2122 大韓機械學會論文集 第17卷 第8號, pp. 2122~2130, 1993.

〈論 文〉

보텍스 쉐딩에 의한 얕은 직사각형통 내에서의 유동특성

서용권* · 문종춘**

(1993년 2월 9일 접수)

The Flow Characteristics in a Shallow Rectangular Tank by Vortex Shedding

Yong Kweon Suh and Jong Chun Moon

Key Words: Vortex(와류), Vortex Shedding(보텍스 쉐딩), Shallow Water(천수), Runge-Kutta Method(룬게-쿠타 방법), Ekman Layer(에크만 층)

Abstract

A numerical and experimental study has been performed on the flow in a shallow rectangular tank accompanying a vortex shedding. The model is composed of a rectangular tank with a vertical plate with a length half the width of the tank. The tank is subject to a horizontal sinusoidal oscillation. The numerical analysis shows that the pattern of vortex shedding changes considerably when the Reynolds number Re is varied from 500 to 7500. It is symmetric for $Re<1500$ and asymmetric for $Re>1500$. The kinetic energies of the right-hand and left-hand sides of the vertical plate are used to quantify the degree of the asymmetry. Experimental visualization is carried out at $Re=3876$ and 52000. The development of the streamline pattern at $Re=3876$ is in closer agreement with the numerical result at $Re=1000$ than that at $Re=3876$. The asymmetric pattern is observed at $Re=52000$.

기호설명

a : 무차원 상수(ω_n/ω)
b : 무차원 상수(r/ℓ)
c : 무차원 상수($a^2/(\pi^2 b)$)
E_L, E_R, $\bar{E}_L$, $\bar{E}_R$: 평판의 좌측과 우측의 운동에너지 및 그들의 평균 운동에너지
g : 중력가속도
H : 그릇의 폭
h : 수심
ℓ : 그릇의 가로길이
r : 그릇의 운동진폭
Re : 레이놀즈 수($\ell^2\omega/\nu$)
t : 무차원 시간
t_0 : 시간위상
u, v : x-, y-방향의 무차원 속도
x^*, y^*, x, y : 그릇의 운동방향 좌표, 그에 수직인 방향의 좌표 및 그들의 무차원 좌표($x^*=\ell x$, $y^*=\ell y$)
∇^2 : $\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$
ν : 동점성 계수
ω : 각속도
ω_n : 공진각속도($\pi\sqrt{gh}/\ell$)
ζ : 고정상태의 자유표면에서 측정한 무차원 높이

1. 서 론

유체의 유동을 이용한 교반(stirring)은 오래 전

*정회원, 동아대학교 기계공학과
**정회원, 동아대학교 기계공학과 대학원

부터 많은 공학 분야에서 사용되어 왔다. 1980년대 이전의 고전적 교반에 비해 최근 등장한 혼돈적 교반(chaotic stirring)의 방법은 교반에 있어서의 혁명이라 할 만큼 그 성과가 탁월하다.[1~3]

본 연구는 유한한 레이놀즈 수(Reynolds number)에서의 교반 특성을 살펴보기 위한 전초 연구로서, 보텍스 쉐딩(vortex shedding)에 의한 직사각형통 내에서의 유동특성에 관한 것이다. 그릇에 액체를 담고 수평으로 요동운동 시키면 정상파(standing wave)가 형성된다. 요동운동의 공진 주기에서 이 파(wave)의 강도는 거의 최대가 된다. 그러나 이러한 정상파에 의한 유체의 운동은 규칙적이며 또한 반복적이다. 따라서 유체입자는 제자리 걸음을 하게 되고, 그 결과 혼합 효과는 나쁠 것으로 예상할 수 있다. 이때 그릇의 중앙부에 그릇의 폭보다 짧은 수직 평판을 설치하면 평판 끝에서 보텍스 쉐딩이 일어난다. 와류가 쉐딩되면 그것들이 서로 상호작용하여 불규칙적인 유동을 보이기 쉽고, 더우기 유동속도의 정상 성분이 존재할 수 있다. 이와 같이 유동속도가 정상 성분과 비정상 성분으로 이루어 질 때 유체입자의 거동이 혼돈적이고, 그 결과 혼합 효과는 훨씬 좋아지는 것으로 알려져 있다.[4] 이 점에 입각하여, 본 연구에서는 수치해석을 위주로 하여 유동특성을 조사하고, 실험에 의해 중요한 결과들을 확인하고자 한다.

직사각형통에 유체를 넣어 수평 방향으로 흔들어 줄 때 나타나는 정상파의 공진 문제등은 소위 액체 슬라싱(liquid sloshing) 문제라 하여 약 30년 전부터 연구되어 온 분야이다. Verhagen과 Wijngaarden[5]은 직사각형통에 물을 얕게 담고 그릇을 조화 운동시킬 때의 유체유동 문제를 이론과 실험의 양면에서 연구하였다. 그후 이 문제는 액체를 수송하는 운반체의 진동 문제와 관련하여 많이 다루어 졌는데, Faltinsen,[6] Caglayan과 Storch,[7] Jones와 Hulme[8] 및 Pantazopoulos[9] 등이 그 중의 일부로 꼽을만하다. 최근 Modi와 Welt[10]는 원통 내의 액체의 진동을 억제하기 위한 한 방안으로 원통 내부에 또다른 원통을 넣어 공진점의 이동과 진동억제의 효과를 연구한바 있다.

그러나 위에서 언급한 연구는 거의 대부분 점성을 무시하였으며 따라서 경계층 박리와 같은, 유동양상을 근본적으로 바꾸게 하는 경우는 없다. 더구나, 본 연구의 목적이 수평 평판상의 액체의 교반을 어떻게 하면 효과적으로 이룰 수 있겠는가 하는데 있으므로, 액체 슬라싱의 목적과는 근본적으로 다르다. 이러한 두가지 점에서 본 연구는 큰 특징을 가진다.

본 유동 모델은 미생물의 배양등에 응용될 수 있으며 액체 슬라싱에서의 감쇠 작용에도 효과적으로 적용될 수 있으리라 예상된다. 특히, 미생물의 배양 문제에서는, 혼합이 잘 되지 않으면 미생물끼리 서로 붙어서 성장이 느리고, 그렇다고 하여 유동을 강하게 하는 경우 서로 부딪치거나 그릇의 벽에 충돌하여 세포가 깨어지므로 유동의 혼합 문제는 아주 민감한 요소로 작용한다. 더구나, 감염경로를 차단해야 하는 문제로 인하여 홴(fan) 같은 것을 집어 넣어 휘젓는 것도 좋지 않은 방법으로 여겨지고 있다.

지배방정식은 천수(shallow water) 근사법으로 2차원화 하였고, 수치해석은 4계의 Runge-Kutta법에 의해 行하였다.

2. 수식화와 수치해석 방법

본 연구에 사용된 모델과 좌표계는 Fig. 1과 같다. ℓ은 그릇의 가로 길이, H는 그릇의 폭, h는 운동이 전혀 없을 때의 수심이다. 동점성계수 ν의 유체를 담고 있는 직사각형통은 좌우로 $2r$의 진폭과 ω의 각속도로 조화적인 요동운동을 하며, 이때, 자유표면이 있음으로 하여 유동이 발생한다. 평판이 없을때는 소위 정상파가 형성되는데, 1차원 비점성 이론에 의하면 공진 각속도 ω_n은 $\omega_n = \pi\sqrt{gh}/\ell$ 임이 알려져 있다. 그리고 좌표계(x^*, y^*)는 그릇의 좌하 구석점을 원점으로 하고 그릇과 같이 움직인다.

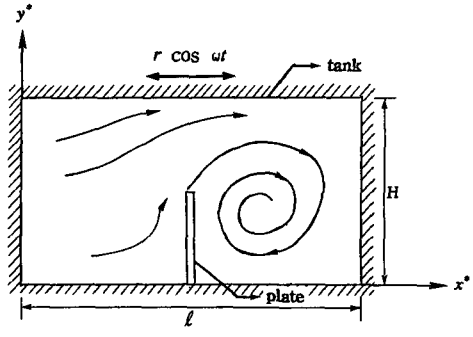


Fig. 1 The flow model, and the dimensional coordinates

본 유동 모델에 대한, 천수 근사법에 따른 무차원 지배방정식은 아래와 같다(본 연구에서 사용된 천수 근사법에 관한 이론은 문헌[11]에 있다).

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-c\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{1}{Re}\nabla^2 u+\cos(t+t_0) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+b\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-c\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{1}{Re}\nabla^2 v \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+b\left[u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+(1+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]=0 \quad (1c)$$

그리고 여기서 (x, y)는 ℓ을 기준으로 한 무차원 좌표이며 u, v는 $r\omega$를 기준으로 한 x-, y-방향의 무차원 속도이고, ζ는 요동운동 없을 때의 유체 표면으로부터 측정한 유체 표면의 수직 방향 위치를 h로 나눈 무차원 파고이다. 그리고 t는 ω기준의 무차원 시간이다. $a=\omega_n/\omega$, $b=r/\ell$, $c=a^2/(\pi^2 b)$는 무차원 상수들이며, $Re=\ell^2\omega/\nu$는 레이놀즈수이다.

u, v에 대한 경계 조건은 모든 고체 벽면에서 속도가 0인 조건이다 :

$$u=v=0 \text{ (at all surfaces of the container and the plate)} \quad (2)$$

ζ에 대한 경계 조건은 식 (1a)와 (1b)로 부터 아래와 같이 할 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{1}{c}\cos(t+t_0) \text{ (at the vertical surfaces of the container and the plate)} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \text{ (at the horizontal surfaces of the container and the plate)} \quad (3b)$$

초기조건은 $u=v=\zeta=0$으로 하였다.

지배방정식의 형태가 t에 대하여 포물형(parabolic)이므로 Runge-Kutta 방법, MacCormack 방법 등이 유효하다. 그러나 시험결과 4계의 Runge-Kutta 방법이 더 효과적임을 알았다. 따라서 본 연구에서는 이 방법으로 수치해석 하였다.

Runge-Kutta 방법에서는, 우선, 식(1)의 $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$, $\partial \zeta/\partial t$를 제외한 모든 항을 우측으로 넘기고, 공간에 대한 중심차분을 써서 차분화 한다. 그러면 결과의 식은 각 그리드 점에서의 세 변수들에 대한 비선형 상미분 방정식의 형태가 되고, 이것을 4계의 Runge-Kutta 알고리즘으로 푸는 것이다.

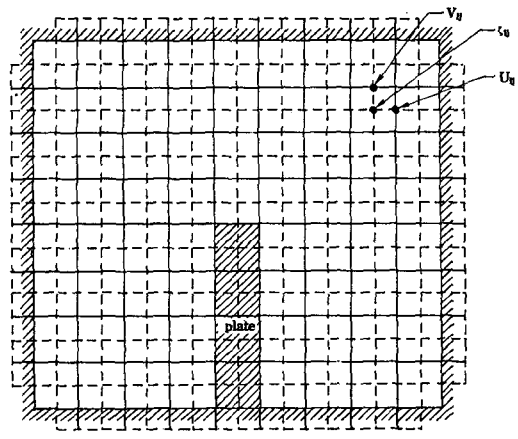


Fig. 2 *Location of variables definition in a staggered grid system*

수치해석의 타당성을 확인하기 위하여 1차원 문제부터 적용하면서 프로그램을 개발하였다. 격자계는 엇갈린 형태이며 u, v 및 ζ가 정의되는 지점과 격자계는 Fig. 2와 같다.

3. 가시화 실험

가시화 실험에 사용된 유체는 부동액과 증류수이며, 부동액의 동점성계수를 Ostwald 점도계로 측정한 결과 $\nu=1.742\times10^{-5}\,m^2/s$이었다.

Fig. 3은 가시화 실험에 사용된 실험장치이다.

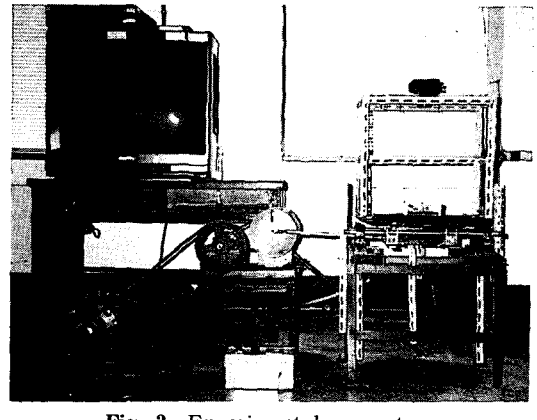


Fig. 3 Experimental apparatus

전동기는 회전속도 가변형이어서 주기를 자유롭게 조정할 수 있게 되어 있으며 플라이휠(flywheel)에는 홈이 있어 그릇의 운동 진폭을 무단으로 조정할 수 있도록 되어 있다. 그릇의 상부에는 와류의 거동을 촬영할 수 있도록 모터 드라이버(motor driver)가 부착된 카메라를 설치하고 그릇과 함께 왕복운동 하도록 설치 하였다.

유동의 가시화를 위하여 그릇 내의 유체 표면에 폴리에틸렌(polyethylene) 가루를 뿌렸으며, 적절한 조명에 의하여 가루의 자취가 가능한한 선명히 나타나도록 하였다. 기타 자세한 설명은 문헌[12]에 수록되어 있다.

4. 결과 및 고찰

4.1 수치해석의 결과

수치해석의 모델에서 나타난 변수(parameter)는 a, b, H/ℓ, Re이다. 본 연구에서는 Re외의 모든 변수의 값들을 고정시켰다. 실험조건과 맞게하기 위해 $a=1.749$, $b=0.1$, $H/\ell=0.583$으로 하였으며, Re는 필요에 따라 바꿔가면서 계산을 수행하였다. x방향과 y방향의 격자수는 70, 41로, 평판은 탱크 폭의 1/2의 무차원 길이를 가지며, x방향으로 중앙에 위치하도록 하였다.

Fig. 4는 $Re=1000$의 경우에 있어서, Fig. 5는 $Re=3876$의 경우에 있어서의 속도 분포를 나타내고 있다. 여기서 ▼는 그릇의 상대 위치를 나타내기 위한 고정점을 표시하며, ➡는 그릇의 운동 방향을 나타낸다. 무차원 시간 t는 ω기준 이므로 $t=2\pi$가 한 주기이며, $t=0$, 2π, ・・・때는 그릇이 우측끝에, $t=\pi$, 3π, ・・・는 좌측끝에 위치하게 된다. 그림에서 나타나듯이, 그릇이 좌측끝 근방에 위치할 때($t=1.1\pi$)는 반시계 방향 와류가 좌측 지역에 강하게 형성되고, 그릇이 우측 끝 근방에 위치할 때($t=2.1\pi$)는 시계 방향 와류가 우측 지역에 강하게 형성된다. 이는 그릇의 운동 방향과 유체의 운동 방향이 일치 한다는 1차원 비점성 모델의 해석 결과로 부터 설명 할 수 있다. 즉 그릇이 좌측으로 움직일 때는 유체도 좌측으로 움직이므로 평판의 간섭으로 인하여 좌측에 와류가 형성되고, 그릇이 우측으로 움직일 때는 유체도 우측으로 움직이므로 우측에 와류가 형성되는 것이다. 여기서 유체와 그릇의 운동 방향은 동일하지만, 유체의 운동속도가 더 크므로 상대속도가 생기고, 따라서 와류의 형성이 가능한 것이다.

그러나 $Re=1000$의 경우와 $Re=3876$의 경우는 이러한 공통된 거동외에 특이하게 서로 다른 면도 보여 주고 있다. 우선 $Re=1000$의 경우에는 Fig. 4에서 알 수 있듯이 1.1π 때 좌측에 형성된 큰 와류가 1.6π 때 거의 소멸되고 2.1π 때 우측에 형성된 큰 와류는 2.6π 때 거의 소멸되며, 좌우가 서로 대칭되게 와류가 쉐딩된다. 반면, $Re=3876$의 경우(Fig. 5)에는, 우측에 형성된 와류는 그릇의 상부표면 가까이에 가서 잠시동안 정체해 있다가 그릇의 상부표면과의 마찰로 인하여 결국 소멸되나($t=2.1\pi\sim3.0\pi$) 좌측에 형성된 와류는 그 세력이 강하기 때문에 없어지지 않고 계속 유지된다. 이와같이 $Re=1000$의 경우는 대칭성을 $Re=3876$의 경우는 비대칭적 유동양상을 보임을 알 수 있다. 그리고 구석에서의 박리 현상에 있어서도 현저한 차이가 있다. $Re=1000$의 경우에서는 거의 박리가 잘 나타나지 않는 반면 $Re=3876$의 경우에서는 좌측 상부 모서리에서 박리가 약하게 나타남을 알 수 있다.

유동의 주기적 변화와 비대칭의 정도를 나타내기 위하여 평판의 좌측과 우측의 운동에너지를

$$E_L=\int_{left}(u^2+v^2)\,dx\,dy,$$

$$E_R=\int_{raght}(u^2+v^2)\,dx\,dy$$

와 같이 계산하였다.

Fig. 6은 $Re=1000$, 3876의 경우에 대한 대표적인 $E_L(t)$, $E_R(t)$를 그린 것이다. 첫 3주기 동안은 유동이 불규칙적으로 거동하다가 그 이후는 규칙적인 거동을 보임을 우선 알 수 있다. 또한, $Re=1000$에서는 E_L과 E_R이 같은 크기와 모양으로 변하므로 대칭적 유동을, $Re=3876$에서는 전반적으로 $E_L>E_R$의 비대칭적 유동을 보임을 알 수 있다.

레이놀즈 수의 변화에 따른 비대칭의 정도를 정량화 하기 위해 E_L과 E_R을 한 주기 동안(규칙적 거동을 보이는 구간에서) 평균한 $\bar{E}_L$, $\bar{E}_R$을 나타낸 것이 Fig. 7이다. 그림에서 알 수 있듯이 $Re<1500$에서는 대칭성을 $Re>1500$에서는 비대칭성을 나타내고, 레이놀즈 수가 증가함에 따라 비대칭 정도가 더 크게 나타남을 알 수 있다. 또한, 특이한 사실은 t_0의 값에 따라 $\bar{E}_L$이 클 수도 있고 $\bar{E}_R$이 클 수도 있다. 그리고 그것이 결정되는 t_0의 범위

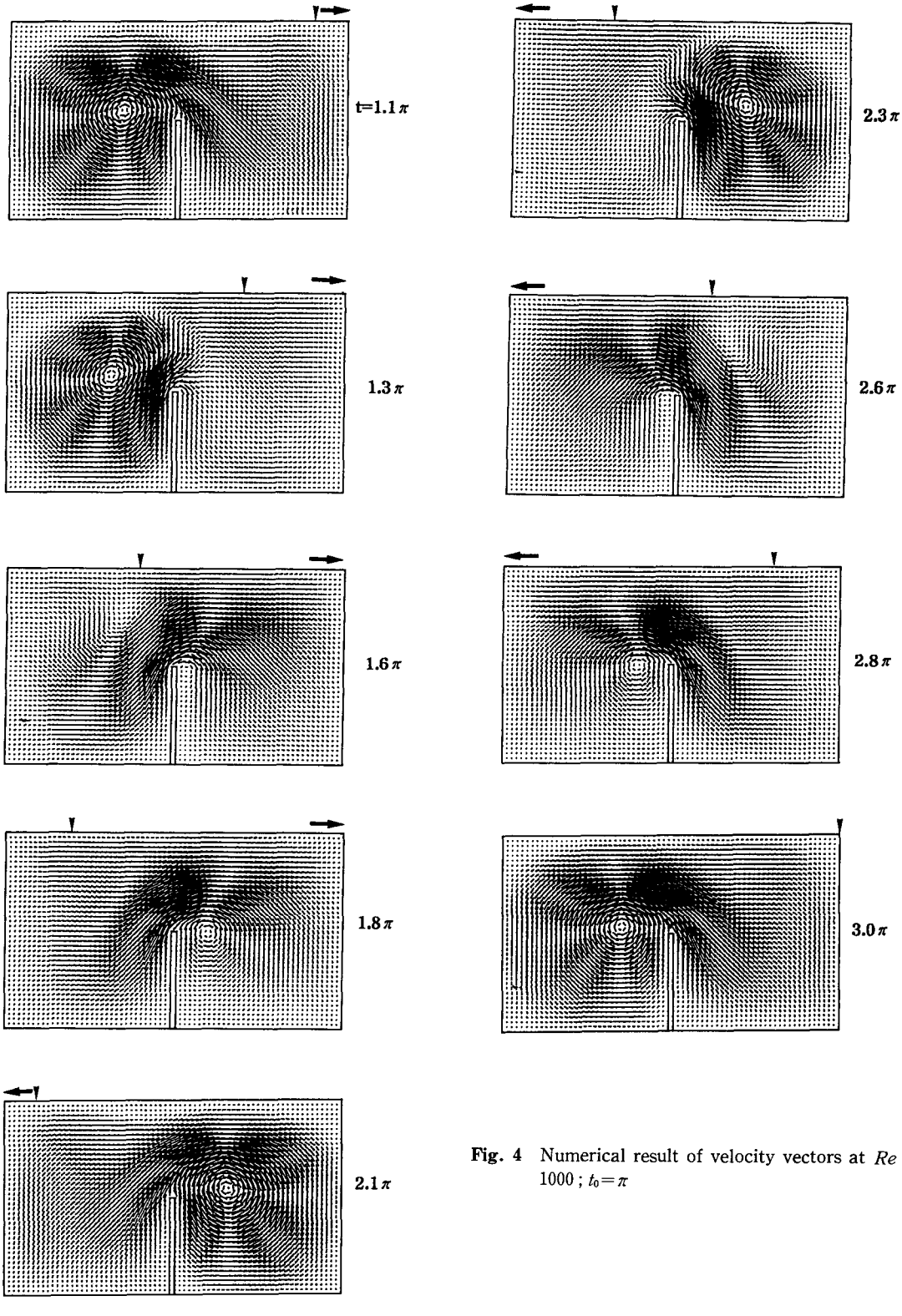


Fig. 4 Numerical result of velocity vectors at Re 1000 ; $t_0=\pi$

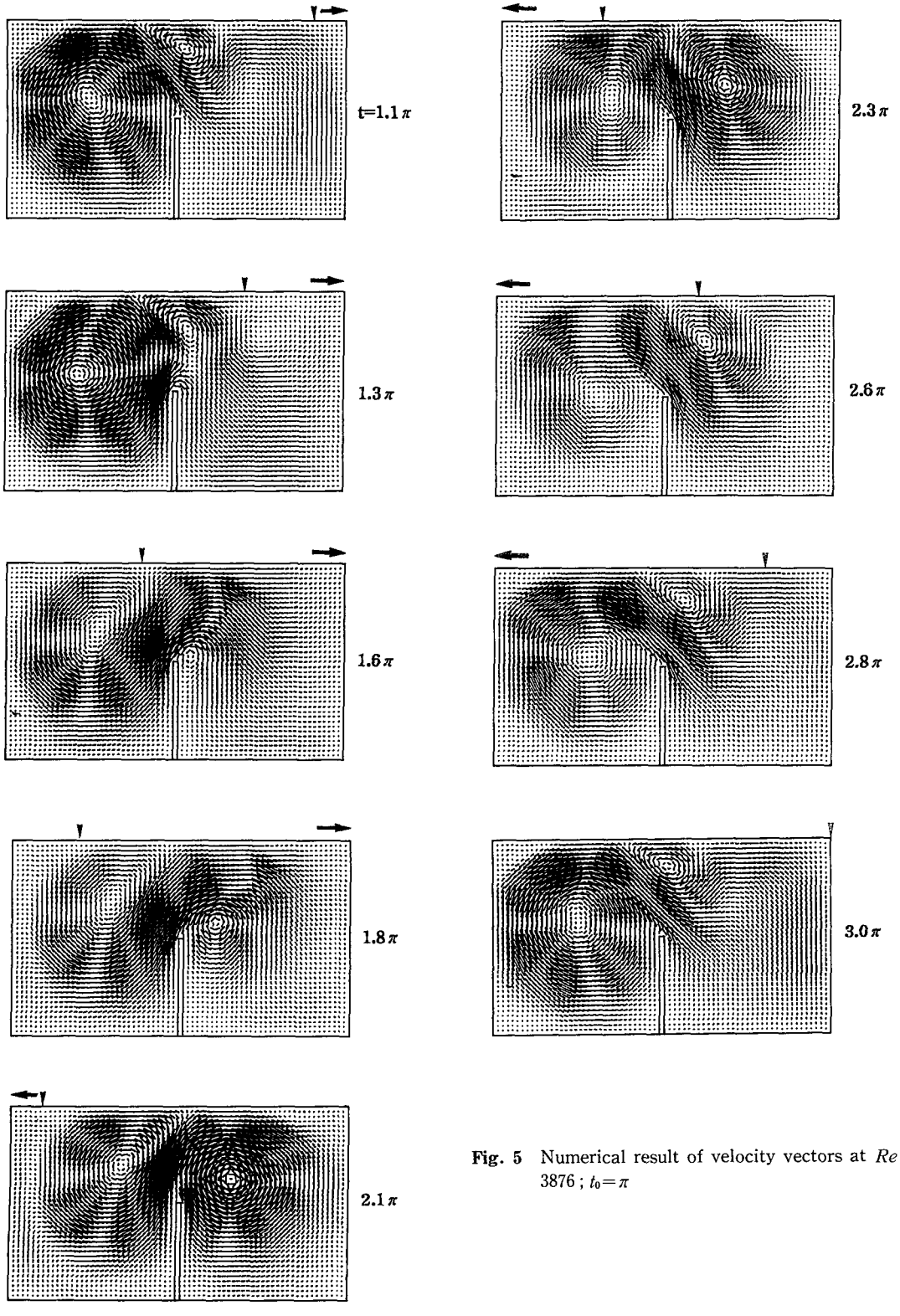


Fig. 5 Numerical result of velocity vectors at Re 3876 ; $t_0=\pi$

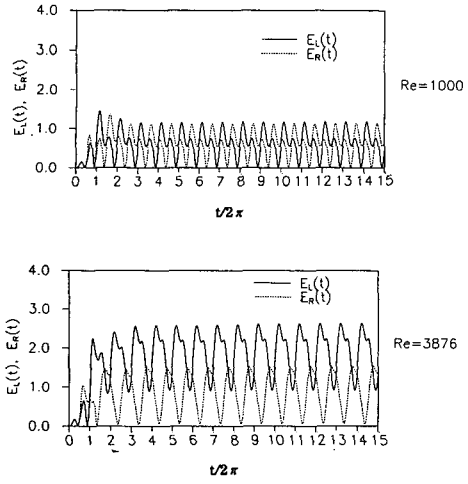


Fig. 6 Time-series of kinetic energies $E_L(t)$ and $E_R(t)$ at $Re=1000$ and 3876 ; $t_0=\pi/2$

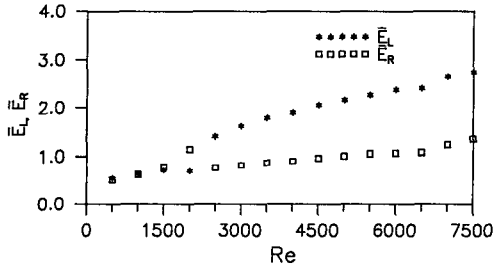
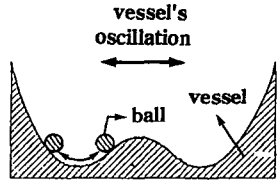
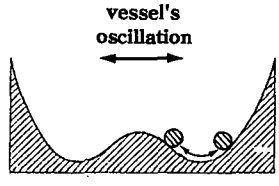


Fig. 7 Variation of mean kinetic energies $\bar{E}_L$ and $\bar{E}_R$ for various Re



(a) oscillation around the left well



(b) oscillation around the right well

Fig. 8 Motion of a ball on the oscillating two-well Vessel

는 레이놀즈수의 값에 따라 다르다. 예를 들면, $Re=2000$의 경우 t_0의 값을 $\pi/8$만큼 변화시키면서 해를 구한 결과 $t_0=4/8\,\pi-11/8\,\pi$에서는 $\bar{E}_R$이, 그 외의 범위에서는 $\bar{E}_L$이 높게 나타나고, $Re=3876$의 경우에는 $t_0=9/8\,\pi-16/8\,\pi$에서는 $\bar{E}_R$이, 그외의 범위에서는 $\bar{E}_L$이 높게 나타난다.

이와 같이 t_0의 값에 따라 $\bar{E}_L>\bar{E}_R$ 또는 $\bar{E}_L<\bar{E}_R$의 두 경우가 달리 나타남은 마치 Fig. 8에 표시한 바와 같이 초기 공의 위치에 따라 좌측 혹은 우측의 구덩이에서 공이 요동운동하는 소위 two-well potential 문제의 해와 그 성격이 같다. 이 모델은 비선형 동역학의 기본개념을 이해하는데 애용되는

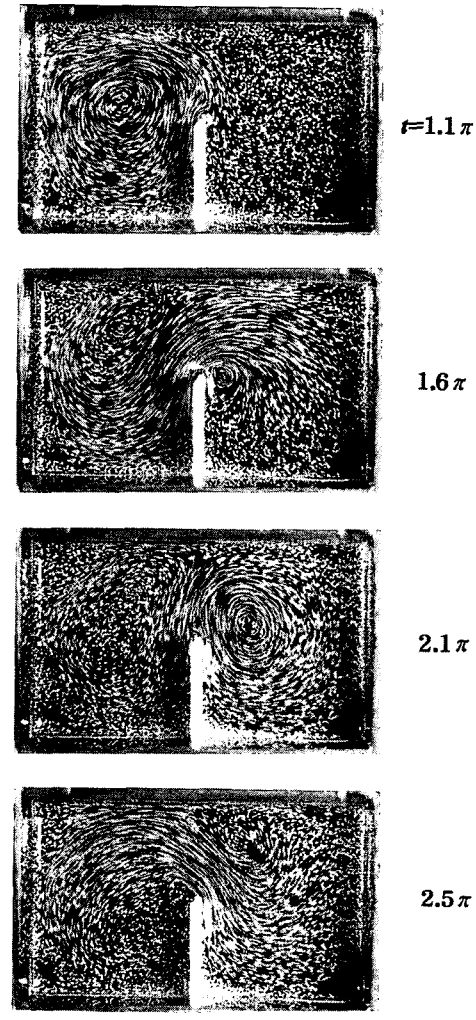


Fig. 9 Flow visualization in a rectangular tank with a plate at $Re=3876$

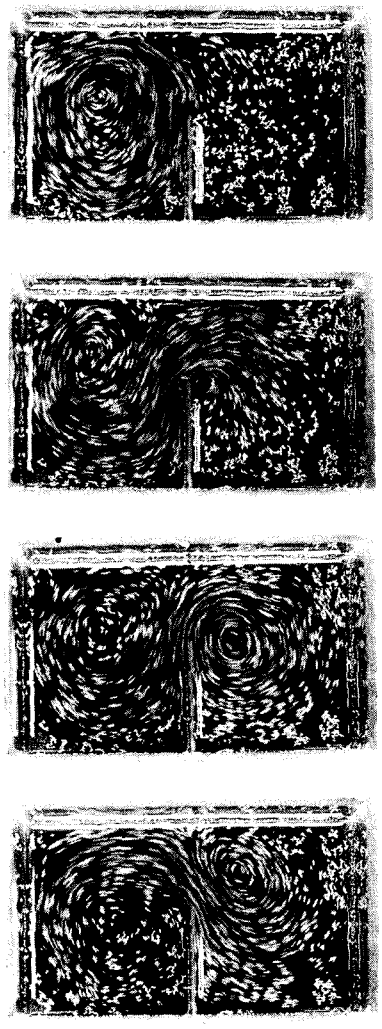


Fig. 10 Flow visualization in a rectangular tank with a plate at Re=52000

것으로서, Fig. 7과 같은 현상을 분기(bifurcation)라고 부르고 있다. 레이놀즈 수를 더욱 증가시킬 때 어떠한 분기를 보일지 그 결과가 궁금하며, 이는 차후의 과제로 남겨둔다.

4.2 가시화 실험의 결과

가시화 실험에서는 $\ell=12$ cm, $H=7$ cm, $h=1$ cm, $r=1.2$ cm로 하였으며, 레이놀즈 수를 3876(부동액의 경우), 52000(물의 경우)으로 바꿔 가면서 실험을 하였다.

Fig. 9는 $Re=3876$의 경우에 있어서, Fig. 10은 $Re=52000$의 경우에 있어서의 가시화 촬영한 결과를 나타내고 있다. $Re=3876$의 경우(Fig. 9)는 좌우가 서로 대칭되게 와류가 쉐딩되는 반면, $Re=52000$의 경우(Fig. 10)는 비대칭적 유동양상을 보임을 알 수 있다. 따라서 $Re=3876$의 경우는 동일한 레이놀즈 수에서의 수치해석 결과보다는 오히려 $Re=1000$의 경우에, $Re=52000$의 경우는 $Re=3876$의 수치해석 결과와 정성적으로 잘 일치함을 알 수 있었다. 이는 바닥에서 형성된 Ekman 층(*ekman layer*)에 그 원인이 있으며 천수 방정식으로는 처리할 수 없는 효과로 사료된다. 즉 소용돌이의 중심에서, 바닥으로 부터 운동량이 작은 유체가 상승하여 와류를 넓게 분산시키면서 와류의 강도를 약화시키는 효과인 것이다.[11] 차후, 이 효과를 고려하여 기존의 천수 방정식 (1)을 개선하는 것이 필요하다 하겠다.

5. 결 론

본 연구에서는 보텍스 쉐딩에 의한 직사각형통 내에서의 유동특성을 조사하였다. 4계의 Runge-Kutta 방법으로 수치해석하여 가시화 실험과 비교해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 레이놀즈 수의 변화에 따라 보텍스 쉐딩의 형태가 상당히 달라짐을 알 수 있었다. 레이놀즈 수가 증가하면 생성된 와류가 소멸되지 않고 살아남아 다음 주기 까지 연장되는 경향이 있다.

(2) $Re<1500$의 경우에서는 보텍스 쉐딩이 대칭적이고, $Re>1500$의 경우에서는 비대칭적임을 알 수 있었다.

(3) 가시화 실험의 결과는 같은 레이놀즈 수에서의 수치해석 결과 보다는 더욱 낮은 레이놀즈 수에서의 수치해석 결과와 정성적으로 잘 일치 하였으며, 이는 Ekman 층의 영향 때문이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 '92 일반목적기초연구지원(과제번호 921-0900-021-1)에 의해 이루어 졌으며, 이에 감사드린다. 본 실험의 초기 단계에서는 화학공학과의 김미향 선생의 도움이 있었다.

참고문헌

(1) Aref, H., 1984, "Stirring by Chaotic Advec-

tion," J. Fluid Mech., Vol. 143, pp. 1~21.

(2) Leong, C.W. and Ottino, J.M., 1989, "Experiments on Mixing due to Chaotic Advection in a Cavity," J. Fluid Mech., Vol. 209, pp. 463~499.

(3) Dahm, W.J.A., Southerland, K.B. and Buch, K. A., 1991, "Direct, High Resolution, Four-Dimensional Measurements of the Fine Scale Structure of $Sc \gg 1$ Molecular Mixing in Turbulent Flows," Phys. Fluids A, Vol. 3, No. 5, Pt. 2, pp. 1115~1127.

(4) Ottino, J.M., 1989, "The Kinematics of Mixing : Stretching, Chaos, and Transport," Cambridge University press.

(5) Verhagen, J.H.G. and van Wijngaarden, L., 1965, "Non-linear Oscillations of Fluid in a Container," J. Fluid Mech., Vol. 22, part 4, pp. 737~751.

(6) Faltinsen, O.M., 1974, "A Nonlinear Theory of Sloshing in Rectangular Tanks," J. Ship Research, Vol. 18, No. 4, pp. 224~241.

(7) Caglayan, I. and Storch, R.L., 1982, "Stability of Fishing Vessels with Water on Deck : A Review," J. Ship Research, Vol. 26, No. 2, pp. 106~116.

(8) Jones, A.F. and Hulme, A., 1987, "The Hydrodynamics of Water on Deck," J. Ship Research, Vol. 31, No. 2, pp. 125~135.

(9) Pantazopoulos, M.S., 1988, "Three-Dimensional Sloshing of Water on Decks," Marine Technology, Vol. 25, No. 4, pp. 253~261.

(10) Modi, V.J. and Welt, F., 1990, "An Investigation of Liquid Sloshing in Toroidal Containers," J. Ship Research, Vol. 34, No. 4, pp. 253~261.

(11) Pedlosky, J., 1979, "Geophysical Fluid Dynamics," Springer-Verlag.

(12) 서용권, 서이수, 박춘근, 문종춘, 1989, "왕복운동하는 원주 주위의 유동특성에 관한 연구," 한국해양공학회지, 제3권 제1호, pp. 377~388.