여 다시 고려하면, $\mu_{f_i}(X)$ 는 $\mu_p(X)$ 로 대체된다. 선형소속함수를 사용하여 Table 2, 3, 4에 각각 $p=\infty, 1, 2$ 인 경우에 가중치를 변화시켜 얻은 퍼지 파레토해의 일부를 수록하였다. 또한, 이를 각각 Fig. 6, 7, 8에 그래프로 나타내었다. $p=\infty$ 이고 가중치가 서로 같은 경우의 결과를 보면, $\lambda^*=0.893$, $A_1^*=0.5792$, $A_2^*=3.4917$, $f_1^*=5.1320$, $f_2^*=3.6231$ 로 가중치를 고려하지 않고 일반적인 최적설계문제로 전환한 경우와 일치함을 알 수 있다. 따라서, 설계자가 이 해에 만족하지 못했을 경우에도 이 방법을 사용하면 여러가지 다른 파레토 최적해를 얻어 가장 적절한 파레토해를 선택할 수 있음을 알 수 있다. $p=1$ 인 경우와 $p=2$ 인 경우는 거의 같은 경향을 나타내었고, 가중치의 변화에 따

Table 2 Pareto optimal solutions with $p=\infty$ and linear membership function

w_1	λ^*	A_1^*	A_2^*	$f_1^*(X)$	$f_2^*(X)$
1.0	0.9997	0.7840	0.4214	2.6409	14.4640
0.8	0.9428	0.5729	2.2034	3.8238	5.4215
0.6	0.8715	0.5738	3.0568	4.6818	4.0820
0.5	0.8493	0.5792	3.4917	5.1320	3.6231
0.4	0.8749	0.5888	3.8799	5.6473	3.2154
0.2	0.9290	0.7418	5.0000	7.1002	2.5590
0.0	0.9999	5.0000	5.0000	19.1421	1.6569

Table 3 Pareto optimal solutions with $p=1$ and linear membership function

w_1	λ^*	A_1^*	A_2^*	$f_1^*(X)$	$f_2^*(X)$
1.0	0.9997	0.7840	0.4214	2.6409	14.4640
0.8	0.8880	0.5779	1.8413	3.4777	6.2801
0.6	0.8512	0.5709	3.0156	4.6325	4.1335
0.5	0.8493	0.5838	3.0812	5.4544	3.3544
0.4	0.8582	0.5959	4.7887	6.4760	2.7134
0.2	0.8923	0.6015	5.0000	6.7032	2.6057
0.0	0.9999	5.0000	5.0000	19.1421	1.6569

Table 4 Pareto optimal solutions with $p=2$ and linear membership function

w_1	λ^*	A_1^*	A_2^*	$f_1^*(X)$	$f_2^*(X)$
1.0	0.9997	0.7840	0.4214	2.6409	14.4640
0.8	0.9024	0.5704	2.0688	3.6842	5.7159
0.6	0.8540	0.5715	3.0303	4.6489	4.1153
0.5	0.8490	0.5804	3.5718	5.2155	3.5500
0.4	0.8581	0.5897	4.1947	5.8647	3.0652
0.2	0.9073	0.6031	5.0000	6.7077	2.6052
0.0	0.9999	5.0000	5.0000	19.1421	1.6569

라 약간 다른 파레토 해를 줌을 알 수 있었다. 이 경우는 $p=\infty$ 인 경우에 비하여 계산도 간단하므로 이미 알려진대로 $p=1$ 또는 $p=2$ 만으로도 실제 설계에 사용할 수 있는 유용한 파레토해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 결과적으로 변위의 감소는 무게의 증가를 무게의 감소는 변위의 증가를 초래하

므로, 설계자는 변위와 무게의 동시 최적화에 대한 설계방향과 그 수치를 이들 파레토해를 통해 얻을 수 있다.

다음에는 절삭공구에 의한 재료의 가공 최적화에 관한 문제로, 주어진 작업환경하에서 최소의 가공 비용 혹은 최대 생산량등을 얻기 위하여 절삭인자인

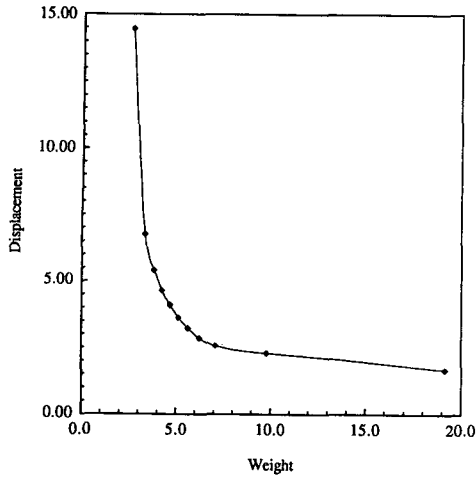


Fig. 6 Minimal curve in criterion space with $p=\infty$

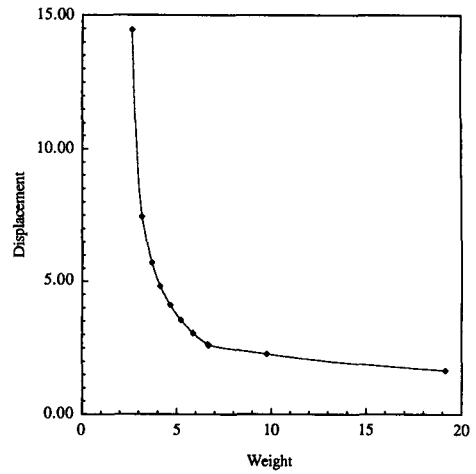


Fig. 8 Minimal curve in criterion space with $p=2$

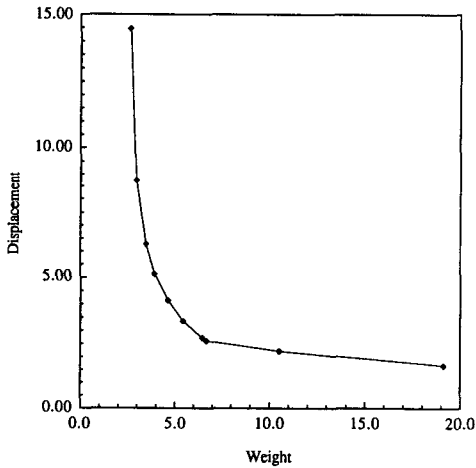


Fig. 7 Minimal curve in criterion space with $p=1$

이송(feed)과 절삭속도(cutting velocity)를 결정하는 문제이다. 실제 최적 가공조건은 생산목표에 따라 다르게 나타낼 수 있으며, 그 각각에 대해 서로 다른 목적함수가 도입되어야 한다. 그 대표적인 것으로는 능률대비 최소비용기준(minimum unit material removal cost), 최소 생산 비용기준(minimum production cost), 최대 생산률 기준(maximum production rate), 수명등이 있으며, 이 밖에 감가상각비용, 준비비용 등도 고려되어야 하지만 이런 항들은 결과에 큰 영향을 주지않고 다른 항목에 포함될 수 있으므로 여기서는 고려하지 않는다. 목적함수는 다음의 세가지로 결정한다.

최소 생산비용은

$$f_1(X) = c_1(t_m + t_c \frac{t_m}{T}) + c_2 \frac{t_m}{T} \quad (45)$$

능률대비 최소비용은

$$f_2(X) = \{c_1(t_m + t_c \frac{t_m}{T}) + c_2 \frac{t_m}{T}\} / (1000 X_1 X_2) \quad (46)$$

수명 T는

$$f_3(X) = w_0 / \{K_t \sqrt{X_2} \exp(-Q/R\theta) + K_m (P_m/H_t) X_2\} \quad (47)$$

여기서, K_t, K_m 은 열적, 기계적 마멸계수로 실험치로부터 결정되며, c_1 은 작업자 비용, c_2 는 공구비용, t_c 는 공구교환 시간, $t_m = \pi D L / 1000 X_1 X_2$ 은 순수가공 시간, w_0 는 공구수명 상수, Q 는 공구 끝에 작용하는 에너지, R 은 공기상수, H_t 는 특정 온도에서의 공구경도, P_m 은 가동 동력을 나타내고, Table 5에 그 값이 정리되어 있다. 비교를 위해 문헌(19)의 수치를 사용하였다. X_1 은 이송, X_2 는 절삭속도를 나타낸다.

제한조건은 다음과 같다.

$$P \leq P_c, P_c = F X_2 \quad (48)$$

$$\theta \leq \theta_c, \theta_c = F D / 2 \quad (49)$$

$$F \leq F_c \quad (50)$$

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u, (i=1, 2) \quad (51)$$

여기서, 식(48)은 동력제한, (49)는 절삭온도제한, (50)는 절삭력 제한조건을 나타낸다. 절삭력과

Table 5 Constants and relation for cutting problem

Operator cost per time	$c_1=50[\text{won}/\text{min}]$
Tool cost per time	$c_2=1000[\text{won}/\text{min}]$
Tool changing time per edge	$t_c=1.0[\text{min}/\text{edge}]$
Workpiece diameter	$D=100[\text{mm}]$
Workpiece length	$L=200[\text{mm}]$
Tool life criterion	$w_0=0.3[\text{mm}]$
Power constraint	$P_c=150[\text{kgf m}/\text{s}]$
Torque constraint	$T_c=5000[\text{kgf m}]$
Force constraint	$F_c=70[\text{kgf}]$
Technical feed constraint	$X_1=0.4[\text{mm}/\text{rev}]$
Technical cutting speed constraint	$X_2=300[\text{m}/\text{min}]$
Tool hardness at temperature at T	$H_t=75.5(T/293.3)^{-0.05}$
Activation energy for tool tip	$Q=84.5e3[\text{Kcal}/\text{mol}]$
Universal gas constant	$R=1.973[\text{kcal}/\text{mol}^\circ\text{K}]$

Table 6 Pareto optimal solutions with $p=1$ for cutting problem

w_1	w_2	w_3	feed	velocity	f_1	$f_2 \times 10^3$	$10^3/f_3$
1	1	1	0.272	23.59	568.32	88.43	7.74
1	1	2	0.266	18.10	734.39	152.67	5.93
1	1	4	0.261	15.00	885.75	226.42	4.90
1	2	1	0.275	26.30	513.38	71.01	8.64
1	4	1	0.277	29.18	466.52	57.65	9.60
2	1	1	0.281	32.20	425.25	47.08	10.60
4	1	1	0.288	43.61	325.35	25.87	14.40

절삭온도 모델은 문헌(19)에서와 같이 다음과 같은 모델을 사용한다.

$$F = kX_1^a X_2^b \tag{52}$$

$$\theta = hX_1^c X_2^d \tag{53}$$

여기서, $k=243.3$, $a=0.78$, $b=-0.072$, $h=252.9$, $c=0.148$, $d=0.276$ 이다.

목적함수들에 대한 소속함수를 결정하기 위해, 여기서도 각각의 목적함수를 최적화한 값(171.82, 4.49, 4.87)을 설계만족도 1.0으로 정하였고, 각 경우에서 가장 나쁜 설계점(4617.0, 6156.0, 61.1)을 만족도 0.0으로 설정하였다. 식(48)에서 (51)에 해당하는 제한조건에 관한 소속함수는 변환가능량을 10%로 주어 선형소속함수를 만들었다. 열적, 기계적 마멸계수에 대해서도 계수에 대한 소속함수

를 설정하여, 실험치의 평균인 $K_t=2.361 \times 10^{-4}$, $K_m=7.169 \times 10^{13}$ 에 대하여 변환가능량을 10%로 주어 이들 계수에 대한 부정확성에 대해서도 일부 고려하여 보았다.

$p=1$ 인 경우에 대하여 Table 6에 몇개의 경우에 대한 퍼지 파레토해가 정리되어있다. 각각의 가중치는 상대적인 비를 나타낸다. 또한, Fig. 9, 10, 11에 3차원 그래프를 각각의 목적함수에 대해 한쪽의 가중치를 변화시켜가면서 고찰한 결과가 도시되어 있다. 여기서, 그래프에 표시되지 않은 목적함수의 가중치는 표시된 두 개의 목적함수중에서 가중치가 작은쪽의 크기와 같다. Table 6에서 가중치의 비율이 4:1:1인 경우의 결과에서 볼 수 있듯이, 최소생산비용의 관점에서 이를 낮추려고 하면 절삭속도가 더욱 크게 요구되어 공구의 수명이 감소하는

결과를 보이고 있으며, 이 결과로부터 추론하여 반대로 최대 생산의 관점에서 본다면 높은 절삭속도를 취하여 공구의 수명감소를 생산량 증대로 보상하려는 경향을 보여준다고 할 수 있다. 능률대비 최소비용은 최소생산비용과는 거의 비슷한 경향을 보이고 있다.

그러므로, 절삭속도와 이송의 증가는 가공시간을 줄이고 결과적으로 가공비용을 줄이는 방향이지만 이는 공구의 수명을 단축시켜 공구비용의 증가를

초래하므로, 설계자는 기존의 방법과는 달리 이들 목적함수에 대해 적절한 가중치를 결정함으로써, 만족할 만한 설계점을 찾을 수 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

구조물 및 기계류의 최적설계에 여러개의 목적함수가 존재하고, 각 목적함수와 제한조건에 퍼지 정보가 포함되어 있을 경우에, 각 목적함수에 대한 설계만족치에 대한 경계를 설정하고 거리함수로 정의된 노옴의 계수와 가중치를 사용하여 소속함수를 정의함으로써 여러가지 퍼지 파레토 최적해를 얻어 낼 수 있는 방법을 제안하였다. 이 방법은 노옴방법에 의해 정의된 단일목적함수를 직접 소속함수에 사용함으로써 설계자가 단순히 각 목적함수에 대한 가중치만을 고려하여 주지만 하면 되는 효율적인 방법이다.

실제로 간단한 트러스 구조물에 대한 예제와 절삭가공 최적화에 대한 문제를 풀었으며, 그 결과 각각의 목적함수에 대해 단순히 정규화한 소속함수를 사용하여 최적해를 구하는 것은 본 논문에서 정의한 소속함수를 사용하는 경우의 특수한 경우임을 확인할 수 있었다. 또한, 가중치 변화에 따르는 여러가지 퍼지 파레토 최적해를 얻어냄으로써 설계자가 이들 파레토 해들 중에서 목적에 가장 합당한 설계치를 선정할 수 있음을 알 수 있다.

서로 상충되는 목적함수와 이들과의 독립적인 목적함수가 존재하는 경우에는 부분가중법(partial weighting method)을 사용하여 소속함수를 정의하고 이에 대한 파레토 최적해를 구하는 방법이 사용될 수 있을 것이다.

참고문헌

- (1) Zadeh, L. A., 1965, "Fuzzy Sets," Information and Control, Vol. 8, pp. 338~353.
- (2) Zadeh, L. A., 1973, "Outline of a New Approach to the Analyses of Complex Systems and Decision Process," IEEE Trans. on Sys., Man and Cybernetics, SMC-3, pp. 28~44.
- (3) Blockley, D. I., 1978, "Analysis of Subjective Assessments of Structural Failures," Int. J. Man-Machine Studies, Vol. 10, pp. 185~195.
- (4) Brown, C. B. and Yao J. T. P., 1983, "Fuzzy

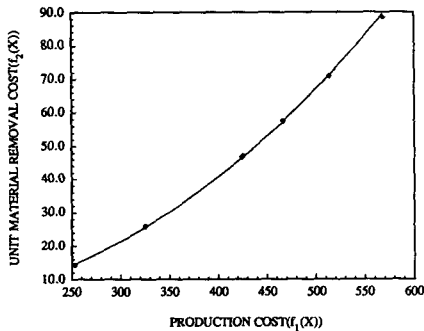


Fig. 9 Minimal curve with $p=1$ for cutting problem

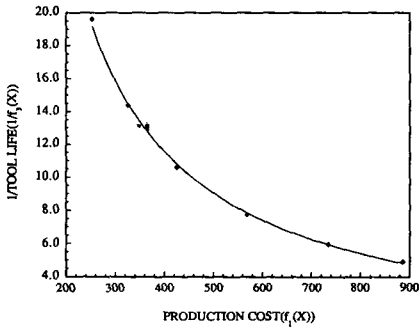


Fig. 10 Minimal curve with $p=1$ for cutting problem

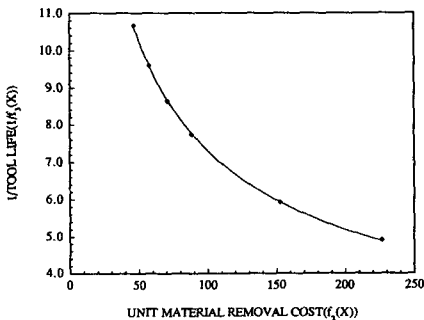


Fig. 11 Minimal curve with $p=1$ for cutting problem

- sets and Structural Engineering," ASCEJ. of Struct. Eng., Vol. 5, pp. 1211~1225.
- (5) Yuan, W. G. and Quan, W. W., 1985, "Fuzzy Optimum Design of Aseismic Structures," Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 13, pp. 827~837.
- (6) Rao, S. S., 1987, "Multi-objective Optimization of Fuzzy Sutuctural Systems," Int. J. for Numerical Method in Eng., Vol. 24, pp. 1157~1171.
- (7) Rao, S. S., 1987, "Description and Optimum Design of Fuzzy Mechanical Systems," J. of Mech. Trans. and Auto. Design, Vol. 109, pp. 126~132.
- (8) Vanderplaats, G. N., 1982, "Structural Optimization-past, Present, and Future," AIAAJ, Vol. 20, pp. 992~1000.
- (9) Stadler, W., 1984, "Multicriteria Optimization in Mechanics," Com. Methods in App. Mech. and Eng., Vol. 37, pp. 217~286.
- (10) Dauer, J. P. and Krueger, R. J., 1977, "An Iterative Approach to Goal Programming," Operational Research Quarterly, 28, pp. 671~681.
- (11) Zimmermann, H. J., 1983, "Fuzzy mathematical Programming," Comput. & Oper. Res., Vol. 13, pp. 291~298.
- (12) Leberling, H., 1981, "On Finding Compromise Solution in Multicriteria Problems Using the Fuzzy Min-operator," Fuzzy Sets and Systems, Vol. 6, pp. 105~118.
- (13) Hannan, E. L., 1981, "Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals," Fuzzy Sets and Systems, Vol. 6, pp. 235~248.
- (14) Bellman, R. E. and Zadeh, L. A., 1970, "Decision Making in a Fuzzy Enviroment," Management Sci., Vol. 17, pp. 141~164.
- (15) Koski, J. and Silvennoinen, R., 1987, "Norm Methods and Partial Weighting in Multicriterion Optimazation of Structures," Int. J. for Numerical Method in Eng., Vol. 24, pp. 1101~1121.
- (16) Sakawa, M. and Yano, H., 1986, "Interactive Fuzzy Decision Making for Multionjective Non-linear Programming Using Augmented Minmax Problems," Fuzzy Sets and Systems, Vol. 20, pp. 31~43.
- (17) Dhingra, A. K., Rao, S. S. and Kumar, V., 1992, "Nonlinear Membership Functions in Multiobjective Fuzzy Optimization of Mechanical and Structural Systems," AIAA, Vol. 30, pp. 251~260.
- (18) Belegundu, A. D. and Arora, J. S., 1984, "A New Recursive Quadratic Programming Method with Active Set Strategy for Optimal Design," Int. J. for Numerical Method in Eng., Vol. 20, pp. 803~816.
- (19) 최중근, 1989, "기계가공 최적화를 위한 가이드 시스템에 관한 연구," KAIST, 석사학위 논문.