

〈論 文〉

## 모드 댐핑 행렬의 대각선 성분 우세가 비연관화 근사에 미치는 영향

김정수\* · 최기흥\*\* · 최기상\*\*\*

(1993년 1월 8일 접수)

### Influence of the Diagonal Dominance of Modal Damping Matrix on the Decoupling Approximation

Jung Soo Kim, Gi Heung Choi and Gi Sang Choi

**Key Words :** Linear Discrete-Time System(선형 이산 시스템), Mode Damping Matrix(모드 감쇠 행렬), Nonclassically Damped System(비고전적 감쇠 시스템), Decoupling Approximation(비연관화 근사)

#### Abstract

A simple technique to decouple the modal equations of motion of a linear nonclassically damped system is to neglect the off-diagonal elements of the modal damping matrix. This is called the decoupling approximation. It has generally been conceived that smallness of off-diagonal elements relative to the diagonal ones would validate its use. In this study, the relationship between elements of the modal damping matrix and the error arising from the decoupling approximation is explored. It is shown that the enhanced diagonal dominance of the modal damping matrix need not diminish the error. In fact, the error may even increase. Moreover, the error is found to be strongly dependent on the excitation. Therefore, within the practical range of engineering applications, diagonal dominance of the modal damping matrix would not be sufficient to suppress the effect of modal coupling.

#### 1. 서 론

선형 이산 시스템을 해석할 때 일반적으로 운동 방정식은 모드해석에 의해 모드좌표로 나타낸다. 또한 감쇠효과가 무시될 때 운동방정식은 자유도가 1인 진동을 나타내는 비연관된 식들로 나타내질 수 있다. 그러나, 감쇠가 존재할 때는 감쇠계수의 특별한 조합에 대해서만 비연관화가 가능하다. 즉,

Caughey와 O'Kelly(1965)에 의해 정의된 대로 고전적 감쇠 시스템(classically damped system)이라고 불리는 특별한 경우에만 비연관화 될 수 있다. 그러나 많은 응용에 있어서 이러한 완전한 비연관화는 이루어질 수 없다. 완전한 비연관화를 이룰 수 없는 시스템을 비고전적 감쇠 시스템(nonclassically damped system)이라고 한다. 비고전적 감쇠 시스템의 시간응답은 상태공간에서 Runge-Kutta 방법을 사용함으로써 수치적으로 계산될 수 있다. 그러나 이 방법은 많은 계산을 요하고 물리적 중요성이 항상 명확하게 드러나지 않는다는 단점이 있다. 따라서 위치, 속도, 그리고 가속도 같은 물리적 개

\*금성산전연구소

\*\*고등기술연구원

\*\*\*정회원, 서울시립대학교 제어계측공학과

념이 명확히 나타나는 2차식 형태에서 문제를 해석하는 것이 바람직한 경우가 많다. 모드좌표는 시스템 설계에 있어서 개념적 의미를 잘 담고 있으며 실험 데이터와 간단히 비교될 수 있다. 그 동안 원래의 표준형(canonical form)을 유지하면서 연관 시스템의 응답을 얻을 수 있는 근사방법을 개발하려는 연구들이 있어 왔다. 많은 논문들은 모드 연관의 효과가 작다는 가정을 포함하였으며 무감쇄 모드의 성질 뿐 아니라 모드 감쇄 행렬의 파라미터들을 포함하는 조건을 개발하려는 것이었다. 예를 들면, Hasselmann(1976)은 모든 연관이 시스템의 고유진동수에 대해 무시될 수 있는 조건을 내렸으며, Warburton과 Soni(1977)는 고유진동수와 모드 감쇄를 연관시키는 조건을 개발하였다. 교란(perturbation)에 의한 비고전적 감쇄시스템의 근사해는 Cronin(1976)에 의해 제안되었으며 이 방법에 의해 Chung과 Lee(1986)는 약한 비고전적 감쇄를 갖는 시스템의 고유해(eigensolution)를 구했다. Ozguven(1982, 1987)은 리셉턴스(receptance)의 개념을 사용하여 비고전적 감쇄구조를 주파수 영역에서 연구하였으며, Bellos와 Inman(1990)은 비비례지수(nonproportionality index)들을 이용하여 선형 시스템에서의 모드 연관을 연구하였다.

비고전적 감쇄시스템의 해를 구하는 일반적인 방법은 모드 감쇄 행렬의 비대각선 성분을 무시하는 것이다. 이는 비연관화 근사라 불리우며, 모드 연관이 어떤 방법으로든 무시될 수 있다면 유효하다. 엄밀하게 증명되지 않았지만 어떤 형태로든 감쇄 행렬의 대각선 방향성분이 우세한 경우 비대각선 성분을 무시할 수 있다는 것이 널리 알려져 있다(e. g., Xu와 Igusa, 1991).

본 논문은 모드 감쇄 행렬과 비연관화 근사에 의한 오차간의 관계를 규명하고자 한다. 이를 위하여 오차의 한계를 모드 감쇄 행렬 대각선 우세의 간단한 함수로 표현하고 시스템의 해로부터 정확한 오차에 관한 식을 개발해 낸다. 정규화된 비연관화 근사 오차에 기초한 오차계수(error coefficient)와 오차지수(error index)의 개념이 도입되며 그 기본적인 성질을 설명한다. 오차지수는 모드 연관의 정량적인 척도 역할을 한다.

## 2. 오차의 한계와 대각선 성분의 우세

외부에서의 입력에 의해 여기되고,  $n$ 개의 자유

도를 갖는 시스템의 운동방정식은  $M$ 이 질량행렬,  $C$ 가 감쇄행렬,  $K$ 가 강도행렬일 때 다음과 같이 쓰일 수 있다.

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx &= g(t), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

수동시스템(passive system)에 대하여는  $M$ ,  $C$  그리고  $K$ 가 실수 대칭행렬로서 양의 한정(positive definite)이다.

$U$ 를 시스템 (1)의  $n \times n$ 모드 행렬이라고 하자. 모드 행렬은  $\omega_i^2 (> 0)$ 와 열(column),  $u^{(i)} (i=1, \dots, n)$ 가 각각 고유치(eigenvalue)와 고유벡터(eigenvector)인 다음과 같은 대칭 고유치 문제(eigenvalue problem)의 고유벡터들을 열로 갖는 행렬이다.

$$Ku^{(i)} = \omega_i^2 Mu^{(i)} \quad (2)$$

모드 행렬은  $U^T$ 가  $U$ 의 전치행렬(transpose)이고  $I$ 가  $n$ 차원 항등행렬(identity matrix)일 때  $U^T M U = I$ 에 의해 직교정규화(orthonormalization)될 수 있다. 따라서  $U^T K U = \Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ 이며, 선형변환  $x(t) = Uq(t)$ 에 의해 식(1)은  $D = U^T C U$ ,  $f(t) = U^T g(t)$ 이고  $q(t)$ 가  $n$ 차원의 모드 좌표 벡터(mode coordinate vector)일 때 다음과 같은 정규형(normal form)으로 쓰일 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} + D\dot{q} + \Omega q &= f(t), \quad q(0) = U^T M \dot{x}_0, \\ \dot{q}(0) &= U^T M \dot{x}_0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

대칭행렬(symmetric matrix)  $D$ 는 모드 감쇄행렬(mode damping matrix)이라 불리고 이것이 대각선행렬(diagonal matrix)인 경우 시스템은 고전적 감쇄시스템이다. 반면에  $D$ 가 비대각선행렬(nondiagonal matrix)이고 정규화된 운동방정식이  $D$ 의 비대각선 성분에 의해 연관된 시스템이 비고전적 감쇄시스템이다.

대각선 성분의 우세는 다음과 같이 설명될 수 있다.  $D$ 에서 비대각선 성분의 절대값을 취해 행방향으로 합한 것을  $d_{ij} (i, j=1, \dots, n)$ 가  $D$ 의 성분일 때 다음과 같이 나타낸다.

$$\sigma_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |d_{ij}| \quad (4)$$

만약  $\sigma_i \leq |d_{ii}|$ , ( $i=1, \dots, n$ )이면  $D$ 는 대각선 우세(diagonally dominant)라고 하며,  $\sigma_i < |d_{ii}|$ , ( $i=1, \dots, n$ )이면 절대 대각선 우세(strictly diagonally dominant)라고 한다. 또한 모든  $i$ 에 대해서  $\sigma_i$

《 $d_{ii}$ 이면  $D$ 는 강한 대각선 우세(strongly diagonally dominant)라고 한다. 이제  $i$ 번째 모드에 대한 모드 우세 지수(mode dominance index)를 다음과 같이 정의한다.

$$I_i = \frac{d_{ii}}{\sigma_i} \quad (5)$$

그러면 시스템 대각선 우세 지수(system diagonal dominance index)는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$I_s = \min\{I_i | 1 \leq i \leq n\} \quad (6)$$

만약  $D$ 가 대각선 우세이면  $I_s \geq 1$ 이고,  $D$ 가 강한 대각선 우세이면  $I_s \gg 1$ 이다. 이러한 지수는 모드 감쇠 행렬의 대각선 우세정도에 대한 편리한 척도가 된다.

$\Lambda = \text{diag}(2\zeta_1\omega_1, \dots, 2\zeta_n\omega_n)$ 가  $D$ 의 대각선 성분으로 구성된 행렬이고,  $R = [d_{ij}]$ 가 대각선 성분은 0, 비대각선 성분은  $D$ 와 같은 행렬일 때, 모드 감쇠 행렬은 다음과 같이 쓰일 수 있다.

$$D = \Lambda + R \quad (7)$$

$C$ 가 양의 한정이므로 ( $i=1, \dots, n$ )에 대하여  $\zeta_i > 0$ 이다. 식(3)에서  $R$ 이 무시된 비연관화 근사의 해를  $q_a(t)$ 라고 하면

$$\ddot{q}_a + \Lambda \dot{q}_a + \Omega q_a = f(t), \quad t \geq 0 \quad (8)$$

이고,  $q(0) = q_a(0) = 0, \dot{q}(0) = \dot{q}_a(0)$ 이다. 비연관화 근사에 의한 오차 벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$e = q - q_a \quad (9)$$

식(8)에서 (3)을 빼면

$$\ddot{e} + \Lambda \dot{e} + \Omega e = -R\dot{q}, \quad t \geq 0 \quad (10)$$

이고,  $e(0) = \dot{e}(0) = 0$ 이다. 이 식은 오차  $e(t)$ 가 선형 오퍼레이터에 의해  $q(t)$ 의 사영으로 다음과 같이 나타내진다는 것을 의미한다.

$$e(t) = \bar{H}(q(t)) \quad (11)$$

Shahruz와 Ma(1988)는 식(10)으로 부터 오차의 한계는  $L_\infty$ 를 임의의 벡터  $h(t) = [h_1(t), \dots, h_n(t)]^T$ 에 대해서  $\|h(t)\| = \max\{\sup\{\|h_i(t)\| | t \geq 0\} | 1 \leq i \leq n\}$ 로 정의된 노름(norm)이라고 할 때 다음과 같은 형태가 됨을 보였다.

$$\|e\| \leq m \|q\| \quad (12)$$

또한, 식(12)를 만족하는  $m$ 의 최소치는 다음과 같이 주어진다.

$$m = \|\bar{H}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{2\sigma_i \exp(V(\zeta_i))}{\omega_i (1 - \exp(W(\zeta_i)))} \quad (13)$$

단,  $\zeta_i$ 는 감쇠비(damping ratio)이고

$$V(\zeta_i) = -\frac{\zeta_i}{(1 - \zeta_i^2)^{1/2}} \tan^{-1} \left( \frac{(1 - \zeta_i^2)^{1/2}}{\zeta_i} \right) \quad (14)$$

$$W(\zeta_i) = -\frac{\pi \zeta_i}{(1 - \zeta_i^2)^{1/2}} \quad (15)$$

이다. Shahruz와 Ma에 의해 유도된 다음의 부등식을 사용해서  $0 \leq \zeta_i \leq 1$ 인 경우에 대해 대각선 우세에 관해서 간단한 함수 관계를 갖는 오차의 한계를 도출할 수 있다.

$$0.3183 = \frac{1}{\pi} \leq \frac{\zeta_i \exp(V(\zeta_i))}{1 - \exp(W(\zeta_i))} \leq \frac{1}{e} = 0.3679 \quad (16)$$

식(13)으로 부터

$$\frac{4}{\pi} \max \left\{ \frac{\sigma_i}{2\zeta_i\omega_i}, 1 \leq i \leq n \right\} \leq m \leq \frac{4}{e} \max \left\{ \frac{\sigma_i}{2\zeta_i\omega_i}, 1 \leq i \leq n \right\} \quad (17)$$

이며, 이 식으로부터  $D$ 의 비대각선 방향 성분  $\sigma_i$ 의 합과 대각선 성분  $2\zeta_i\omega_i$ 와  $m$  사이의 관계가 명백해진다. 시스템의 대각선 우세와 비연관화 근사의 오차는 다음과 같이 연관된다.

$$\frac{\|e\|}{\|q\|} \leq \frac{4}{e I_s} \quad (18a)$$

여기서  $q = q_a + e$ 이므로,  $I_s > 4e^{-1}$ 에 대해서

$$\frac{\|e\|}{\|q_a\|} \leq \frac{4}{e(I_s - 4/e)} \quad (18b)$$

라고도 할 수 있다.

명백히 오차 한계는 시스템의 대각선 우세 지수  $I_s$ 가 커짐에 따라 즉, 비대각선 성분이 0에 접근함에 따라 점근적으로 0에 수렴함을 알 수 있다. 그러나 대부분의 비고전적 감쇠 시스템에서 이러한 오차의 한계는 실제 오차보다 훨씬 더 클 수 있다. 따라서, 실제 공학적 응용에 있어서 이 오차 한계는 모드 연관을 예측하는데 제한적으로 유효하다.

### 3. 모드 연관과 대각선 성분의 우세

하모닉 함수에 의해 여기되는 식(3)의 시스템을

고려한다. 스칼라  $u(t)$ 가 단위 크기의 하모닉 함수라 하고  $a=(f_1, \dots, f_n)$ 이고  $f_i(i=1, \dots, n)$ 가 0이 아닌 상수일 때

$$f(t) = au(t) \tag{19}$$

라고 한다. 본 연구에서의 주요 관심사는 정상상태 해에서의 모드 연관 해석이므로  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ 이라고 가정한다. 식(3)의 시스템에서  $i$ 번째 모드에 해당하는 운동방정식은

$$\ddot{q}_i + d_{ii}\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij}\dot{q}_j = f_i u(t), \tag{20}$$

$$q_i(0) = \dot{q}_i(0) = 0, \quad t \geq 0$$

이다.

식(20)에 라플라스 변환(Laplace transform)을 취하면  $Q_i(s)$ ,  $Q_j(s)$ ,  $U(s)$ 가 각각  $q_i(t)$ ,  $q_j(t)$ ,  $u(t)$ 의 라플라스 변환일 때 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\left[ s^2 + \left( d_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} \frac{Q_j(s)}{Q_i(s)} \right) + \omega_i^2 \right] Q_i(s) = f_i U(s) \tag{21}$$

$i$ 번째 비비례인자(nonproportionality factor),  $\Delta_i(s)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} \frac{Q_j(s)}{Q_i(s)} \tag{22}$$

식(22)를 식(21)에 대입하고 정리하면,  $\Delta_i(s)$ 가  $U(s)$ 에 무관할 때 다음 식을 얻는다.

$$Q_i(s) = \left( \frac{f_i}{s^2 + (d_{ii} + \Delta_i(s))s + \omega_i^2} \right) U(s) \tag{23}$$

윗 식에서  $U(s)$ 에 곱해지는 부분은 모드응답  $Q_i(s)$ 에 대한 전달함수(transfer function)로 볼 수 있다. 식(23)에서  $\Delta_i(s)$ 를 생략한다면  $Q_{ai}(s)$ 가 근사 모드 응답  $q_{ai}(t)$ 의 라플라스 변환일 때  $Q_i(s)$ 는 다음과 같이 된다.

$$Q_{ai}(s) = \left( \frac{f_i}{s^2 + d_{iis} + \omega_i^2} \right) U(s) \tag{24}$$

이제 라플라스 변환 영역에서 비연관화 근사를 유도한다. 식(10)으로부터  $i$ 번째 모드 좌표에 해당하는 오차식은

$$\ddot{e}_i + d_{ii}\dot{e}_i + \omega_i^2 e_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij}\dot{q}_j, \tag{25}$$

$$e_i(0) = \dot{e}_i(0) = 0, \quad t \geq 0$$

이며 여기에 라플라스 변환을 취하면  $E_i(s)$ 가  $e_i(s)$

의 라플라스 변환일 때 다음 식을 얻는다.

$$(s^2 + d_{iis} + \omega_i^2) E_i(s) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} s Q_j(s) \tag{26}$$

식(23)을 식(26)에 대입하면  $E_i(s)$ 와  $U(s)$ 를 연결하는 다음과 같은 식을 얻는다.

$$E_i(s) = \frac{1}{s^2 + d_{iis} + \omega_i^2} \left( - \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} \frac{s f_j}{s^2 + (d_{jj} + \Delta_j(s))s + \omega_j^2} \right) U(s) \tag{27}$$

식(24)와 (27)로부터  $E_i(s)$ 를  $Q_{ai}(s)$ 로 정규화하면

$$\frac{E_i(s)}{Q_{ai}(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} \frac{s f_j}{f_i (s^2 + (d_{jj} + \Delta_j(s))s + \omega_j^2)} \tag{28}$$

이 된다. 주파수가  $\omega_f$ 인 하모닉 입력에 대하여  $J$ 가  $\sqrt{-1}$ 일 때  $s$ 를  $J\omega_f$ 라 하고,  $\alpha_i = \text{Re}[\Delta_i(J\omega_f)]$ ,  $\beta_i = \text{Im}[\Delta_i(J\omega_f)]$ 라 하면 식(28)은

$$\frac{E_i(J\omega_f)}{Q_{ai}(J\omega_f)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} \frac{J\omega_f f_j}{f_i ((\omega_j^2 - \omega_f^2 - \beta_j \omega_f) + J(2\zeta_j \omega_j + \alpha_j) \omega_f)} \tag{29}$$

이 된다.  $i \neq j (i, j=1, \dots, n)$ 일 때 오차계수를 다음과 같이 정의한다.

$$\delta_{ij}(J\omega_f) = - d_{ij} \frac{J\omega_f f_j}{f_i ((\omega_j^2 - \omega_f^2 - \beta_j \omega_f) + J(2\zeta_j \omega_j + \alpha_j) \omega_f)} \tag{30}$$

오차계수,  $\delta_{ij}$ 는  $i$ 번째 모드의  $j$ 번째 모드 응답에 대한 연관 효과를 측정한다. 윗 식은 오차계수가 입력 파라미터 뿐 아니라 시스템 파라미터에도 좌우됨을 보인다.  $d_{ij}$ 가 작다는 것만으로는  $i$ 번째 모드와  $j$ 번째 모드 사이의 모드 연관을 무시할 수 없는 것이 명백하다. 또한  $\delta_{ij}(J\omega_f)$ 의  $\omega_f$ 와  $f_j/f_i$ 에 대한 의존관계가 알려졌을 때 입력의 주파수와 크기가 변한다면  $i$ 번째 모드와  $j$ 번째 모드 사이의 연관 변화가 있을 것이다.  $i$ 번째 모드 응답과 연관된 정규화된 오차는 시스템의 다른 모드들의 연관의 영향과 합쳐지며 다음과 같이 오차계수의 합으로 나타내질 수 있다.

$$\frac{E_i(J\omega_f)}{Q_{ai}(J\omega_f)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{ij}(J\omega_f) \tag{31}$$

윗 식은 복소수이므로  $i$ 번째 모드에 대해 실수값

을 갖는 오차지수,  $\mu_i$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_i = \frac{|E_i(j\omega_f)|}{|Q_{ai}(j\omega_f)|} = \sum_{j=1, j \neq i} \sigma_{ij}(j\omega_f) \quad (32)$$

이 지수는 정상상태의 정규화된 비연관 근사 오차의 크기와 같다. 따라서 이 지수는 모드 연관에 대한 간단하면서도 의미있는 척도가 될 수 있다.

식(30)과 (32)는 모드 연관에 대하여 다음과 같은 특성을 갖는다.

(1) 오차지수는 복소수 평면에서  $n-1$ 개의 오차계수 벡터 합인 크기이다. 따라서 이는 각  $\delta_{ij}(s)$ 의 크기 뿐 아니라 이들이 복소수 평면에서 어떤 방향으로 놓였는지에 따라 결정된다.

(2) 외부 입력이 있을 때,  $d_{ij}$ 가 작다고 해서 모드 연관이 작아지는 것은 아니다. 이는 작은  $d_{ij}$ 에 기초한 교란법이 시스템의 하모닉 응답을 예측하는데 제한적으로만 유용하다는 것을 의미한다. Chung과 Lee(1986)가 작은  $d_{ij}$ 를 갖는 비고전적 감쇄 시스템의 고유해를 얻는데 이 방법을 사용한 바 있지만 이 방법은 시스템의 강제 응답을 구하는 데는 사용될 수 없다.

(3)  $d_{ij}=d_{ji}$ 이지만 일반적으로  $\delta_{ij} \neq \delta_{ji}$ 이다. 따라서  $j$ 번째 모드의  $i$ 번째 모드에 대한 큰 연관 효과가 반대로  $i$ 번째 모드의  $j$ 번째 모드에 대한 큰 연관 효과를 의미하는 것은 아니다.

(4) 시스템 응답의 모드 연관 효과는 입력 파라미터에 좌우된다. 이는 모드 감쇄에 기초한 정량적 지수는 모드 연관의 부분적 척도 밖에 될 수 없음을 의미한다.

#### 4. 예

• 예(1)

$a=(1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ 이고  $\omega_f=4.14$ 일 때 정규화된 운동방정식이 다음과 같이 나타내지는 자유도가 6인 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} + D\dot{q} + \Omega q &= a \sin \omega_f t, \\ q(0) = \dot{q}(0) &= 0, t \geq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

이 시스템의 모드 강성도 행렬은 다음과 같다.

$$\Omega = \text{diag}(15.60, 15.84, 16.0, 16.81, 17.39, 18.06) \quad (34)$$

2에서 9사이의 서로 다른 대각선 우세 지수를 가지

는 20개의 모드 감쇄 행렬을 사용한다. Fig. 1에 각 시스템에 대한 시간 영역에서 정상상태의  $\|e\|/\|q_{all}\|$ 가 나타나 있으며 식(18b)의 오차한계와 비교되어 있다. 오차한계는 대각선 우세의 단순 감소 함수인 반면 실제 오차는 그렇지 않으며 오차한계 내에서 어떤 값이던 취할 수 있다. 실제로 여기 나타난 대로 큰 대각선 우세가 큰 오차로 나타날 수도 있다. 첫번째와 두번째 모드에 대해서 모드 연관을 보기 위하여 비연관화 근사에 의한 정상상태 오차,  $\|e_{all}\|/\|q_{all}\|$ , ( $i=1, 2$ )가 Fig. 2에 나타나 있다. 각 시스템에 대하여 여기서 선택된 두 모드에 의해 나타난 것 처럼 모드가 다르면 모드 연관도 달라진다. 또, 이 그림에서 두 모드가 대각선 우세가 변함에 따라 서로 다른 양상을 보인다는 것을 알 수 있다. 번호 1-4로 나타난 시스템의 모드 감쇄 행렬은 Appendix A에 나타나 있다.

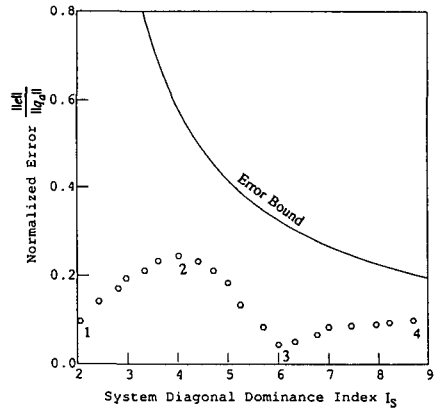


Fig. 1 System response error vs. diagonal dominance

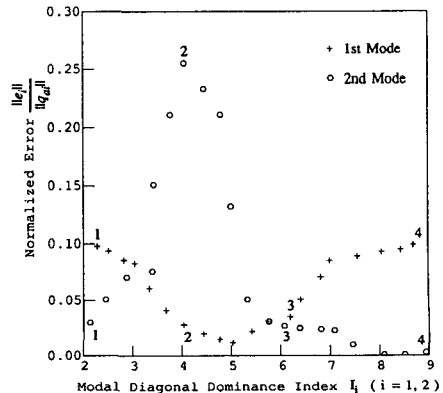


Fig. 2 Modal response error vs. diagonal dominance

• 예(2)

모드 감쇄 행렬의 대각선 우세는 같으나, 대각선 성분만 서로 같고 비대각선 성분은 서로 다른 시스템들을 고려한다. 정규화된 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} + D\dot{q} + \Omega q &= a \sin \omega_f t, \\ q(0) = \dot{q}(0) &= 0, \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

단,  $a = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ 이고  $\omega_f = 4.14$ 이며, 모드 강성도 행렬은

$$\Omega = \text{diag}(15.60, 15.84, 16.0, 16.81, 17.39, 18.06) \quad (36)$$

이다. 9개의 서로 다른 모드 감쇄 행렬이 사용되었다. 비대각선 성분은 다르지만 각 행렬의 첫번째 모드에 대한 모드 대각선 우세 지수가 4.025로 같게 잡혀 있다. Fig. 3에 Case 1, Case 2라고 표시된 2개의 시스템에 대해서는 그 모드 감쇄 행렬이 Appendix B에 나타나 있다. Fig. 3에 나타난 대로 이 시스템들의 모드 연관은 넓은 분포를 갖는다. 가장 큰 연관을 가지는 시스템(Case 1)은 약 21%의 정규화된 오차를 갖는 반면, 가장 작은 오차를 갖는 경우(Case 2)는 약 1/30인 0.73%에 지나지 않는다.

Fig. 3의 결과가 식(34)의 오차지수에 의해 설명될 수 있음을 보이기 위해 각각의 오차계수와 이에 해당하는 벡터 합이 Case 1과 2에 대해서 복소수 평면에 도시되었다. Case 1과 2가 비슷한 비대각

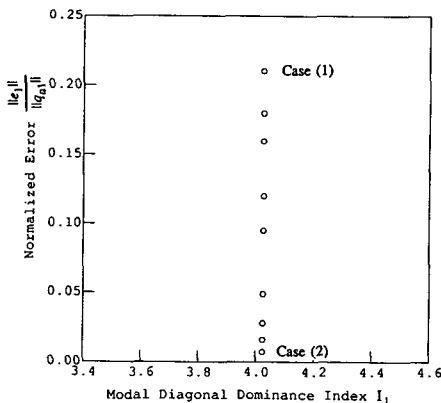


Fig. 3 Modal response error for a given diagonal dominance

선 성분의 크기를 갖는다는 것에서 추측할 수 있는 것 처럼 첫번째 모드와 연관된 각각의 오차계수의 크기가 비슷하다. 이는 Fig. 4와 5에 도시되어 있다. Case 1에 대해서는 오차계수의 벡터 합도 커서 큰 비연관화 근사 오차를 가져온다. 그러나 Case 2에 대해서는 오차계수의 벡터 합이 구성성분간의 상쇄에 의해 아주 작다.

• 예(3)

정규화된 운동방정식이 다음과 같은 자유도가 3인 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} + D\dot{q} + \Omega q &= a \sin \omega_f t, \\ q(0) = \dot{q}(0) &= 0, \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

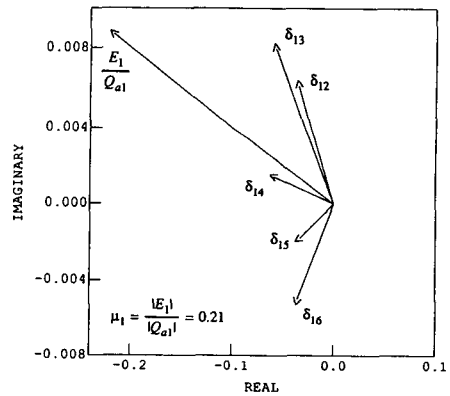


Fig. 4 Vector sum of error coefficients in the complex plane for Case(1)

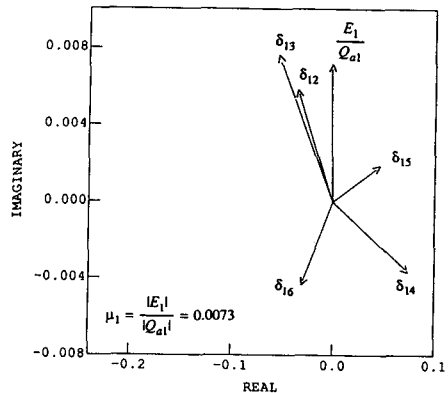


Fig. 5 Vector sum of error coefficients in the complex plane for Case(2)

단  $a = (-3, 4, 2)^T$ 이고  $\omega_f = 12.5$ 이며, 모드 감쇄 행렬과 강성도 행렬은 각각

$$D = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 & 0.3 \\ -0.4 & 1.3 & -0.5 \\ 0.3 & -0.5 & 1.6 \end{bmatrix} \Omega = \text{diag}(100, 121, 196) \quad (38)$$

이다. 이 시스템의 모드 감쇄 행렬은 대각선 성분이 우세하며, Fig. 6은 이 시스템의 2번째 모드의 정확한 정상상태 응답과 근사 정상상태 응답을 나타낸다. 두가지 입력 파라미터의 변형을 고려한다. 첫번째는 입력 크기의 변화만을 포함하며 두번째 변형은 입력 주파수의 변화를 포함한다.

변형 1  $a = (3, 2, 3)^T, \omega_f = 12.5 \quad (39)$

변형 2  $a = (-3, 4, 2)^T, \omega_f = 10.0 \quad (40)$

변형 1과 2의 두번째 모드에 대한 정확한 정상상태 응답과 근사 정상상태 응답이 Fig. 6에 도시되어 있다. 그림에서 3개의 입력 사이에 비연관화 오차의 큰 불일치가 있음을 알 수 있다. 이 경우는 다 똑같은 시스템 파라미터를 갖으므로 이러한 불일치는 입력 파라미터의 차이에서 오는 것이다. 따라서 이 예는 모드 연관이 입력 파라미터의 변화에 매우 민감함을 보여준다. 또한, 변형 1과 2의 응답 오차는 모드 감쇄 행렬의 비대각선 성분이 작다고 해서 모드 연관을 무시할 수 없음을 보여준다. 정확하게 모드 연관을 규정하기 위해서는 입력이 고려되어야 한다. 부수적으로 이 결과는 시간에 따라 변화하는 입력에 의해서 모드 연관의 순간적인 심대한 변화가 있을 수 있음을 보인다.

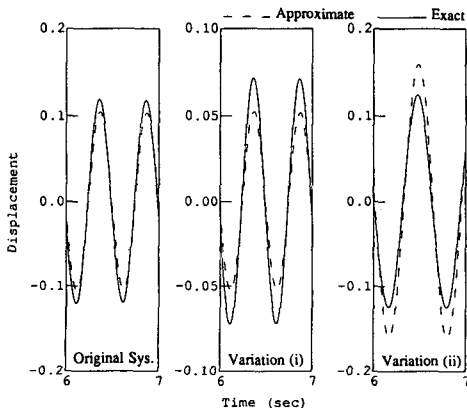


Fig. 6 Exact vs. approximate solutions for different excitations

### 5. 결 론

본 연구에서는 주파수 영역에서 비연관화 근사에 기초한 지수가 모드 연관을 정량적으로 설명하기 위해 도입되었다. 이 지수를 이용해서 모드 감쇄 행렬과 모드 연관과의 관계가 설명될 수 있었다. 본 연구의 주요한 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다.

(1) 식(18)에서와 같은 오차한계를 구했다. 이 오차한계는 비연관화 근사의 오차가 대각선 성분이 우세하게 됨에 따라 점근적으로 감소함을 보인다.

(2) 실제 공학적 응용에 있어서 모드 행렬의 대각선 우세가 반드시 비연관화 근사에 따른 오차를 작게 하는 것이 아니다.

(3) 입력 파라미터의 작은 변화가 있을 때 비연관화 근사에 있어서 큰 변화를 보일 수 있다.

(4) 같은 수준의 모드 감쇄 행렬의 대각선 우세를 갖는 시스템들이 각 시스템에 따라 현저히 다른 비연관화 근사 오차를 보일 수도 있다.

(5) 한 시스템에서 모드에 따라 서로 다른 비연관화 근사의 오차를 보일 수 있다. 또한 한 모드의 다른 모드에 대한 모드 연관이 크다고 해서 반드시 역의 연관 효과도 크다는 것을 의미하지 않는다.

### 참고문헌

- (1) Bellos, J. and Inman, D.J., 1990, "Frequency Response of Nonproportionally Damped Lumped Parameter Linear Dynamic Systems," ASME J. Vibration and Acoustics, Vol. 112, pp. 194~201.
- (2) Caughey, T. K. and O'Kelly, M. E. J., 1965, "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems," ASME J. Appl. Mech, Vol. 32, pp. 583~588.
- (3) Chung, K. R. and Lee, C. W., 1986, "Dynamic Reanalysis of Weakly Nonproportionally Damped Systems," J. Sound and Vibration, Vol. 111, pp. 37~50.
- (4) Cronin, D. L., 1976, "Approximation for Determining Harmonically Excited Response of Nonclassically Damped System," ASME J. Engineering for Industry, Vol. 98, pp. 43~47.

- (5) Hasselman, T.K. 1976, "Modal Coupling in Lightly Damped Structures," AIAA J., Vol. 14, pp. 1627~1628.
- (6) Hwang, J. H. and Ma, F., 1992, "On the Approximate Solution of Nonclassically Damped Linear Systems," ASME J. Appl. Mech., Accepted for publication.
- (7) Ozguven, H. N., 1982, "Receptances of Non-Proportionally and Continuously Damped Plates-Reduced Dampers Method," J. of Sound and Vibration, Vol. 85, pp. 383~395.
- (8) Ozguven, H. N., 1987, "On the Harmonic Response of Non-Proportionally Damped Structures," Proc. 11th ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise, Vol. 5, pp. 117~124
- (9) Shahruz, S. M. and Ma, F., 1988, "Approximate Decoupling of the Equations of Motion of Linear Underdamped Systems," ASME J. Appl. Mech, Vol. 55, pp. 716~720.
- (10) Warburton, G. B. and Soni, S.R., 1977, "Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures," Earthq. Engg. Struct. Dyn., Vol. 5, pp. 365~376.
- (11) Xu, K. and Igusa, T., 1991, "Dynamic Characteristic of Non-Classically Damped Structures," Earthq. Engg. Struct. Dyn., Vol. 20, pp. 1127~1144.

**부록 A**

예 1의 시스템들은 같은 모드 질량, 강성도 그리고 입력 파라미터를 갖으며 모드 감쇄 행렬은 다음과 같다. 행렬의 첨자는 Fig. 1과 2에서의 시스템의 번호와 같으며 이 감쇄 행렬들은 첨자가 커짐에 따라 대각선 우세 지수가 커진다. 이 행렬들은 같은 대각선 성분들을 갖는다.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1.61 & 0.08 & 0.11 & -.10 & -.05 & 0.06 \\ 0.08 & 1.70 & 0.09 & 0.10 & 0.09 & 0.06 \\ 0.11 & 0.09 & 1.80 & -.07 & -.08 & 0.07 \\ -.10 & 0.10 & -.07 & 1.75 & -.04 & -.09 \\ -.05 & 0.09 & -.08 & -.04 & 1.65 & -.15 \\ 0.06 & 0.06 & 0.07 & -.09 & -.15 & 1.80 \end{bmatrix}$$

$I_s=2.06, I_1=2.28, I_2=2.13$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1.61 & 0.21 & 0.13 & -2.6 & 0.05 & 0.06 \\ 0.21 & 1.70 & 0.06 & -.14 & -.26 & 0.13 \\ 0.13 & 0.06 & 1.80 & 0.20 & -.12 & -.28 \\ -.26 & -.14 & 0.20 & 1.75 & 0.15 & -.08 \\ 0.05 & -.26 & -.12 & 0.15 & 1.65 & 0.22 \\ 0.06 & 0.13 & -.28 & -.08 & 0.22 & 1.80 \end{bmatrix}$$

$I_s=2.06, I_1=2.28, I_2=2.13$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1.61 & 0.07 & -.06 & 0.03 & -.03 & -.07 \\ 0.07 & 1.70 & -.07 & -.06 & 0.06 & 0.02 \\ -.06 & -.07 & 1.80 & 0.07 & 0.06 & 0.04 \\ 0.03 & -.06 & 0.07 & 1.75 & -.04 & 0.09 \\ -.03 & 0.06 & 0.06 & -.04 & 1.65 & -.08 \\ -.07 & 0.02 & 0.04 & 0.09 & -.08 & 1.80 \end{bmatrix}$$

$I_s=6.00, I_1=6.19, I_2=6.07$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1.61 & 0.04 & 0.05 & 0.07 & 0.02 & .005 \\ 0.04 & 1.70 & -.06 & 0.04 & -.03 & 0.02 \\ 0.05 & -.06 & 1.80 & 0.05 & 0.03 & 0.01 \\ 0.07 & 0.04 & 0.05 & 1.75 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -.03 & 0.03 & 0.02 & 1.65 & -.05 \\ .005 & 0.02 & 0.01 & 0.02 & -.05 & 1.80 \end{bmatrix}$$

$I_s=8.70, I_1=8.70, I_2=8.94$

**부록 B**

다음은 다른 비대각선 성분을 갖으나 첫째 모드에 대한 모드 우세 지수가 4.025로 같은 두 모드 감쇄 행렬이다. 행렬의 첨자는 Fig. 3에서의 시스템의 번호와 같으며, 이 행렬들은 같은 대각선 성분들을 갖는다.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1.61 & 0.08 & 0.11 & 0.10 & 0.05 & 0.06 \\ 0.08 & 1.70 & 0.09 & 0.10 & 0.09 & 0.06 \\ 0.11 & 0.09 & 1.80 & -.07 & -.08 & 0.07 \\ 0.10 & 0.10 & -.07 & 1.75 & -.04 & -.09 \\ 0.05 & 0.09 & -.08 & -.04 & 1.65 & -.15 \\ 0.06 & 0.06 & 0.07 & -.09 & -.15 & 1.80 \end{bmatrix}$$

$I_s=4.025$

$$Dd = \begin{bmatrix} 1.61 & 0.08 & 0.10 & -.11 & -.06 & 0.05 \\ 0.08 & 1.70 & 0.09 & 0.10 & 0.09 & 0.06 \\ 0.10 & 0.09 & 1.80 & -.07 & -.08 & 0.07 \\ -.11 & -.10 & -.07 & 1.75 & -.04 & -.09 \\ -.06 & 0.09 & -.08 & -.04 & 1.65 & -.15 \\ 0.05 & 0.06 & 0.07 & -.09 & -.15 & 1.80 \end{bmatrix}$$

$I_s=4.025$